Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, Об условиях, достаточных для субэкспоненциальности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 1, 176–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4184>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 18:00:12

где $0 < \theta < 1$.

Остается заметить, что

$$\begin{aligned}\rho_\mu(S_n) &= a_n g_\mu(a_n^{-1} B_n^1, \dots, a_n^{-1} B_n^M, a_n^{-1} \sigma_n), \\ \rho_\mu^f(S_n; F) &= a_n g_\mu(a_n^{-1} B_n^1, \dots, a_n^{-1} B_n^M, 0), \\ \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial \varepsilon^2}(b^1, \dots, b^M, 0) &= -\mathbf{E}(\psi_\mu \circ G_{(b, F)})'(\langle b, F \rangle).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дороговцев А. Я. Элементы общей теории меры и интеграла. Киев: Головное изд-во издательского объединения «Выща школа», 1989, 152 с.
2. Черный А. С. Нахождение справедливых цен на основе когерентных мер риска. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, вып. 3, с. 504–540.
3. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Thinking coherently. — Risk, 1997, v. 10, № 11, p. 68–71.
4. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk. — Math. Finance, 1999, v. 9, № 3, p. 203–228.
5. Cherny A. S., Madan D. B. Coherent measurement of factor risks, <http://www.ssrn.com>.
6. Cherny A. S. Weighted V@R and its properties. — Finance Stoch., 2006, v. 10, № 2, p. 367–393.
7. Föllmer H., Schied A. Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time. Berlin: Walter de Gruyter, 2nd ed., 2004, 459 p.
8. Rau-Bredow H. Value-at-risk, expected shortfall and marginal risk contribution. — Risk Measures for the 21st Century. Ed. by G. Szegö. New York: Wiley, 2004, p. 61–68.
9. Schied A. Risk measures and robust optimization problems. — Stoch. Models, 2006, v. 22, № 4, p. 753–831.
10. Szegö G. On the (non)-acceptance of innovations. — Risk Measures for the 21st Century. Ed. by G. Szegö. New York: Wiley, 2004, p. 1–9.

Поступила в редакцию
15.VI.2008

Исправленный вариант
05.II.2009

© 2010 г.

НАГАЕВ С. В.*

ОБ УСЛОВИЯХ, ДОСТАТОЧНЫХ ДЛЯ СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОСТИ¹⁾

В статье даются новые достаточные условия субэкспоненциальности распределений, более общие, чем известные к настоящему времени.

Ключевые слова и фразы: длинный хвост, критерий Питмена, медленно меняющаяся функция, неотрицательная полуось, степенное убывание, субэкспоненциальные распределения.

* Институт математики им. С. Л. Соболева, пр-т Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev@math.nsc.ru, nagaevs@hotmail.com, nagaevs@academ.org

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00048-а).

1. Введение. Формулировка результатов. Распределения, которые теперь принято называть субэкспоненциальными, были введены в 1964 г. В. П. Чистяковым [1]. Сам термин появился позднее, впервые, по-видимому, в монографии К. Атрея и П. Нея [2].

Напомним, что распределение F на $[0, \infty)$ называется субэкспоненциальным, если при $x \rightarrow \infty$

$$1 - F^{2*}(x) \sim 2(1 - F(x)). \quad (1)$$

Здесь и ниже в $a(x) \sim b(x)$ знак эквивалентности означает, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1.$$

Нетрудно видеть, что для любой функции распределения, сосредоточенной на неотрицательной полуоси,

$$1 - F^{2*}(x) = 1 - F(x) + \int_0^x (1 - F(x - y)) dF(y). \quad (2)$$

Отсюда следует оценка

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{2*}(x)}{1 - F(x)} \geq 2. \quad (3)$$

Согласно принятой терминологии, $F(x)$ имеет *длинный хвост*, если для некоторого l и, следовательно, для всех l выполнено условие

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x + l)}{1 - F(x)} = 1. \quad (4)$$

Если для некоторого $l > 0$

$$\frac{1 - F(x - l)}{1 - F(x)} > 1 + \varepsilon,$$

то вследствие (2)

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{2*}(x)}{1 - F(x)} > 1 + F(l) + (1 + \varepsilon)(1 - F(l)) = 2 + \varepsilon(1 - F(l)).$$

Заметим, что без потери общности можно считать, что $F(l) < 1$. Следовательно, условие (4) необходимо для того, чтобы распределение F было субэкспоненциальным. Однако оно не является достаточным. Чтобы обеспечить субэкспоненциальность, приходится накладывать дополнительные ограничения на F . Одним из возможных ограничений является условие

$$1 - F(bx) \leq c(b)(1 - F(x)), \quad (5)$$

где $0 < b < 1$ и $c(b) > 1$ — некоторые постоянные. Нетрудно видеть, что в этом случае

$$1 - F(x) \geq Kx^{-p}, \quad (6)$$

где K и p зависят от F .

