Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Коновалов, Об одном предельном соотношении для когерентных мер риска, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 1, 167–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 11:03:26

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arratia R. A. Brownian motion on the line. Ph.D. Thesis. Madison: Univ. of Wisconsin, 1979.
2. Le Jan Y., Raimond O. Flows, coalescence and noise. — Ann. Probab., 2004, v. 32, № 2, p. 1247—1315.
3. Dorogovtsev A. A. One Brownian stochastic flow. — Theory Stoch. Process., 2004, v. 10, № 3–4, p. 21–25.
4. Дороговцев А. А. Мерозначные процессы и стохастические потоки. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007, 289 с.
5. Weinan E., Rykov Yu. G., Sinai Ya. G. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics. — Comm. Math. Phys., 1996, v. 177, p. 349–380.
6. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
7. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 448 с.
8. Худа Т. Броуновское движение. М.: Наука, 1987, 304 с.
9. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 576 с.

Поступила в редакцию
15.VII.2008

Исправленный вариант
7.X.2009

© 2010 г.

КОНОВАЛОВ Л. А.*

**ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ СООТНОШЕНИИ
ДЛЯ КОГЕРЕНТНЫХ МЕР РИСКА**

Данная работа посвящена исследованию связи между обычным и факторным рисками в факторной модели. В частности показано, что при определенных условиях в простейшей факторной модели с ростом числа активов в портфеле разность между этими рисками стремится к конечному числу, несмотря на то, что сами они стремятся к бесконечности.

Ключевые слова и фразы: измерение риска, когерентные меры риска, факторный риск, факторная модель, предельные теоремы, хвостовой $V@R$, взвешенный $V@R$.

1. Введение.

1.1. Измерение риска. Предположим, что приращение стоимости некоторой ценной бумаги (или портфеля ценных бумаг) за единичный промежуток времени (например, один день) описывается случайной величиной X . Со стороны обладателя этой ценной бумаги естественно интересоваться следующим вопросом: насколько велик риск того, что ее стоимость упадет? Таким образом, возникает задача измерения риска, связанного со случайной величиной X .

Классическими мерами финансового риска являются стандартное отклонение $\sigma(X) = \sqrt{DX}$ и мера Value-at-Risk ($V@R$), определяемая формулой

$$V@R_\lambda(X) = -q_\lambda(X),$$

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: leonid.knv@gmail.com

где $\lambda \in (0, 1)$ — параметр, который обычно полагают равным 0.01, 0.05 или 0.25, и $q_\lambda(X)$ — λ -квантиль распределения X . Обе эти риск-меры широко используются на практике. Однако они обладают существенными недостатками. Так, например, с точки зрения меры V@R риск от случайных величин, плотности распределений которых изображены на рис. 1, одинаков. В то же время, с точки зрения здравого смысла очевидно, что величина, плотность распределения которой изображена слева, несет значительно меньший риск.

Рис. 1. Один из недостатков риск-меры Value-at-Risk.

В 1997 году в статье [3] был предложен новый способ измерения риска, избавленный от недостатков классических риск-мер — с помощью функционалов вида

$$\rho(X) = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X], \quad (1)$$

где $\mathcal{D}$ — некоторое множество вероятностных мер, абсолютно непрерывных относительно меры исходного вероятностного пространства. Эта статья заложила основы новой ветви финансовой математики — теории когерентных мер риска, которая стала весьма популярной темой исследований. Сегодня имеется по крайней мере 350 работ, связанных с когерентными мерами риска.

1.2. Факторный риск. Из рыночной практики известно, что цены финансовых активов в основном определяются небольшим числом главных рыночных факторов, таких, как цена на нефть и значения финансовых индексов. В этой связи возникает задача измерения риска, привносимого в финансовый портфель каким-либо рыночным фактором. Одна из причин, по которой эта задача важна, состоит в том, что участники рынка часто хотят защититься от влияния какого-либо из факторов (например, в том случае, когда ожидается значительное его изменение). Другая причина заключается в том, что использование факторного подхода позволяет измерять риск финансовых портфелей, для приращений цен которых отсутствуют исторические данные (подробнее см. [5]).

Дадим определение факторного риска, следуя работе [5]. Пусть множество $\mathcal{D}$ определяет когерентную меру риска ρ по формуле (1), а X и F — случайные величины (соответственно случайная величина и случайный вектор), имеющие смысл приращений цены некоторого финансового портфеля и значения некоторого фактора (соответственно значений некоторого набора факторов) за единичный промежуток времени.

О п р е д е л е н и е 1. *Факторным риском* назовем величину

$$\rho^f(X; Y) = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathbf{E}[\mathcal{D} | Y]} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X],$$

где $\mathbf{E}[\mathcal{D} | Y] = \{\mathbf{E}[Z | Y], Z \in \mathcal{D}\}$.

