Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Броуновский прыжок в высоту, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 2, 209–225

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 08:38:52

© 2010 г.

АФАНАСЬЕВ В. И.*

БРОУНОВСКИЙ ПРЫЖОК В ВЫСОТУ¹⁾

Рассмотрено остановленное (при попадании на уровень $(-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$) броуновское движение при условии, что уровень 1 достигается ранее уровня $(-\varepsilon)$. Доказана сходимости этого процесса по распределению в $C[0, +\infty)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторому случайному процессу, который и назван броуновским прыжком в высоту. Показано, что этот процесс совпадает по распределению с участком броуновской траектории между такими ее двумя последовательными нулями, что момент первого достижения уровня 1 содержится между ними. Показано, что именно броуновский прыжок в высоту является предельным процессом в принципе инвариантности для критического ветвящегося процесса в случайной среде, достигающего высокого уровня. Найдены конечномерные распределения броуновского прыжка в высоту и распределения различных его функционалов.

Ключевые слова и фразы: броуновское движение, условные броуновские движения, броуновская извилина, броуновская экскурсия, ветвящийся процесс в случайной среде, ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, условные принципы инвариантности.

В предельных теоремах для остановленных случайных блужданий и ветвящихся процессов в случайной среде, рассматриваемых при некоторых условиях на время их вырождения, большую роль играют такие хорошо известные процессы, как *броуновская извилина* и *броуновская экскурсия*.

Каждый из этих процессов тесно связан с *броуновским движением*. С одной стороны, их траектории подобны некоторым участкам траектории броуновского движения, а с другой стороны, оба этих процесса являются *условными броуновскими движениями*, т.е. их можно рассматривать в качестве предельных процессов в некоторых условных функциональных предельных теоремах для броуновского движения.

В работах автора [1]–[3] критический ветвящийся процесс в случайной среде (а также остановленное случайное блуждание с нулевым сносом) рассматривается при условии достижения им высокого уровня

*Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: viafan@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00078) и программы «Математическая теория управления» Президиума РАН.

или, другими словами, при условии, что максимум этого процесса за все время его существования становится больше x , $x \rightarrow +\infty$. При этом доказаны предельные теоремы для продолжительности жизни процесса и времени достижения уровня x (см. [1]), времени пребывания выше (или ниже) этого уровня (см. [2]), а также принцип инвариантности для самого процесса, причем распределение предельного процесса описано двумя способами: через конечномерные распределения и с помощью распределения броуновской экскурсии (см. [3]).

Целью настоящей работы является характеристика указанного предельного процесса через броуновское движение.

Рассмотрим стандартное броуновское движение $W = \{W(t), t \geq 0\}$. Пусть τ_x — момент первого достижения состояния x для броуновского движения W :

$$\tau_x = \inf\{t > 0: W(t) = x\}.$$

Введем два момента достижения состояния 0 броуновским движением W . Один из них, $\tau_0^{(1)}$, предшествует моменту τ_1 , а другой, $\tau_0^{(2)}$, следует за этим моментом:

$$\tau_0^{(1)} = \sup\{t \in [0, \tau_1]: W(t) = 0\}, \quad \tau_0^{(2)} = \inf\{t > \tau_1: W(t) = 0\}.$$

Положим

$$W_0^\uparrow(t) = W((\tau_0^{(1)} + t) \wedge \tau_0^{(2)}), \quad t \geq 0.$$

Участок броуновской траектории между моментами $\tau_0^{(1)}$ и $\tau_0^{(2)}$ напоминает прыжок в высоту на одну единицу, поэтому процесс $W_0^\uparrow = \{W_0^\uparrow(t), t \geq 0\}$ предлагается назвать *броуновским прыжком в высоту*.