Действительно, вследствие (5) выполнено неравенство $1 - F(x) \geq c^{-n}(b)(1 - F(xb^n))$.

Пусть $b^{-n} \leq x \leq b^{-n-1}$. Тогда существует $1 \leq y \leq b^{-1}$ такое, что при $x = y/b^n$

$$c^{-n}(b)(1 - F(y)) \leq 1 - F(x).$$

Выберем p так, чтобы $c(b)b^p = 1$. Тогда $c^{-n}(b) = b^{np} = (xy^{-1})^p$, и, следовательно,

$$1 - F(x) \geq (xy^{-1})^p(1 - F(b^{-1})) \geq (bx)^p(1 - F(b^{-1})),$$

т.е. выполняется (6) с

$$K = b^p(1 - F(b^{-1})), \quad p = -\frac{\ln c(b)}{\ln b}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $1 - F(b^{-1}) > 0$. Таким образом, при условии (5) функция $1 - F(x)$ убывает не быстрее, чем x^{-p} .

Субэкспоненциальность распределений, имеющих длинный хвост и удовлетворяющих условию (5), была впервые доказана в [3].

Обзор результатов по субэкспоненциальным распределениям можно найти в [4]–[6].

Ряд достаточных условий, допускающих более быстрое, чем степенное, убывание $1 - F(x)$, выводится в [7] (см. гл. 1, § 2). Наиболее простым из них является следующее условие:

$$1 - F(x) = e^{-g(x)+o(1)}, \quad (7)$$

где $g(x)$ непрерывна и кусочно дифференцируема и

$$\frac{xg'(x)}{g(x)} < \alpha < 1, \quad x > x_0 > 0. \quad (8)$$

Ограничение (8) в другом контексте впервые появилось в [8]. В несколько другой форме оно присутствует в работе [9]. Из (8) следует, что для любого $x > x_0$

$$g(x) < g(x_0) \left(\frac{x}{x_0} \right)^\alpha, \quad x > x_0. \quad (9)$$

В настоящей работе даются условия, обеспечивающие субэкспоненциальность как при условии (8), так и в случае, когда $1 - F(x)$ убывает быстрее, чем e^{-x^α} для α , сколько угодно близкого к 1. Основной результат нашего исследования формулируется следующим образом.

Теорема 1. Пусть $1 - F(x) = e^{-g(x)}$ и функция $q(x) := x^{-1}g(x)$ удовлетворяет условиям

$$q(y) - q(x) \geq v(y)y^{-1}, \quad (10)$$

если $x \geq 3y/2$, $y > y_0$, и

$$q(x) - q(y) < c_0 y^{-1}, \quad c_0 \geq 0, \quad (11)$$

если $y < x < 3y/2$, $y > y_0$, где $v(y)$ — неотрицательная неубывающая функция и

$$\int_{y_0}^{\infty} e^{-v(y)} dg(y) < \infty. \quad (12)$$

Если, кроме того, распределение F имеет длинный хвост, то оно является субэкспоненциальным.

Известно, что если две функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ эквивалентны на бесконечности, т.е. $1 - F_1(x) \sim 1 - F_2(x)$, то субэкспоненциальность одной из них влечет субэкспоненциальность другой. Поэтому имеет место следующий более общий, чем теорема 1, результат.

Теорема 2. Пусть

$$1 - F(x) = \exp\{-g(x) + r(x)\}, \quad (13)$$

где неубывающая функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (10)–(12) теоремы 1, $r(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Кроме того, предположим, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x+1) - g(x)) = 0. \quad (14)$$

Тогда распределение F является субэкспоненциальным.

Следствие 1. Пусть

$$1 - F(x) = \exp\{-g(x) + r(x)\}, \quad (15)$$

где $g(x)$ удовлетворяет условию

$$0 \leq g'(x) < \alpha \frac{g(x)}{x}, \quad x > x_0, \quad (16)$$

для некоторого $0 < \alpha < 1$, а $r(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Тогда распределение F является субэкспоненциальным.