Отметим, что при некоторых естественных интегральных предположениях относительно X имеет место равенство $\rho^f(X; Y) = \rho(\mathbf{E}[X | Y])$. Таким образом, при измерении факторного риска учитывается только случайность, вносимая величиной Y .

1.3. Факторная модель. Настоящая работа посвящена исследованию связи между величинами $\rho^f(X; Y)$ и $\rho(X)$. Для этого используется популярная в статистике факторная модель (а точнее — последовательность моделей).

Пусть когерентная мера риска ρ инвариантна по распределению (т.е. $\rho(X) = \rho(\tilde{X})$) для всех пар одинаково распределенных величин X и $\tilde{X}$, $F = (F^1, \dots, F^M)$ — случайный вектор, величины $\rho(F^j)$ и $\rho(-F^j)$ конечны для всех $j \in \{1, \dots, M\}$ и

$$X_n^i = \sum_{j=1}^M B_n^{ij} F^j + \xi_n^i, \quad n \in \mathbf{N}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

где $B_n^{ij} \in \mathbf{R}$, величины $\xi_n^1, \dots, \xi_n^n$ и вектор F независимы в совокупности¹⁾ и ξ_n^i имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $(\sigma_n^i)^2$. Введем обозначения:

$$B_n^j = \sum_{i=1}^n B_n^{ij}, \quad B_n = \sum_{j=1}^M B_n^j, \quad \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n (\sigma_n^i)^2, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_n^i.$$

Будем предполагать, что существует последовательность чисел $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ такая, что $a_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, $a_n^{-1} B_n^j \rightarrow b^j$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $j \in \{1, \dots, M\}$ и $a_n^{-2} \sigma_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, причем $b^1, \dots, b^M \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Будем также считать, что $b^1 > 0, \dots, b^M > 0$. Этого всегда можно добиться, переходя от F^j к $-F^j$.

П р и м е р 1 (простейшая факторная модель). Пусть $B_n^{ij} = 1$, $(\sigma_n^i)^2 = 1$ для всех $n \in \mathbf{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, M\}$. Тогда

$$B_n^j = n, \quad B_n = nM, \quad \sigma_n^2 = n,$$

$$S_n = n(F^1 + \dots + F^M) + \xi_n^1 + \dots + \xi_n^n.$$

В качестве a_n можно взять n .

С финансовой точки зрения величины $X_n^1, \dots, X_n^n$ представляют собой приращения цен некоторых активов, а $F^1, \dots, F^M$ — приращения значений рыночных факторов; при этом риск, связанный с прибылью

$$S_n = \sum_{j=1}^M B_n^j F^j + \sum_{i=1}^n \xi_n^i,$$

делится на систематический (привносимый слагаемым $\sum_{j=1}^M B_n^j F^j$) и несистематический (привносимый слагаемым $\sum_{i=1}^n \xi_n^i$).

Следующая теорема (доказательство которой содержится в работе [5]) показывает, что для больших портфелей общий риск примерно равен систематическому.

Теорема 1. *Имеет место следующее предельное соотношение:*

$$\rho(S_n) = \rho^f(S_n; F) + o(\rho^f(S_n; F)), \quad n \rightarrow \infty^2). \quad (2)$$

Для простейшей факторной модели соотношение (2) имеет вид

$$\rho(S_n) = \rho^f(S_n; F) + o(n), \quad n \rightarrow \infty.$$

В настоящей работе получены условия, при которых формула (2) для базовых когерентных мер риска допускает следующее уточнение:

$$\rho(S_n) = \rho^f(S_n; F) + ca_n^{-1} \sigma_n^2 + o(a_n^{-1} \sigma_n^2), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

¹⁾ Если вектор F — гауссовский, то, без ограничения общности, его компоненты можно считать независимыми.

²⁾ То есть $(\rho(S_n) - \rho^f(S_n; F))/\rho^f(S_n; F) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

где c — некоторое число, которое определяется коэффициентами B_n^{ij} , распределением случайного вектора F и когерентной мерой риска ρ . Для простейшей факторной модели формула (3) означает сходимости

$$\rho(S_n) - \rho^f(S_n; F) \longrightarrow c, \quad n \rightarrow \infty,$$

что довольно удивительно, учитывая, что $\rho(S_n) \longrightarrow \infty$ и $\rho^f(S_n; F) \longrightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Отметим также, что теорема 1 связана с рассмотрением первой производной функции

$$g(\varepsilon) = \rho(X + \varepsilon Y), \quad \varepsilon \in \mathbf{R},$$

а доказательства результатов настоящей работы опираются на подсчет второй производной этой функции. Сначала соотношение (3) будет получено для однофакторной модели, а затем в произвольном случае.