Рассмотрим броуновскую извилину $W^+ = \{W^+(t), t \geq 0\}$ (причем при $t \geq 1$ процесс $W^+(t) - W^+(1)$ является стандартным броуновским движением, не зависящим от процесса $\{W^+(t), t \in [0, 1]\}$) и броуновскую экскурсию $W_0^+ = \{W_0^+(t), t \geq 0\}$ (причем $W_0^+(t) = 0$ при $t \geq 1$). Положим

$$\tau = \inf\{t > 1: W^+(t) = 0\}.$$

Назовем *остановленной броуновской извилиной* случайный процесс $\widehat{W}^+ = \{\widehat{W}^+(t), t \geq 0\}$, где

$$\widehat{W}^+(t) = W^+(t \wedge \tau), \quad t \geq 0.$$

Известно (см. [3, лемма 1]), как распределение процесса $\widehat{W}^+$ в пространстве $C[0, +\infty)$ выражается через распределение броуновской экскурсии:

$$\widehat{W}^+ \stackrel{d}{=} \left\{ \frac{W_0^+(\alpha^2 t)}{\alpha}, t \geq 0 \right\}, \quad (1)$$

где α — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ и не зависящая от процесса W_0^+ .

Положим

$$h^+ = \sup_{t \geq 0} \widehat{W}^+(t), \quad h_0^+ = \sup_{t \geq 0} W_0^+(t).$$

Для каждого $v \in (0, +\infty)$ введем случайный процесс Z_v :

$$Z_v(t) = \frac{W_0^+(v^2 t)}{v}, \quad t \geq 0.$$

А теперь введем вспомогательный случайный процесс с непрерывными траекториями $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$, распределение которого задается формулой

$$\mathbf{P}(Y \in A) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(Z_v \in A, h_0^+ > v) dv \quad (2)$$

для любого борелевского множества A пространства $C[0, +\infty)$.

Заметим, что именно этот процесс является предельным в упомянутом принципе инвариантности для критического ветвящегося процесса в случайной среде, рассматриваемого при условии достижения им высокого уровня (см. [3, теорема 1]).

Положим при $t \geq 0$

$$L(t) = \inf_{s \in [0, t]} W(s).$$

Введем при $\varepsilon > 0$ *остановленное броуновское движение* $W^{(\varepsilon)} = \{W^{(\varepsilon)}(t), t \geq 0\}$:

$$W^{(\varepsilon)}(t) = W(t \wedge \tau_{-\varepsilon}), \quad t \geq 0.$$

Известно (см. [4, теорема 2.1]), что броуновская извилина является условным броуновским движением: при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\{W \mid L(1) > -\varepsilon\} \xrightarrow{D} W^+. \quad (3)$$

Здесь символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $C[0, +\infty)$ с σ -алгеброй борелевских множеств относительно топологии равномерной сходимости.

Аналогично соотношению (3) нетрудно показать, что условное остановленное броуновское движение сходится по распределению при $\varepsilon \rightarrow 0$ к остановленной броуновской извилине:

$$\{W^{(\varepsilon)} \mid L(1) > -\varepsilon\} \xrightarrow{D} \widehat{W}^+. \quad (4)$$

Кроме того, в соотношении (4) можно заменить абсолютную временную шкалу на относительную: при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\{W^{(\varepsilon)}(t\tau_{-\varepsilon}), t \geq 0 \mid L(1) > -\varepsilon\} \xrightarrow{D} \{\widehat{W}^+(t\tau), t \geq 0\}, \quad (5)$$

причем два последних соотношения можно объединить в одно, рассматривая совместно оба случайных процесса, представленные в левых частях, и оба случайных процесса, представленные в правых частях.

Следующий результат показывает, что случайный процесс Y является условным остановленным броуновским движением.