З а м е ч а н и е 1. Результат, который формулируется в следствии 1, известен (см. [7, теорема 1.2.25]) и приводится здесь для иллюстрации теоремы 2.

Следствие 2. Пусть $1 - F(x) = e^{-g(x)}$, где

$$g(x) = x \exp \left\{ - \int_1^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\}, \quad x \geq 1, \quad (17)$$

причем $\varepsilon(u) > 0$ и удовлетворяет условиям: существует $0 < \eta \leq 1$ такое, что

$$\varepsilon(u) \geq \eta \varepsilon(x), \quad (18)$$

если $u \leq x \leq 3u/2$, и

$$\int_1^\infty \frac{\varepsilon(u)}{u} du = \infty. \quad (19)$$

Если, кроме того,

$$\int_0^\infty \exp \left\{ - \frac{\ln(3/2)}{2} \eta \varepsilon \left(\frac{3u}{2} \right) g(u) \right\} dg(u) < \infty, \quad (20)$$

то распределение F является субэкспоненциальным.

Если $\varepsilon(u) < cu^{-\delta}$, $0 < \delta < 1$, то условие (19) не выполняется. Для одновременного выполнения условий (19) и (20) нужно, чтобы функция $\varepsilon(u)$ убывала достаточно медленно, например, как $\ln^{-1} u$.

В п. 6 приводится пример распределения, для которого выполнено условие (19), а условие (20) нарушено. Функция $\varepsilon(x)$ в этом примере колеблется между $1/x$ и $1/\ln x$, и само распределение не является субэкспоненциальным.

Заметим, что в случае $1 - F(x) = \exp\{-xl(x)\}$, где $l(x)$ — медленно меняющаяся функция, при определенных условиях можно воспользоваться непосредственно теоремой 1, минуя следствие 2.

П р и м е р. Пусть

$$1 - F(x) = \exp \left\{ - \frac{x}{\ln_N x} \right\}, \quad (21)$$

где $\ln_N x = \ln \ln \dots \ln x$ есть N -я итерация $\ln x$. В данном случае $q(x) = 1/\ln_N x$. Нетрудно видеть, что

$$q'(x) = - \left(x \ln_N^2 x \cdot \prod_{k=1}^{N-1} \ln_k x \right)^{-1}. \quad (22)$$

Отсюда при $0 < 3y/2 < x$

$$q(x) - q(y) > \left(\ln_N^2(2y) \prod_{k=1}^{N-1} \ln_k(2y) \right)^{-1} \int_y^{3y/2} \frac{du}{u} = \ln \frac{3}{2} \cdot \left(\ln_N^2(2y) \prod_{k=1}^{N-1} \ln_k(2y) \right)^{-1}.$$

Таким образом, выполняется условие (10) теоремы 1 при $v(y) = y \ln(3/2) (\ln_N^2(2y) \times \prod_{k=1}^{N-1} \ln_k(2y))^{-1}$. Нетрудно проверить, что $v(y)$ удовлетворяет условию (12) теоремы 1. Поскольку $q(x)$ убывает, условие (11) также выполняется.

Далее,

$$g(x+1) - g(x) = (x+1)q(x+1) - xq(x) = x(q(x+1) - q(x)) + q(x+1).$$

Нетрудно показать, используя (22), что $q(x+1) - q(x) = o(1/x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Из двух последних соотношений следует, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x+1) - g(x)) = 0$. Следовательно, распределение, определяемое формулой (21), имеет длинный хвост. Таким образом, для этого распределения выполнены все условия теоремы 1. Значит, последнее является субэкспоненциальным.

На основании следствия 2 и только что рассмотренного примера можно сделать вывод, что для субэкспоненциальности важна не скорость убывания $l(x)$ в представлении $g(x) = xl(x)$, а правильность изменения $l(x)$. Об этом свидетельствует и пример, который приводится ниже в п. 6.