2. Однофакторный случай. Дадим необходимые определения. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — некоторое вероятностное пространство. Рассмотрим две базовые когерентные меры риска.

О п р е д е л е н и е 2. *Хвостовой* $V @ R$ — это когерентная мера риска ρ_λ , определяемая на пространстве всех случайных величин $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ формулой³⁾

$$\rho_\lambda(X) = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}_\lambda} \mathbf{E}[-X],$$

где

$$\mathcal{D}_\lambda = \{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}: d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \leq \lambda^{-1}\},$$

и $\lambda \in (0, 1]$ — параметр.

Нетрудно проверить, что если $\lambda \in (0, 1)$ и случайная величина X имеет непрерывное распределение, то

$$\rho_\lambda(X) = -\mathbf{E}[X | X \leq q_\lambda(X)].$$

О п р е д е л е н и е 3. *Взвешенный* $V @ R$ — это когерентная мера риска ρ_μ , определяемая на пространстве $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ формулой

$$\rho_\mu(X) = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}_\mu} \mathbf{E}[-X],$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu &= \{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}: \mathbf{Q}(A) \leq \Psi_\mu(\mathbf{P}(A)) \text{ для всех } A \in \mathcal{F}\}, \\ \Psi_\mu(x) &= \int_0^x \int_{(y, 1]} \lambda^{-1} \mu(d\lambda) dy, \quad x \in [0, 1], \end{aligned}$$

и μ — вероятностная мера на полуинтервале $(0, 1]$, являющаяся параметром.

Данное представление множества $\mathcal{D}_\mu$ заимствовано из работы [6], которая также содержит и другие его представления. Для произвольной случайной величины имеют место равенства

$$\rho_\mu(X) = \int_{(0, 1]} \rho_\lambda(X) \mu(d\lambda) = \mathbf{E} Y,$$

где Y — случайная величина с функцией распределения $\Psi_\mu \circ G$, G — функция распределения случайной величины X . В работе [9] эта формула служит определением меры

³⁾ Математическое ожидание $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} Y$ произвольной случайной величины Y в настоящей работе понимается как $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} Y^+ - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} Y^-$, при этом используется соглашение $\infty - \infty = -\infty$.

риска на пространстве ограниченных случайных величин, а в работе [6] она доказывается, отталкиваясь от определения меры риска на пространстве всех случайных величин по формуле (1).

Пусть $\mathcal{D}$ — некоторое множество вероятностных мер, абсолютно непрерывных относительно меры $\mathbf{P}$. Пространства

$$L_w^1(\mathcal{D}) = \{X \in L^0: \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} |\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X| < \infty\}$$

и

$$L_s^1(\mathcal{D}) = \{X \in L^0: \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} |X| \mathbf{1}_{\{|X| > c\}} \rightarrow 0, c \rightarrow \infty\}$$

будем называть соответственно *слабым* и *сильным* L^1 -пространствами. Легко видеть, что $L_s^1(\mathcal{D}) \subseteq L_w^1(\mathcal{D})$ и $L_s^1(\mathcal{D}) = L_w^1(\mathcal{D}) = L^1$, если $\mathcal{D} = \{\mathbf{P}\}$. В некоторых случаях эти пространства различны, однако для множеств $\mathcal{D}_\lambda$ и $\mathcal{D}_\mu$ они совпадают.

Пусть множество $\mathcal{D}$ задает когерентную меру риска ρ по формуле (1), X, Y — случайные величины и $Y \in L_w^1(\mathcal{D})$.

О п р е д е л е н и е 4. *Риск-вкладом* X в Y назовем величину

$$\rho^c(X; Y) = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}(Y)} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X],$$

где $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}(Y) = \{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}: \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} Y = -\rho(Y)\}$ — множество экстремальных мер для случайной величины Y и когерентной меры риска ρ .

Отметим, что если $Y \in L_w^1(\mathcal{D}_\mu)$, то $\mathcal{X}_{\mathcal{D}_\mu}(Y) \neq \emptyset$ и, следовательно, для всех X определена величина $\rho_\mu^c(X; Y)$. Если множество $\mathcal{D}$ L^1 -замкнуто и равномерно интегрируемо⁴⁾, а $X, Y \in L_s^1(\mathcal{D})$, то

$$\rho^c(X; Y) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} (\rho(Y + \varepsilon X) - \rho(Y)). \quad (4)$$

Доказательство этого факта можно найти в работе [2, теорема 2.3].

Итак, рассмотрим последовательность однофакторных ($M = 1$) моделей.