Теорема 1. При $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\{W^{(\varepsilon)} \mid \tau_1 < \tau_{-\varepsilon}\} \xrightarrow{D} Y.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные числа $m \in \mathbf{N}$, $t_1, \dots, t_m \in (0, +\infty)$ ($t_1 < \dots < t_m$) и $a_1, \dots, a_m \in [0, +\infty)$. Сначала покажем, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Y(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t_m}} \mathbf{P}\left(W^+\left(\frac{t_i}{t_m}\right) > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; h^+ > \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Действительно, в силу соотношения (1)

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(W^+\left(\frac{t_i}{t_m}\right) > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; h^+ > \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\widehat{W}^+\left(\frac{t_i}{t_m}\right) > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; \sup_{t \geq 0} \widehat{W}^+(t) > \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{W_0^+(\alpha^2 t_i/t_m)}{\alpha} > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; \sup_{t \geq 0} \frac{W_0^+(\alpha^2 t)}{\alpha} > \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right) \\ &= \int_0^1 \mathbf{P}\left(\frac{W_0^+(v^2 t_i/t_m)}{v} > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; \sup_{t \geq 0} \frac{h_0^+}{v} > \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right) dv \\ &= \sqrt{t_m} \int_0^{1/\sqrt{t_m}} \mathbf{P}\left(\frac{W_0^+(v^2 t_i)}{v} > a_i, i = 1, \dots, m; \sup_{t \geq 0} h_0^+ > v\right) dv \\ &= \sqrt{t_m} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{W_0^+(v^2 t_i)}{v} > a_i, i = 1, \dots, m; \sup_{t \geq 0} h_0^+ > v\right) dv \end{aligned}$$

(последнее равенство объясняется тем, что $W_0^+(v^2 t_m) = 0$ при $v > 1/\sqrt{t_m}$). А в силу соотношения (2)

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Y(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{W_0^+(v^2 t_i)}{v} > a_i, i = 1, \dots, m; \sup_{t \geq 0} h_0^+ > v\right) dv. \end{aligned}$$

Из этих двух утверждений вытекает требуемое соотношение (6).

Далее,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(W^{(\varepsilon)}(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m \mid \tau_1 < \tau_{-\varepsilon}) \\ &= \mathbf{P}(W(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m; \tau_{-\varepsilon} > t_m \mid \tau_1 < \tau_{-\varepsilon}) \\ &= \mathbf{P}(W(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m; \tau_1 < \tau_{-\varepsilon} \mid \tau_{-\varepsilon} > t_m) \frac{\mathbf{P}(\tau_{-\varepsilon} > t_m)}{\mathbf{P}(\tau_1 < \tau_{-\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (7)$$

Известно (см. [5, § 11] и [6, гл. 14, § 2]), что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}(\tau_{-\varepsilon} > t_m) = \mathbf{P}(L(t_m) > -\varepsilon) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t_m}} \varepsilon$$

и $\mathbf{P}(\tau_1 < \tau_{-\varepsilon}) = \varepsilon/(1 + \varepsilon)$, поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(\tau_{-\varepsilon} > t_m)}{\mathbf{P}(\tau_1 < \tau_{-\varepsilon})} = \sqrt{\frac{2}{\pi t_m}}. \quad (8)$$

Далее, по свойству автомодельности броуновского движения

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(W(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m; \tau_1 < \tau_{-\varepsilon} \mid \tau_{-\varepsilon} > t_m) \\ &= \mathbf{P}\left(W\left(\frac{t_i}{t_m}\right) > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; \tau_{1/\sqrt{t_m}} < \tau_{-\varepsilon/\sqrt{t_m}} \mid \tau_{-\varepsilon/\sqrt{t_m}} > 1\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку $\{\tau_{-\varepsilon/\sqrt{t_m}} > 1\} = \{L(1) > -\varepsilon/\sqrt{t_m}\}$ и

$$\{\tau_{1/\sqrt{t_m}} < \tau_{-\varepsilon/\sqrt{t_m}}\} = \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} W(t\tau_{-\varepsilon/\sqrt{t_m}}) \geq \frac{1}{\sqrt{t_m}} \right\},$$