З а м е ч а н и е 2. Предположим, что распределение F абсолютно непрерывно. Э. Питмен [10] показал, что условие

$$\int_0^\infty \exp\{yg'(y) - g(y)\} dg(y) < \infty, \quad (23)$$

где $g(y) = -\ln(1 - F(y))$, достаточно для субэкспоненциальности, если $g'(y)$ не возрастает и $\lim_{y \rightarrow \infty} g'(y) = 0$. Применим к этому частному случаю теорему 1. Поскольку $g'(y)$ не возрастает, то

$$\begin{aligned} q(y) - q(x) &= \frac{g(y)}{y} - \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{y} \int_0^y g'(u) du - \frac{1}{x} \int_0^x g'(u) du \\ &= \frac{x-y}{xy} \int_0^y g'(u) du - \frac{1}{x} \int_y^x g'(u) du > \frac{x-y}{xy} g(y) - \frac{x-y}{x} g'(y) \\ &= \frac{x-y}{x} (g(y) - g'(y)y). \end{aligned}$$

Таким образом, при $x > 3y/2$

$$q(y) - q(x) > (3y)^{-1} (g(y) - g'(y)y),$$

т.е. выполнено условие (10) теоремы 1 с $v = 3^{-1}(g(y) - g'(y)y)$. Далее, в условиях Питмена

$$g(y) - yg'(y) = \int_y^\infty (g(x) - xg'(y)) dx > 0.$$

Следовательно, $q(x) < q(y)$ при $x > y$, т.е. выполняется условие (11) теоремы 1 с $c_0 = 0$. Поскольку $\lim_{y \rightarrow \infty} g'(y) = 0$, то $\lim_{y \rightarrow \infty} (g(y+1) - g(y)) = 0$. Это означает, что распределение F имеет длинный хвост.

В результате мы получаем достаточный признак субэкспоненциальности, более слабый, чем (23), а именно,

$$\int_0^\infty \exp\{3^{-1}(yg'(y) - g(y))\} dg(y) < \infty. \quad (24)$$

Таким образом, не удастся получить результат Питмена в качестве следствия из теоремы 1. Следует, однако, подчеркнуть, что в теореме 1 не предполагается, что распределение F абсолютно непрерывно.

Нетрудно видеть, что оба интеграла (23) и (24) конечны, если выполнено условие (16). Действительно, в этом случае

$$yg'(y) - g(y) = g(y) \left(\frac{yg'(y)}{g(y)} - 1 \right) < (\alpha - 1)g(y).$$

Однако из условия (16) не следует, что $g'(y)$ не возрастает. Поэтому критерий Питмена, вообще говоря, неприменим к распределениям, удовлетворяющим условию (16).

Примером функций $g(x)$, к которым одновременно применимы критерий Питмена и следствие 1, служат $\ln x$ и x^α , $0 < \alpha < 1$.

В [4, с. 430] отмечается, что критерию Питмена удовлетворяет функция $g(x) = x(\ln x)^b$, $b > 0$. Таким образом, распределения, к которым применим критерий Питмена, не обязательно удовлетворяют условию (16).

Положим $g(x) = \ln(1 - F(x))$. В [7] (см. теорему 1.2.25) доказывается, что если распределение F имеет длинный хвост и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{u \rightarrow 1} [g(t + uz(t)) - g(t)] < 1 \quad (25)$$

при $z(t) := t/g(t)$, то F является субэкспоненциальным. Мы получим, используя теорему 1, следующий более сильный результат.

Теорема 3. Пусть функция $F(x)$ имеет длинный хвост и существует y_0 такое, что для $y > y_0$

$$g\left(y + \frac{y}{g(y)}\right) - g(y) < \gamma < 1. \quad (26)$$

Тогда распределение F является субэкспоненциальным.

З а м е ч а н и е 3. В [7] доказывается, что из условия (8) следует условие (25). С другой стороны, при доказательстве теоремы 1.2.25 в [7] используется редукция к распределению, удовлетворяющему условию (8).

З а м е ч а н и е 4. Для распределений, удовлетворяющих условиям следствия 2, условие (26) не выполняется. Действительно, пусть выполнены условия следствия. Обозначим

$$l(x) = \exp \left\{ - \int_1^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\}.$$

Пусть $g(x) = xl(x)$. Тогда $x/g(x) = 1/l(x)$ и, следовательно,

$$\Delta(x) := g\left(x + \frac{x}{g(x)}\right) - g(x) = \left(x + \frac{1}{l(x)}\right)l\left(x + \frac{1}{l(x)}\right) - xl(x).$$

Далее,

$$l\left(x + \frac{1}{l(x)}\right) - l(x) = l(x) \left(\exp \left\{ - \int_x^{x+1/l(x)} \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\} - 1 \right) = O\left(\frac{\varepsilon(x)}{x}\right).$$

Поэтому при $x \rightarrow \infty$

$$\Delta(x) = 1 + O\left(x \left(l\left(x + \frac{1}{l(x)}\right) - l(x) \right)\right) = O(\varepsilon(x)).$$

Таким образом, $\limsup_{x \rightarrow \infty} (g(x + x/g(x)) - g(x)) = 1$, т.е. условие (26) не выполнено.