Теорема 2. Пусть $\lambda \in (0, 1)$, распределение интегрируемой случайной величины F^1 имеет ограниченную непрерывную почти всюду и всюду в некоторой окрестности точки $q_\lambda(F^1)$ плотность p_{F^1} и при этом $p_{F^1}(q_\lambda(F^1)) \neq 0$. Тогда

$$\rho_\lambda(S_n) = \rho_\lambda^f(S_n; F^1) + \frac{1}{2\lambda} p_{F^1}(q_\lambda(F^1)) B_n^{-1} \sigma_n^2 + o(B_n^{-1} \sigma_n^2), \quad n \rightarrow \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию g_λ , определяемую формулой

$$g_\lambda(\varepsilon) = \rho_\lambda(F^1 + \varepsilon \xi), \quad \varepsilon \in \mathbf{R},$$

где ξ — стандартная нормальная величина независимая от F^1 . В силу соотношения (4) и четности g_λ

$$g'_\lambda(0) = \rho_\lambda^c(\xi; F^1) = 0, \quad (g_\lambda)'_+(\varepsilon) = \rho_\lambda^c(\xi; F^1 + \varepsilon \xi), \quad (g_\lambda)'_-(\varepsilon) = -\rho_\lambda^c(-\xi; F^1 + \varepsilon \xi).$$

Поскольку для всех $\varepsilon \in \mathbf{R}$ случайная величина $F^1 + \varepsilon \xi$ имеет непрерывное распределение, то экстремальная мера для нее единственна ([6, Proposition 2.7]), и, следовательно, $(g_\lambda)'_+(\varepsilon) = (g_\lambda)'_-(\varepsilon) = g'_\lambda(\varepsilon) = \rho_\lambda^c(\xi; F^1 + \varepsilon \xi)$. Покажем, что в некоторой окрестности нуля g_λ имеет и вторую производную и найдем ее.

Рассмотрим функции

$$h_\lambda(\varepsilon) = q_\lambda(F^1 + \varepsilon \xi), \quad \varepsilon \in \mathbf{R}$$

⁴⁾ В теории когерентных мер риска не принято делать отличия между множествами $\mathcal{D}$ и $\{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathcal{D}\}$. В данном случае речь идет о последнем.

и

$$H(z, \varepsilon) = \mathbf{P}(F^1 + \varepsilon\xi \leq z), \quad z \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon \in \mathbf{R}.$$

Согласно теореме Фубини,

$$\begin{aligned} H(z, \varepsilon) &= \int_{\mathbf{R}^2} \mathbf{1}\{\varepsilon x + y \leq z\} \mathbf{P}_\xi \otimes \mathbf{P}_{F^1}(dx, dy) \\ &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{P}(F^1 \leq z - \varepsilon x) \mathbf{P}_\xi(dx), \quad z \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Дифференцируя подынтегральное выражение ([1, глава 8, теорема 2]), находим частные производные H :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial z}(z, \varepsilon) &= \int_{\mathbf{R}} p_{F^1}(z - \varepsilon x) \mathbf{P}_\xi(dx), \quad z \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon \in \mathbf{R}, \\ \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}(z, \varepsilon) &= - \int_{\mathbf{R}} x p_{F^1}(z - \varepsilon x) \mathbf{P}_\xi(dx), \quad z \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Пусть $z_0 = q_\lambda(F^1)$. Нетрудно видеть, что $\partial H/\partial z$ и $\partial H/\partial \varepsilon$ непрерывны в некоторой окрестности точки $(z_0, 0)$. Кроме того, $\frac{\partial H}{\partial z}(z_0, 0) = p_{F^1}(q_\lambda(F^1)) \neq 0$. По теореме о неявной функции, в некоторой окрестности нуля U определена непрерывно дифференцируемая функция $\hat{h}_\lambda$ такая, что $H(z, \varepsilon) = \lambda \iff z = \hat{h}_\lambda(\varepsilon)$ для всех (z, ε) из некоторой окрестности точки $(z_0, 0)$. Поскольку $H(h_\lambda(\varepsilon), \varepsilon) = \lambda$ для всех $\varepsilon \in \mathbf{R}$, то $h_\lambda(\varepsilon) = \hat{h}_\lambda(\varepsilon)$ для всех $\varepsilon \in U$. Следовательно, h_λ дифференцируема в этой окрестности.