то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(W\left(\frac{t_i}{t_m}\right) > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; \tau_{1/\sqrt{t_m}} < \tau_{-\varepsilon/\sqrt{t_m}} \mid \tau_{-\varepsilon/\sqrt{t_m}} > 1\right) \\ &= \mathbf{P}\left(W^{(\varepsilon/\sqrt{t_m})}\left(\frac{t_i}{t_m}\right) > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; \right. \\ & \quad \left. \sup_{t \in [0,1]} W^{(\varepsilon/\sqrt{t_m})}(t\tau_{-\varepsilon/\sqrt{t_m}}) \geq \frac{1}{\sqrt{t_m}} \mid L(1) > \frac{-\varepsilon}{\sqrt{t_m}}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Предел правой части соотношения (10) при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен в силу утверждений (4) и (5)

$$\mathbf{P}\left(\widehat{W}^+\left(\frac{t_i}{t_m}\right) > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; \sup_{t \in [0,1]} \widehat{W}^+(t\tau) \geq \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right).$$

Следовательно, ввиду соотношений (7)–(10)

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(W^{(\varepsilon)}(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m \mid \tau_1 < \tau_{-\varepsilon}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t_m}} \mathbf{P}\left(\widehat{W}^+\left(\frac{t_i}{t_m}\right) > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; \sup_{t \in [0,1]} \widehat{W}^+(t\tau) \geq \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right), \end{aligned}$$

откуда, учитывая соотношение (6) и равенство $\sup_{t \in [0,1]} \widehat{W}^+(t\tau) = h^+$, получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(W^{(\varepsilon)}(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m \mid \tau_1 < \tau_{-\varepsilon}) = \mathbf{P}(Y(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m). \quad (11)$$

Итак, сходимость конечномерных распределений установлена.

Введем для $x \in D[0, +\infty)$ стандартный модуль непрерывности: при положительных δ, u

$$w_x(\delta; u) = \sup |x(t) - x(s)|,$$

где супремум берется по (s, t) таким, что $s, t \in [0, u]$, $|t - s| \leq \delta$. Установим теперь справедливость следующего условия на этот модуль непрерывности: для любых положительных u, ε_0

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(w_{W^{(\varepsilon)}}(\delta; u) \geq \varepsilon_0 \mid \tau_1 < \tau_{-\varepsilon}) = 0. \quad (12)$$

Случайная величина τ_1 является собственной и положительной, поэтому при фиксированном ε

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbf{P}(t < \tau_1 < \tau_{-\varepsilon})}{\mathbf{P}(\tau_1 < \tau_{-\varepsilon})} = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \downarrow 0} \mathbf{P}(w_{W^{(\varepsilon)}}(\delta; u) \geq \varepsilon_0, \tau_1 \leq t \mid \tau_1 < \tau_{-\varepsilon}) = 0.$$

Таким образом, для справедливости соотношения (12) достаточно показать, что при произвольном фиксированном $t > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(w_{W^{(\varepsilon)}}(\delta; u) \geq \varepsilon_0, \tau_1 > t \mid \tau_1 < \tau_{-\varepsilon}) = 0.$$

Из определения $W^{(\varepsilon)}$ следует, что $w_{W^{(\varepsilon)}}(\delta; u) \leq w_W(\delta; u)$, а из неравенств $\tau_1 > t$ и $\tau_1 < \tau_{-\varepsilon}$ вытекает, что $\tau_{-\varepsilon} > t$, поэтому достаточно установить, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(w_W(\delta; u) \geq \varepsilon_0, \tau_{-\varepsilon} > t \mid \tau_1 < \tau_{-\varepsilon}) = 0$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}(w_W(\delta; u) \geq \varepsilon_0, \tau_1 < \tau_{-\varepsilon} \mid \tau_{-\varepsilon} > t) \frac{\mathbf{P}(\tau_{-\varepsilon} > t)}{\mathbf{P}(\tau_1 < \tau_{-\varepsilon})} = 0. \quad (13)$$

По свойству автомодельности броуновского движения

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(w_W(\delta; u) \geq \varepsilon_0, \tau_1 < \tau_{-\varepsilon} \mid \tau_{-\varepsilon} > t) \\ &= \mathbf{P}\left(w_W\left(\frac{\delta}{t}; \frac{u}{t}\right) \geq \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{t}}, \tau_{1/\sqrt{t}} < \tau_{-\varepsilon/\sqrt{t}} \mid \tau_{-\varepsilon/\sqrt{t}} > 1\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(w_W\left(\frac{\delta}{t}; \frac{u}{t}\right) \geq \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{t}} \mid L(1) > \frac{-\varepsilon}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Но повторный предел правой части сначала при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем при $\delta \rightarrow 0$ в силу соотношения (3) равен нулю, откуда, учитывая соотношение (8), получаем (13) и, следовательно, требуемое соотношение (12).