2. Доказательство теоремы 1. Мы воспользуемся тождеством

$$1 - F^{2*}(x) = 2 \int_0^{x/2} (1 - F(x-t)) dF(t) + \left(1 - F\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

(см., например, [3]). Отсюда следует, что

$$\frac{1 - F^{2*}(x)}{1 - F(x)} = \int_0^{x/2} \frac{1 - F(x-t)}{1 - F(x)} dF(t) + \frac{(1 - F(x/2))^2}{1 - F(x)}. \quad (27)$$

По определению $g(x)$

$$\int_0^{x/2} \frac{1 - F(x-y)}{1 - F(x)} dF(y) = \int_0^{x/2} \exp\{g(x) - g(x-y) - g(y)\} dg(y). \quad (28)$$

Далее, заменяя $g(x)$ на $q(x)x$, имеем

$$\begin{aligned} g(x) - g(x-y) - g(y) &= xq(x) - (x-y)q(x-y) - yq(y) \\ &= x(q(x) - q(x-y)) + y(q(x-y) - q(y)). \end{aligned} \quad (29)$$

Пусть $y_0 < A < x/3$. Очевидно, что $x - y \geq 2y$ при $y \leq x/3$. Поэтому вследствие (10)

$$q(y) - q(x - y) > v(y)y^{-1}. \quad (30)$$

С другой стороны, $x < 3(x - y)/2$ при $y < x/3$ и, кроме того, $x - y > y_0$. Поэтому в силу (11)

$$q(x) - q(x - y) < \frac{c_0}{x - y} \leq \frac{3c_0}{2x}. \quad (31)$$

Из (29)–(31) следует, что

$$\int_A^{x/3} \exp\{xq(x) - (x - y)q(x - y) - yq(y)\} dg(y) < c_1 \int_A^\infty \exp\{-v(y)\} dg(y),$$

где $c_1 = \exp\{3c_0/2\}$. Отсюда вследствие (12)

$$\int_A^{x/3} \frac{1 - F(x - y)}{1 - F(x)} dF(y) < \varepsilon$$

равномерно по x , лишь только $A > A(\varepsilon)$.

Нетрудно видеть, что при любом фиксированном A

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{1 - F(x - y)}{1 - F(x)} dF(y) = F(A).$$

Из двух последних соотношений следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{x/3} \frac{1 - F(x - y)}{1 - F(x)} dF(y) = 1. \quad (32)$$

Займемся теперь интегралом

$$I(x) := \int_{x/3}^{x/2} \frac{1 - F(x - y)}{1 - F(x)} dF(y).$$

Вследствие (28) и (29)

$$I(x) = \int_{x/3}^{x/2} \exp\{x(q(x) - q(x - y)) + y(q(x - y) - q(y))\} dg(y). \quad (33)$$

Нетрудно видеть, что $x \geq 3(x - y)/2$ и $x - y \geq y$ при $x/3 \leq y \leq x/2$. Поэтому, в силу (10),

$$q(x - y) - q(x) > v(x - y)(x - y)^{-1} \geq v(y)(x - y)^{-1}. \quad (34)$$

Далее, $y \leq x - y \leq 2y$, если $x/3 \leq y \leq x/2$. Отсюда, ввиду (10) и (11)

$$q(x - y) - q(y) < \begin{cases} c_0 y^{-1}, & \text{если } x - y < \frac{3}{2}y, \\ 0, & \text{если } \frac{3}{2}y \leq x - y \leq 2y. \end{cases} \quad (35)$$

Собирая теперь оценки (33)–(35), мы заключаем, что

$$I(x) < e^{c_0} \int_{x/3}^{x/2} \exp\{-v(y)\} dg(y).$$

Отсюда, в силу (12),

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I(x) = 0. \quad (36)$$

Наконец, ввиду (10)

$$g(x) - 2g(2^{-1}x) = x(q(x) - q(2^{-1}x)) \leq -2v(x),$$

где $v(x)$ удовлетворяет условию (12). Заметим, что при этом условии $v(x) \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - F(x/2))^2}{1 - F(x)} = 0. \quad (37)$$

Комбинируя (27), (32), (36) и (37), мы получаем желаемый результат.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть функция распределения $G(x)$ определяется равенством $1 - G(x) = e^{-g(x)}$. Для $G(x)$, очевидно, выполняются условия (10)–(12) теоремы 1.