Так как экстремальная мера для $F^1 + \varepsilon\xi$ имеет плотность $\lambda^{-1} \mathbf{1}\{F^1 + \varepsilon\xi \leq h_\lambda(\varepsilon)\}$, то, снова по теореме Фубини, для всех $\varepsilon \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} g'_\lambda(\varepsilon) &= -\lambda^{-1} \mathbf{E} \xi \mathbf{1}\{F^1 + \varepsilon\xi \leq h_\lambda(\varepsilon)\} \\ &= -\lambda^{-1} \int_{\mathbf{R}^2} x \mathbf{1}\{\varepsilon x + y \leq h_\lambda(\varepsilon)\} \mathbf{P}_\xi \otimes \mathbf{P}_{F^1}(dx, dy) \\ &= -\lambda^{-1} \int_{\mathbf{R}} x \mathbf{P}(F^1 \leq h_\lambda(\varepsilon) - \varepsilon x) \mathbf{P}_\xi(dx). \end{aligned}$$

и, следовательно ([1, глава 8, теорема 2]),

$$g''_\lambda(\varepsilon) = -\lambda^{-1} \int_{\mathbf{R}} x p_{F^1}(h_\lambda(\varepsilon) - \varepsilon x) (h'_\lambda(\varepsilon) - x) \mathbf{P}_\xi(dx)$$

для всех $\varepsilon \in U$, в частности

$$g''_\lambda(0) = \lambda^{-1} p_{F^1}(q_\lambda(F^1)).$$

Согласно локальной формуле Тейлора,

$$g_\lambda(\varepsilon) = g_\lambda(0) + \frac{1}{2\lambda} p_{F^1}(q_\lambda(F^1)) \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5)$$

Поскольку мы считаем b^1 положительным, то B_n также положительны для достаточно больших n и, значит,

$$\rho_\lambda(S_n) = B_n g_\lambda(B_n^{-1} \sigma_n). \quad (6)$$

Воспользовавшись тем, что

$$g_\lambda(0) = \rho_\lambda(F^1), \quad \rho_\lambda^f(S_n; F^1) = \rho_\lambda(\mathbf{E}(S_n | F^1)) = B_n \rho_\lambda(F^1),$$

получаем из (5) и (6) утверждение теоремы.

П р и м е р 2. Рассмотрим простейшую однофакторную модель, в которой величина F^1 имеет стандартное логнормальное распределение. Очевидно $\rho_\lambda^f(S_n; F^1) = n \rho_\lambda(F^1)$. Обозначим через Δ_λ величину $\frac{1}{2\lambda} p_{F^1}(q_\lambda(F^1))$, а через $\Delta_{\lambda,n}$ — разность $\rho_\lambda(S_n) - \rho_\lambda^f(S_n; F^1)$.

По теореме 2, $\Delta_{\lambda,n} \rightarrow \Delta_\lambda$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $\lambda \in (0, 1)$, т.е. разность между обычным и факторным рисками стремится к числу Δ_λ (рис. 2).

Рис. 2. Сходимость в примерах 2 и 3. Значения 3.16, 5.34, 0.36 и 0.82 есть соответственно $\Delta_{0.1}$, $\Delta_{0.05}$, $\Delta_{2.1}$ и $\Delta_{15.5}$.

Теорема 3. Пусть вероятностная мера μ на полуинтервале $(0, 1]$ такова, что

$$\int_{(0,1]} \lambda^{-1} \mu(d\lambda) < \infty, \quad (*)$$

функция

$$\psi_\mu(x) = \int_{(x,1]} \lambda^{-1} \mu(d\lambda), \quad x \in [0, 1],$$

дифференцируема всюду на $[0, 1]$ и ее производная ограничена, а распределение интегрируемой случайной величины F^1 имеет ограниченную непрерывную всюду плотность. Тогда

$$\rho_\mu(S_n) = \rho_\mu^f(S_n; F^1) - \frac{1}{2} \mathbf{E}(\psi_\mu \circ G)'(F^1) B_n^{-1} \sigma_n^2 + o(B_n^{-1} \sigma_n^2), \quad n \rightarrow \infty,$$

где G — функция распределения случайной величины F^1 .

Доказательство. Пусть, как обычно, ξ — стандартная нормальная величина не зависящая от F^1 . Заметим сначала, что из определения множества $\mathcal{D}_\mu$ вытекает, что условие $(*)$ равносильно его равномерной ограниченности и поэтому $F^1, \xi \in L_s^1(\mathcal{D}_\mu)$. Рассмотрим функцию

$$g_\mu(\varepsilon) = \rho_\mu(F^1 + \varepsilon\xi), \quad \varepsilon \in \mathbf{R}.$$

Поскольку для всех $\varepsilon \in \mathbf{R}$ случайная величина $F^1 + \varepsilon\xi$ имеет непрерывное распределение, то для нее существует единственная экстремальная мера $\mathbf{Q}_\mu(F^1 + \varepsilon\xi)$ с плотностью $g(F^1 + \varepsilon\xi)$, где

$$g(z) = \int_{[H(z,\varepsilon),1]} \lambda^{-1} \mu(d\lambda)$$

и $H(z, \varepsilon) = \mathbf{P}(F^1 + \varepsilon\xi \leq z)$ ([6, Section 6]), т.е.