Из сходимости конечномерных распределений и соотношения (12) следует (см. [5, § 8]) утверждение доказываемой теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Точно таким же образом можно доказать следующий вариант теоремы 1: при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\{W^{(\varepsilon)} \mid \tau_{1-\varepsilon} < \tau_{-\varepsilon}\} \xrightarrow{D} Y.$$

Теорема 2. *Распределения случайных процессов (с непрерывными траекториями) $W_0^\uparrow$ и Y в пространстве $C[0, +\infty)$ совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f — ограниченная непрерывная функция m числовых переменных ($m \in \mathbf{N}$). Достаточно показать, что для произвольных чисел $t_1, \dots, t_m \in (0, +\infty)$ ($t_1 < \dots < t_m$) выполняется равенство

$$\mathbf{E} f(W_0^\uparrow(t_1), \dots, W_0^\uparrow(t_m)) = \mathbf{E} f(Y(t_1), \dots, Y(t_m))$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} f(W((\tau_0^{(1)} + t_1) \wedge \tau_0^{(2)}), \dots, W((\tau_0^{(1)} + t_m) \wedge \tau_0^{(2)})) \\ = \mathbf{E} f(Y(t_1), \dots, Y(t_m)). \end{aligned}$$

Поскольку $\tau_0^{(1)}$ — собственная случайная величина, то последнее соотношение является следствием того факта, что при любом натуральном N

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[f(W((\tau_0^{(1)} + t_1) \wedge \tau_0^{(2)}), \dots, W((\tau_0^{(1)} + t_m) \wedge \tau_0^{(2)})); \tau_0^{(1)} \leq N \right] \\ = \mathbf{E} f(Y(t_1), \dots, Y(t_m)) \mathbf{P}(\tau_0^{(1)} \leq N). \end{aligned} \quad (14)$$

Разделим отрезок $[0, N]$ на nN частей, где n — достаточно большое натуральное число. Тогда существует единственное целое неотрицательное число i (зависящее от реализации процесса W) такое, что $\tau_0^{(1)} \in (i/n, (i+1)/n]$. Учитывая ограниченность и непрерывность функции f , а также непрерывность траекторий броуновского движения, получаем, что соотношение (14) эквивалентно следующему утверждению:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{nN-1} \mathbf{E} \left[f \left(W \left(\left(\frac{i+1}{n} + t_1 \right) \wedge \tau_0^{(2)} \right), \dots, W \left(\left(\frac{i+1}{n} + t_m \right) \wedge \tau_0^{(2)} \right) \right); \right. \\ \left. \frac{i}{n} < \tau_0^{(1)} \leq \frac{i+1}{n} \right] = \mathbf{E} f(Y(t_1), \dots, Y(t_m)) \mathbf{P}(\tau_0^{(1)} \leq N). \end{aligned} \quad (15)$$

Можно считать, что в левой части этого соотношения наряду с неравенствами $i/n < \tau_0^{(1)} \leq (i+1)/n$ выполняются еще следующие два