Поскольку

$$\frac{1 - G(x+1)}{1 - G(x)} = \exp\{g(x) - g(x+1)\},$$

то вследствие (14) распределение G имеет длинный хвост. Таким образом, оно удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и, следовательно, является субэкспоненциальным.

С другой стороны, в силу (13) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - F(x))/(1 - G(x)) = 1$. Поэтому распределение $F(x)$ также субэкспоненциально, что и требовалось доказать.

4. Доказательство следствия 1. Мы сохраним обозначение $q(x) = x^{-1}g(x)$. Очевидно, что

$$q'(x) = x^{-1}(g'(x) - x^{-1}g(x)) \leq (\alpha - 1)x^{-2}g(x) \leq 0, \quad x > x_0.$$

Таким образом, $q(x)$ не возрастает при $x > x_0$. Это означает, что в рассматриваемом случае выполнено условие (11) с $c_0 = 0$, $y_0 = x_0$. По определению $q(x)$

$$q(y) - q(x) = \frac{g(y)}{y} \left(1 - \frac{g(x)}{g(y)} \frac{y}{x}\right).$$

Нетрудно видеть, что при $x > y > x_0$

$$\frac{g(x)}{g(y)} \leq \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha. \quad (38)$$

Следовательно, при $0 < 3y/2 \leq x$

$$\frac{g(x)}{g(y)} \frac{y}{x} \leq \left(\frac{y}{x}\right)^{1-\alpha} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{1-\alpha}.$$

В результате мы получаем для этих значений y

$$q(y) - q(x) > c(\alpha)g(y)y^{-1},$$

где $c(\alpha) = 1 - (2/3)^{1-\alpha}$. Таким образом, выполняется условие (10) с $v(y) = c(\alpha)g(y)$, $y_0 = x_0$. Очевидно, что

$$\int_{x_0}^{\infty} \exp\{-c(\alpha)g(y)\} dg(y) = \frac{1}{c(\alpha)} \int_{x_0}^{\infty} d \exp\{-c(\alpha)g(y)\} < \infty.$$

Это означает, что выполнено условие (12) с $v(y) = c(\alpha)g(y)$.

Очевидно, что

$$g(x) - g(x-1) = g(x-1) \left(\frac{g(x)}{g(x-1)} - 1 \right).$$

Вследствие (38) $g(x)/g(x-1) < 1 + \alpha/(x-1) + O(1/x^2)$. С другой стороны, ввиду (38) $g(x-1) < g(x_0)((x-1)/x_0)^\alpha$. В результате мы получаем, что $g(x) - g(x-1) = O(x^{\alpha-1})$ при $x \rightarrow \infty$, т.е. выполнено условие (14).

Итак, мы показали, что в рассматриваемом случае выполнены все условия теоремы 2. Следовательно, распределение F является субэкспоненциальным.

5. Доказательство следствия 2. В данном случае

$$q(y) - q(x) = q(y) \left(1 - \exp \left\{ \int_y^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\} \right) \geq q(y) \left(1 - \exp \left\{ \int_y^{3y/2} \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\} \right),$$

если $3y/2 \leq x$. Вследствие (18)

$$\int_y^{3y/2} \varepsilon(u)u^{-1} du \geq \eta \varepsilon \left(\frac{3y}{2} \right) \ln \left(\frac{3}{2} \right).$$

Следовательно, при достаточно больших $y \leq 2x/3$

$$q(y) - q(x) > \frac{\ln(3/2)}{2} \eta \varepsilon\left(\frac{3y}{2}\right) q(y). \quad (39)$$

В силу (20) это означает, что выполнены условия (10) и (12) теоремы 1 с $v(y) = 2^{-1} \ln(3/2) \eta \varepsilon(3y/2) g(y)$. Условие (11) выполняется автоматически, поскольку $q(x)$ убывает. Очевидно, что

$$\begin{aligned} g(x) - g(x+1) &= g(x) \left(1 - \frac{x+1}{x} \exp \left\{ - \int_x^{x+1} \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\} \right) \\ &= g(x) \left(1 - \exp \left\{ - \int_x^{x+1} \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует соотношение $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x+1) - g(x)) = 0$, поскольку $\int_x^{x+1} \varepsilon(u) u^{-1} du = o(x^{-1})$ и $g(x)x^{-1} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\frac{1 - F(x+1)}{1 - F(x)} = \exp\{g(x+1) - g(x)\} \rightarrow 1$$

при $x \rightarrow \infty$, т.е. F имеет длинный хвост.