$$\frac{d\mathbf{Q}_\mu(F^1 + \varepsilon\xi)}{d\mathbf{P}} = \psi_\mu(H(F^1 + \varepsilon\xi, \varepsilon)).$$

Отсюда

$$g'_\mu(\varepsilon) = \rho_\mu^c(\xi; F^1 + \varepsilon\xi) = -\mathbf{E}\xi\psi_\mu(H(F^1 + \varepsilon\xi, \varepsilon)), \quad \varepsilon \in \mathbf{R}.$$

Дифференцируя выражение под знаком математического ожидания ([1, глава 8, теорема 2]) получаем, что

$$g''_\mu(\varepsilon) = -\mathbf{E}\xi\psi'_\mu(H(F^1 + \varepsilon\xi, \varepsilon)) \left(\frac{\partial H}{\partial z}(F^1 + \varepsilon\xi, \varepsilon) \xi + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}(F^1 + \varepsilon\xi, \varepsilon) \right), \quad \varepsilon \in \mathbf{R},$$

в частности, пользуясь тем, что $\frac{\partial H}{\partial z}(z, 0) = p_{F^1}(z)$, а также независимостью F^1 и ξ , имеем

$$g''_\mu(0) = -\mathbf{E} \psi'_\mu(H(F^1, 0)) \frac{\partial H}{\partial z}(F^1, 0) = -\mathbf{E}(\psi_\mu \circ G)'(F^1).$$

Остается заметить, что $\rho_\mu(S_n) = B_n g_\mu(B_n^{-1} \sigma_n)$ и воспользоваться локальной формулой Тейлора. Теорема доказана.

П р и м е р 3. Пусть $\alpha \in (-1, \infty)$, $\beta \in (-1, \alpha)$,

$$\mu_{\alpha, \beta}(d\lambda) = (B(\beta + 1, \alpha - \beta))^{-1} \lambda^\beta (1 - \lambda)^{\alpha - \beta - 1} d\lambda, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Когерентную меру риска $\rho_{\mu_{\alpha, \beta}}$ будем обозначать $\rho_{\alpha, \beta}$. Впервые она появилась в работе [5] под названием *бета V@R*.

Рассмотрим однофакторную модель из примера 2. Пусть $\Delta_{\alpha, \beta} = -\frac{1}{2} \mathbf{E}(\psi_{\mu_{\alpha, \beta}} \circ G)'(F^1)$ и $\Delta_{\alpha, \beta, n} = \rho_{\alpha, \beta}(S_n) - \rho_{\alpha, \beta}^f(S_n; F^1)$. По теореме 3 $\Delta_{\alpha, \beta, n} \rightarrow \Delta_{\alpha, \beta}$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $\alpha \in (1, \infty)$, $\beta \in [1, \alpha)$ (см. рис. 2).

3. Многофакторный случай. Рассмотрим предельные теоремы для многофакторной модели, аналогичные теоремам 2 и 3. Везде далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное умножение.

Теорема 4. Пусть $\lambda \in (0, 1)$, вектор F имеет независимые компоненты с непрерывными ограниченными плотностями, а плотность $p_{\langle b, F \rangle}$ распределения случайной величины $\langle b, F \rangle$ положительна в точке $q_\lambda(\langle b, F \rangle)$. Тогда

$$\rho_\lambda(S_n) = \rho_\lambda^f(S_n; F) + \frac{1}{2\lambda} p_{\langle b, F \rangle}(q_\lambda(\langle b, F \rangle)) a_n^{-1} \sigma_n^2 + o(a_n^{-1} \sigma_n^2), \quad n \rightarrow \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$H(y^1, \dots, y^M, z, \varepsilon) = \mathbf{P}(\langle y, F \rangle + \varepsilon \xi \leq z), \quad y = (y^1, \dots, y^M) \in U, \quad z \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon \in \mathbf{R},$$

где U — отделенная от координатных осей окрестность точки b . Поскольку

$$\begin{aligned} H(y^1, \dots, y^M, z, \varepsilon) &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{P}(\langle y, F \rangle \leq z - \varepsilon x) \mathbf{P}_\xi(dx) \\ &= \int_{\mathbf{R}^M} \mathbf{P}(y^i F^i \leq z - \langle y', x \rangle) \mathbf{P}_{F'}(dx), \end{aligned} \quad (7)$$