неравенства: $\tau_1 > (i+1)/n$ и $W((i+1)/n) \leq \sqrt[3]{1/n}$. Действительно, заметим, что если при некотором $i \in \{0, 1, \dots, N/n - 1\}$ выполняются неравенства $i/n < \tau_0^{(1)}$ и $\tau_1 \leq (i+1)/n$, то это означает, что броуновское движение хотя бы на одном из промежутков $(i/n, (i+1)/n]$ достигает и значение 0, и значение 1, но вероятность последнего события стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Далее, если при некотором $i \in \{0, 1, \dots, N/n - 1\}$ выполняются неравенства $i/n < \tau_0^{(1)} \leq (i+1)/n$ и $W((i+1)/n) > \sqrt[3]{1/n}$, то $w_W(1/n; N) > \sqrt[3]{1/n}$, но вероятность последнего события стремится к нулю при $n \rightarrow 0$ по теореме о модуле непрерывности броуновского движения (см. [7, гл. 5, § 5.2]). Таким образом, вместо соотношения (15) достаточно установить, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{nN-1} \mathbf{E} \left[f \left(W \left(\left(\frac{i+1}{n} + t_1 \right) \wedge \tau_0^{(2)} \right), \dots, W \left(\left(\frac{i+1}{n} + t_m \right) \wedge \tau_0^{(2)} \right) \right); \right. \\ \left. \frac{i}{n} < \tau_0^{(1)} \leq \frac{i+1}{n}, \tau_1 > \frac{i+1}{n}, W \left(\frac{i+1}{n} \right) \leq \sqrt[3]{\frac{1}{n}} \right] \\ = \mathbf{E} f(Y(t_1), \dots, Y(t_m)) \mathbf{P}(\tau_0^{(1)} \leq N). \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим $A_i(n)$ отдельное слагаемое в левой части (16) и запишем для него интегральное представление:

$$\begin{aligned} A_i(n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, i/n]} W(t) < 1, W \left(\frac{i}{n} \right) \in dx \right) \\ &\times \int_0^{\sqrt[3]{1/n}} \mathbf{P}^{(x)} \left(\inf_{t \in [0, 1/n]} W(t) \leq 0, \sup_{t \in [0, 1/n]} W(t) < 1, W \left(\frac{1}{n} \right) \in dy \right) \\ &\times \mathbf{E}^{(y)} [f(W(t_1 \wedge \tau_0), \dots, W(t_m \wedge \tau_0)); \tau_1 > \tau_0]. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь символы $\mathbf{P}^{(x)}$ и $\mathbf{E}^{(x)}$ означают, что вероятность и математическое ожидание соответственно вычисляются в предположении, что рассматриваемое броуновское движение стартует из точки x , а не из точки 0.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(y)} [f(W(t_1 \wedge \tau_0), \dots, W(t_m \wedge \tau_0)); \tau_1 > \tau_0] \\ = \mathbf{E} [f(W(t_1 \wedge \tau_{-y}), \dots, W(t_m \wedge \tau_{-y})); \tau_{1-y} > \tau_{-y}] \\ = \mathbf{E} [f(W^{(y)}(t_1), \dots, W^{(y)}(t_m)) | \tau_{1-y} > \tau_{-y}] \mathbf{P}^{(y)}(\tau_1 > \tau_0). \end{aligned}$$

В силу замечания 1 предел последовательности

$$\sup_{y \in (0, \sqrt[3]{1/n}]} \left| \mathbf{E} [f(W^{(y)}(t_1), \dots, W^{(y)}(t_m)) | \tau_{1-y} > \tau_{-y}] - \mathbf{E} f(Y(t_1), \dots, Y(t_m)) \right|$$

при $n \rightarrow \infty$ равен нулю.

Следовательно, левая часть соотношения (16), а значит, и левая часть соотношения (14) совпадают с

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} f(Y(t_1), \dots, Y(t_m)) \\ & \times \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{nN-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, i/n]} W(t) < 1, W\left(\frac{i}{n}\right) \in dx \right) \\ & \times \int_0^{\sqrt[3]{1/n}} \mathbf{P}^{(x)} \left(\inf_{t \in [0, 1/n]} W(t) \leq 0, \sup_{t \in [0, 1/n]} W(t) < 1, W\left(\frac{1}{n}\right) \in dy \right) \\ & \times \mathbf{P}^{(y)}(\tau_1 > \tau_0). \end{aligned}$$

Те же рассуждения, проведенные для случая, когда $f \equiv 1$, показывают, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_0^{(1)} \leq N) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{nN-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, i/n]} W(t) < 1, W\left(\frac{i}{n}\right) \in dx \right) \\ & \times \int_0^{\sqrt[3]{1/n}} \mathbf{P}^{(x)} \left(\inf_{t \in [0, 1/n]} W(t) \leq 0, \sup_{t \in [0, 1/n]} W(t) < 1, W\left(\frac{1}{n}\right) \in dy \right) \\ & \times \mathbf{P}^{(y)}(\tau_1 > \tau_0). \end{aligned}$$

Но это означает справедливость соотношения (14). Теорема доказана.