Мы показали, что для F выполнены все условия теоремы 1. Следовательно, оно является субэкспоненциальным.

6. Пример, иллюстрирующий независимость условий (19) и (20) в следствии 1. Определим последовательность x_n рекуррентным соотношением $x_{n+1} = e^{x_n}$. Положим в представлении (17) $\varepsilon(u) = x_n^{-1}$, $x_n \leq u < x_{n+1}$. Нетрудно видеть, что в данном случае распределение F , определяемое равенством (17), имеет длинный хвост. Далее,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\varepsilon(u)}{u} du = \frac{1}{x_n} \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\ln x_n}{x_n} \rightarrow 1$$

при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $\varepsilon(u)$ удовлетворяет условию (19).

Далее,

$$\begin{aligned} &\int_{x_n}^{x_{n+1}} \exp \left\{ - \frac{\ln(3/2)}{2} g(u) \varepsilon(u) \right\} dg(u) \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \exp \left\{ - \frac{\ln(3/2)}{2x_n} g(u) \right\} dg(u) = \int_{g(x_n)}^{g(x_{n+1})} \exp \left\{ - \frac{\ln(3/2)}{2x_n} v \right\} dv \\ &\sim \frac{2x_n}{\ln(3/2)} \exp \left\{ - \frac{\ln(3/2)}{2} \frac{g(x_n)}{x_n} \right\} \sim \frac{2x_n}{\ln(3/2)}. \end{aligned}$$

Мы использовали здесь соотношение $x_n^{-1} g(x_n) = o(1)$. Таким образом,

$$\int_0^\infty \exp \left\{ - \frac{\ln(3/2)}{2} g(u) \varepsilon(u) \right\} dg(u) = \infty,$$

Поскольку $\varepsilon(u)$ убывает, откуда следует, что

$$\int_0^\infty \exp \left\{ - \frac{\ln(3/2)}{2} \eta \varepsilon\left(\frac{3u}{2}\right) g(u) \right\} dg(u) = \infty,$$

т.е. нарушается условие (20). Это означает, что условие (20), вообще говоря, не следует из условия (19).

Очевидно, $2g(x_n) - g(2x_n) = 2x_n(l(x_n) - l(2x_n))$, где $l(x) = \exp\{\int_1^x u^{-1} \varepsilon(u) du\}$. Далее, $l(x_n) - l(2x_n) = l(x_n)(1 - l(2x_n)/l(x_n))$. Нетрудно видеть, что

$$1 - \frac{l(2x_n)}{l(x_n)} = O\left(\int_{x_n}^{2x_n} \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right) = O\left(\frac{1}{x_n}\right).$$

В результате мы получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (2g(x_n) - g(2x_n)) = 0$. Другими словами,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - F(x_n))^2}{1 - F(2x_n)} = 1.$$

Это означает, ввиду (28), что распределение F не является субэкспоненциальным.

7. Доказательство теоремы 3. Предварительно мы докажем несколько лемм.

Лемма 1. Если выполнено условие (26), то для любого $y > y_0$

$$q\left(y + \frac{y}{g(y)}\right) < q(y), \quad (40)$$

где $q(y) = y^{-1}g(y)$.

Доказательство. Вследствие (26) для $y > y_0$ выполнено неравенство $y^{-1}g(y + y/g(y)) - g(y)/y < \gamma/y$. Следовательно,

$$y^{-1}g\left(y + \frac{y}{g(y)}\right) < \frac{g(y)}{y} \left(1 + \frac{\gamma}{g(y)}\right).$$

Деля обе части последнего неравенства на $1 + 1/g(y)$, имеем

$$y^{-1} \left(1 + \frac{1}{g(y)}\right)^{-1} g\left(y + \frac{y}{g(y)}\right) < \frac{g(y)}{y} \left(1 + \frac{1}{g(y)}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\gamma}{g(y)}\right) < \frac{g(y)}{y},$$

что и требовалось доказать.