где $y' = (y^1, \dots, y^{i-1}, \varepsilon, y^{i+1}, \dots, y^M)$, $F' = (F^1, \dots, F^{i-1}, \xi, F^{i+1}, \dots, F^M)$, то, по теореме [1, глава 8, теорема 2] находим непрерывные частные производные H (непрерывность и ограниченность $p_{\langle y, F \rangle}(x)$ по $(y, x) \in U \times \mathbf{R}$ можно показать, например, проинтегрировав по z при $\varepsilon = 0$ последний интеграл в формуле (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial z}(y^1, \dots, y^M, z, \varepsilon) &= \int_{\mathbf{R}} p_{\langle y, F \rangle}(z - \varepsilon x) \mathbf{P}_\xi(dx), \\ \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}(y^1, \dots, y^M, z, \varepsilon) &= - \int_{\mathbf{R}} x p_{\langle y, F \rangle}(z - \varepsilon x) \mathbf{P}_\xi(dx), \\ \frac{\partial H}{\partial y^i}(y^1, \dots, y^M, z, \varepsilon) &= - \frac{1}{(y^i)^2} \int_{\mathbf{R}^M} (z - \langle y', x \rangle) p_{F^i}((z - \langle y', x \rangle)/y^i) \mathbf{P}_{F'}(dx). \end{aligned}$$

Пусть $z_0 = q_\lambda(\langle b, F \rangle)$. Так как $\frac{\partial H}{\partial z}(b^1, \dots, b^M, z_0, 0) = p_{\langle b, F \rangle}(q_\lambda(\langle b, F \rangle)) \neq 0$, то, по теореме о неявной функции (неявная функция здесь задается уравнением $H(y^1, \dots, y^M, z, \varepsilon) = \lambda$), отображение

$$h_\lambda(y^1, \dots, y^M, \varepsilon) = q_\lambda(\langle y, F \rangle + \varepsilon \xi)$$

является непрерывно дифференцируемым в некоторой окрестности точки $(b^1, \dots, b^M, 0)$.

Рассмотрим функцию

$$g_\lambda(y^1, \dots, y^M, \varepsilon) = \rho_\lambda(\langle y, F \rangle + \varepsilon \xi), \quad y = (y^1, \dots, y^M) \in U, \quad \varepsilon \in \mathbf{R}.$$

Как было показано при доказательстве теоремы 2, для всех $y = (y^1, \dots, y^M)$ достаточно близких к точке $(b^1, \dots, b^M)$ и достаточно малых ε существует непрерывная частная производная

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 g_\lambda}{\partial \varepsilon^2}(y^1, \dots, y^M, \varepsilon) \\ &= -\lambda^{-1} \frac{\partial h_\lambda}{\partial \varepsilon}(y^1, \dots, y^M, \varepsilon) \int_{\mathbf{R}} x p_{\langle y, F \rangle}(h_\lambda(y^1, \dots, y^M, \varepsilon) - \varepsilon x) \mathbf{P}_\xi(dx) \\ &+ \lambda^{-1} \int_{\mathbf{R}} x^2 p_{\langle y, F \rangle}(h_\lambda(y^1, \dots, y^M, \varepsilon) - \varepsilon x) \mathbf{P}_\xi(dx). \end{aligned} \quad (8)$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$g_\lambda(y^1, \dots, y^M, \varepsilon) = g_\lambda(y^1, \dots, y^M, 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\lambda}{\partial \varepsilon^2}(y^1, \dots, y^M, \theta \varepsilon) \varepsilon^2,$$

где $0 < \theta < 1$.

Остается заметить, что

$$\begin{aligned} \rho_\lambda(S_n) &= a_n g_\lambda(a_n^{-1} B_n^1, \dots, a_n^{-1} B_n^M, a_n^{-1} \sigma_n), \\ \rho_\lambda^f(S_n; F) &= a_n g_\lambda(a_n^{-1} B_n^1, \dots, a_n^{-1} B_n^M, 0), \\ \frac{\partial g_\lambda^2}{\partial \varepsilon^2}(b^1, \dots, b^M, 0) &= \frac{1}{\lambda} p_{\langle b, F \rangle}(q_\lambda(\langle b, F \rangle)). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть вероятностная мера μ на полуинтервале $(0, 1]$ такова, что

$$\int_{(0,1]} \lambda^{-1} \mu(d\lambda) < \infty,$$

функция

$$\psi_\mu(x) = \int_{(x,1]} \lambda^{-1} \mu(d\lambda), \quad x \in [0, 1],$$

непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, для всех y из некоторой окрестности U точки b , распределение случайной величины $\langle y, F \rangle$ имеет непрерывную плотность $p_{\langle y, F \rangle}$, отображение $(y, x) \mapsto p_{\langle y, F \rangle}(x)$ ограничено и непрерывно в $U \times \mathbf{R}$. Тогда

$$\rho_\mu(S_n) = \rho_\mu^f(S_n; F) - \frac{1}{2} \mathbf{E}(\psi \circ G_{\langle b, F \rangle})'(\langle b, F \rangle) a_n^{-1} \sigma_n^2 + o(a_n^{-1} \sigma_n^2), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $G_{\langle b, F \rangle}$ — функция распределения случайной величины $\langle b, F \rangle$.