В качестве следствия теорем 1 и 2 получаем следующее представление броуновского прыжка в высоту в виде условного остановленного броуновского движения.

Теорема 3. При $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\{W^{(\varepsilon)} \mid \tau_1 < \tau_{-\varepsilon}\} \xrightarrow{D} W_0^\uparrow.$$

Из соотношения (2) и теоремы 2 находим следующее представление распределения броуновского прыжка в высоту в пространстве $C[0, +\infty)$ через совместное распределение броуновской экскурсии и ее функционала h_0^+ .

Теорема 4. Для любого борелевского множества A , принадлежащего пространству $C[0, +\infty)$, выполняется равенство

$$\mathbf{P}(W_0^\uparrow \in A) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P} \left(\left\{ \frac{W_0^+(v^2 t)}{v}, t \geq 0 \right\} \in A, h_0^+ > v \right) dv.$$

Рассмотрим продолжительность жизни процесса $W_0^\uparrow$:

$$T_0^\uparrow = \inf\{t > 0: W_0^\uparrow(t) = 0\}.$$

Укажем аналог теоремы 4 для случая относительной временной шкалы (относительно продолжительности жизни процесса $W_0^\uparrow$).

Теорема 5. Для любого борелевского множества A , принадлежащего пространству $C[0, +\infty)$, выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\{W_0^\uparrow(tT_0^\uparrow), t \in [0, 1]\} \in A\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left\{\frac{W_0^+(t)}{v}, t \in [0, 1]\right\} \in A, h_0^+ > v\right) dv. \end{aligned}$$

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что при $u \geq 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\{W_0^\uparrow(t), t \geq 0\} \in A, tT_0^\uparrow \leq u\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\{W_0^\uparrow(t), t \geq 0\} \in A, W_0^\uparrow\left(\frac{u}{t}\right) = 0\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left\{\frac{W_0^+(v^2t)}{v}, t \geq 0\right\} \in A, W_0^+\left(\frac{v^2u}{t}\right) = 0, h_0^+ > v\right) dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left\{\frac{W_0^+(v^2t)}{v}, t \geq 0\right\} \in A, \frac{t}{v^2} \leq u, h_0^+ > v\right) dv \end{aligned}$$

(последнее равенство объясняется тем, что продолжительность жизни броуновской экскурсии равна 1). Отсюда вытекает (см. [5, § 17]), что если переменную t у процесса $W_0^\uparrow$ заменить на $tT_0^\uparrow$, то и у процесса $\{W_0^+(v^2t)/v, t \geq 0\}$ переменную t следует заменить на t/v^2 . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Все три рассмотренных случайных процесса: броуновская экскурсия W_0^+ , остановленная броуновская извилина $\widehat{W}^+$ и броуновский прыжок в высоту $W_0^\uparrow$, представляют собою части броуновского движения (возможно, подверженные случайной линейной деформации); все эти процессы стартуют из нулевого состояния, в течение некоторого случайного времени принимают только положительные значения, а достигнув вновь нулевого состояния, остаются там навсегда; распределения этих процессов выражаются через распределение броуновской экскурсии (см. соотношение (1) и теорему 4).

В [3, теорема 2] найдены конечномерные распределения процесса Y , это позволяет указать, используя теорему 2, конечномерные распределения броуновского прыжка в высоту.