Для любого $y > y_0$ определим последовательность x_k равенствами

$$x_0 = y, \quad x_{k+1} = x_k + \frac{x_k}{g(x_k)}.$$

Лемма 2. Пусть выполнено условие (26). Тогда

$$q(y) - q(x_k) > \frac{x_k - y}{x_k} (1 - \gamma)q(y) > 0. \quad (41)$$

Доказательство. Вследствие (26) $g(x_k) - g(x_{k-1}) < \gamma$. Отсюда следует, что $g(x_k) - g(y) < k\gamma$. По определению $q(y)$ это означает, что

$$y(q(x) - q(y)) < k\gamma - (x - y)q(y). \quad (42)$$

В силу леммы 1

$$x_k - y = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_j}{g(x_j)} > \frac{y}{g(y)} k, \quad (43)$$

т.е. $k > (x_k - y)q(y)$. Подставляя эту оценку в (42), мы получаем желаемый результат.

Лемма 3. Пусть выполнено условие (26). Тогда для любых $y_0 < y < x$ таких, что $x - y \leq g(y)/y$,

$$q(x) - q(y) < \frac{\gamma}{x}. \quad (44)$$

Доказательство. Заметим, что в силу (26) $g(x) - g(y) < \gamma$ при $0 < x - y < g(y)/y$. Следовательно, $xq(x) - yq(y) < \gamma$, т.е. $x(q(x) - q(y)) < \gamma - (x - y)q(y) < \gamma$, что эквивалентно утверждению леммы.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 3. В силу (43) $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$. Пусть $x_k < x < x_{k+1}$. Используя неравенства (41) и (44), имеем

$$q(y) - q(x) = q(y) - q(x_k) - q(x) + q(x_k) > \frac{x_k - y}{x_k y} (1 - \gamma)g(y) - \frac{\gamma}{x_k}. \quad (45)$$

Пусть

$$x_k > \frac{6}{5} y. \quad (46)$$

Тогда $(x_k - y)/x_k = 1 - y/x_k > 1/6$. Следовательно,

$$q(y) - q(x) > \frac{1-\gamma}{6} \frac{g(y)}{y} - \frac{\gamma}{x_k}. \quad (47)$$

Заметим, что

$$1 < \frac{x_{k+1}}{x_k} < 1 + \frac{1}{g(y)}. \quad (48)$$

Поэтому x_k удовлетворяет (46), если $x > 3y/2$ и y достаточно велико.

Следовательно, при достаточно больших y

$$\frac{1-\gamma}{6} \frac{g(y)}{y} - \frac{\gamma}{x_k} > \frac{1-\gamma}{8} \frac{g(y)}{y}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (47), мы убеждаемся, что выполняется условие (10) с $v(y) = 8^{-1}(1-\gamma)g(y)$. Условие (12) в данном случае, очевидно, выполняется. Остается проверить условие (11). Пусть $x_k < x < x_{k+1}$. Тогда ввиду (41) и (44)

$$q(x) - q(y) = q(x_k) - q(y) + q(x) - q(x_k) \leq \frac{\gamma}{x_k} < \frac{\gamma}{y}, \quad (49)$$

т.е. выполняется условие (11) с $c_0 = \gamma$. Итак, теорема 3 доказана в случае $x_k < x < x_{k+1}$. Если $x = x_k$, то доказательство упрощается, так как мы вправе использовать вместо (45) и (49) более простую оценку (41).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чистяков В. П. Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, в. 4, с. 710–718.
2. Athreya K. B., Ney P. E. Branching Processes. New York–Heidelberg: Springer, 1972, 287 p.
3. Goldie C. M. Subexponential distributions and dominated-variation tails. — J. Appl. Probab., 1978, v. 15, p. 440–442.
4. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987, 491 p.
5. Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Berlin: Springer, 1997, 645 p.
6. Goldie C. M., Klüppelberg C. Subexponential distributions. — A Practical Guide to Heavy Tails (Santa Barbara, 1995). Ed. by R. J. Alder, R. E. Feldman, and M. S. Taqqu. Boston: Birkhäuser, 1998, p. 435–459.
7. Borovkov A. A., Borovkov K. A. Asymptotic Analysis of Random Walks: Heavy-Tailed Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008, 625 p.
8. Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 231–254.
9. Нагаев А. В. Об одном свойстве сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 2, с. 335–346.
10. Pitman E. J. G. Subexponential distribution functions. — J. Austral. Math. Soc. Ser. A, v. 29, № 3, p. 337–347.

Поступила в редакцию
02.IX.2009