Доказательство. Будем считать, что окрестность U такова, что если $y = (y^1, \dots, y^M) \in U$, то $y^1 \neq 0, \dots, y^M \neq 0$. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} g_\mu(y^1, \dots, y^M, \varepsilon) &= \rho_\mu(\langle y, F \rangle + \varepsilon \xi), \quad y = (y^1, \dots, y^M) \in U, \quad \varepsilon \in \mathbf{R}, \\ H(y^1, \dots, y^M, z, \varepsilon) &= \mathbf{P}(\langle y, F \rangle + \varepsilon \xi \leq z), \quad y = (y^1, \dots, y^M) \in U, \quad z \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Как было показано в ходе доказательства теоремы 3,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial \varepsilon^2}(y^1, \dots, y^M, \varepsilon) = -\mathbf{E} \xi \psi'_\mu(H(y^1, \dots, y^M, \langle y, F \rangle + \varepsilon \xi, \varepsilon)) \\ & \times \left(\frac{\partial H}{\partial z}(y^1, \dots, y^M, \langle y, F \rangle + \varepsilon \xi, \varepsilon) \xi + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}(y^1, \dots, y^M, \langle y, F \rangle + \varepsilon \xi, \varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $\partial^2 g_\mu / \partial \varepsilon^2$ непрерывна в $U \times \mathbf{R}$ и, следовательно, по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$g_\mu(y^1, \dots, y^M, \varepsilon) = g_\mu(y^1, \dots, y^M, 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial \varepsilon^2}(y^1, \dots, y^M, \theta \varepsilon) \varepsilon^2,$$

где $0 < \theta < 1$.

Остается заметить, что

$$\begin{aligned}\rho_\mu(S_n) &= a_n g_\mu(a_n^{-1} B_n^1, \dots, a_n^{-1} B_n^M, a_n^{-1} \sigma_n), \\ \rho_\mu^f(S_n; F) &= a_n g_\mu(a_n^{-1} B_n^1, \dots, a_n^{-1} B_n^M, 0), \\ \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial \varepsilon^2}(b^1, \dots, b^M, 0) &= -\mathbf{E}(\psi_\mu \circ G_{(b, F)})'(\langle b, F \rangle).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дороговцев А. Я. Элементы общей теории меры и интеграла. Киев: Головное изд-во издательского объединения «Выща школа», 1989, 152 с.
2. Черный А. С. Нахождение справедливых цен на основе когерентных мер риска. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, вып. 3, с. 504–540.
3. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Thinking coherently. — Risk, 1997, v. 10, № 11, p. 68–71.
4. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk. — Math. Finance, 1999, v. 9, № 3, p. 203–228.
5. Cherny A. S., Madan D. B. Coherent measurement of factor risks, <http://www.ssrn.com>.
6. Cherny A. S. Weighted V@R and its properties. — Finance Stoch., 2006, v. 10, № 2, p. 367–393.
7. Föllmer H., Schied A. Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time. Berlin: Walter de Gruyter, 2nd ed., 2004, 459 p.
8. Rau-Bredow H. Value-at-risk, expected shortfall and marginal risk contribution. — Risk Measures for the 21st Century. Ed. by G. Szegö. New York: Wiley, 2004, p. 61–68.
9. Schied A. Risk measures and robust optimization problems. — Stoch. Models, 2006, v. 22, № 4, p. 753–831.
10. Szegö G. On the (non)-acceptance of innovations. — Risk Measures for the 21st Century. Ed. by G. Szegö. New York: Wiley, 2004, p. 1–9.

Поступила в редакцию
15.VI.2008

Исправленный вариант
05.II.2009

© 2010 г.

НАГАЕВ С. В.*

ОБ УСЛОВИЯХ, ДОСТАТОЧНЫХ ДЛЯ СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОСТИ¹⁾

В статье даются новые достаточные условия субэкспоненциальности распределений, более общие, чем известные к настоящему времени.

Ключевые слова и фразы: длинный хвост, критерий Питмена, медленно меняющаяся функция, неотрицательная полуось, степенное убывание, субэкспоненциальные распределения.

* Институт математики им. С. Л. Соболева, пр-т Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev@math.nsc.ru, nagaevs@hotmail.com, nagaevs@academ.org

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00048-а).