Введем некоторые обозначения:

1) при $t > 0, x > 0, y > 0$

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right), \\ g(t, x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(y+x)^2}{2t}\right) \right]; \end{aligned}$$

2) при $t > 0$, $y \in (0, 1]$

$$p_1(0, 0; t, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t, 2k + y),$$

при $0 < s < t$, $x \in (0, 1]$, $y \in (0, 1]$

$$p_1(s, x; t, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - s, x, 2k + y);$$

3) при $t > 0$

$$p_2(0, 0; t, y) = \begin{cases} \sum_{k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} f(t, 2k - y), & y \in (0, 1], \\ f(t, y), & y > 1, \end{cases}$$

при $0 < s < t$, $x \in (0, 1]$

$$p_2(s, x; t, y) = \begin{cases} \sum_{k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} g(t - s, -x, 2k + y), & y \in (0, 1], \\ g(t - s, x, y), & y > 1. \end{cases}$$

Для произвольных чисел $m \in \mathbf{N}$, $t_1, \dots, t_m \in (0, +\infty)$ ($t_1 < \dots < t_m$) и $a_1, \dots, a_m \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(W_0^\uparrow(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m) \\ &= \sum_{j=0}^m \int_{G_j(a_1, \dots, a_m)} \cdots \int \prod_{i=0}^{j-1} p_1(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}) p_2(t_j, x_j; t_{j+1}, x_{j+1}) \\ & \quad \times \prod_{i=j+1}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) dx_1 \cdots dx_m, \end{aligned} \quad (18)$$

где $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $t_{m+1} = +\infty$, $x_{m+1} = +\infty$, $p_2(t_m, x_m; t_{m+1}, x_{m+1}) = x_m$ и

$$G_j(a_1, \dots, a_m) = \{(x_1, \dots, x_m): a_i < x_i \leq 1, i = 1, \dots, j; \\ x_i > a_i, i = j + 1, \dots, m\} \quad \text{при } j = 1, \dots, m - 1;$$

$$G_0(a_1, \dots, a_m) = \{(x_1, \dots, x_m): x_i > a_i, i = 1, \dots, m\};$$

$$G_m(a_1, \dots, a_m) = \{(x_1, \dots, x_m): a_i < x_i \leq 1, i = 1, \dots, m\}.$$

Заметим, что, как обычно, произведение по пустому множеству индексов равно единице. В представленной формуле для конечномерного распределения процесса $W_0^\uparrow$ имеется $m + 1$ слагаемое, каждое из которых устроено аналогично конечномерному распределению марковского процесса, при этом в качестве переходных плотностей фигурируют $p_1(s, x; t, y)$, $p_2(s, x; t, y)$ и $g(t, x, y)$.

В качестве дополнения к формуле (18) отметим, что если хотя бы одно из чисел $a_1, \dots, a_m$ не меньше единицы, то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Y(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m) \\ &= \int \cdots \int_{G_0(a_1, \dots, a_m)} f(t_1, x_1) \prod_{i=1}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) dx_1 \cdots dx_m. \end{aligned}$$

Приступим к изучению функционалов броуновского прыжка в высоту.

Рис. 1. Функционалы броуновского прыжка в высоту

Теорема 6. При всех $u > 0$

$$\mathbf{P}(T_0^\uparrow \leq u) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2k^2}{u}\right).$$

Доказательство. По теореме 4 при $u > 0$

$$\mathbf{P}(T_0^\uparrow \leq u) = \mathbf{P}(W_0^\uparrow(u) = 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{W_0^+(v^2 u)}{v} = 0, h_0^+ > v\right) dv.$$

Но продолжительность жизни броуновской экскурсии равна 1, поэтому последний интеграл равен $\int_{1/\sqrt{u}}^{+\infty} \mathbf{P}(h_0^+ > v) dv$. Распределение функционала h_0^+ хорошо известно (см. [8, предложение (3.1)]):

$$\mathbf{P}(h_0^+ > v) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2k^2 v^2) [4k^2 v^2 - 1].$$

Следовательно, интегрируя по частям, получаем, что

$$\mathbf{P}(T_0^\uparrow \leq u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{1/\sqrt{u}}^{+\infty} \mathbf{P}(h_0^+ > v) dv = 2\sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2k^2}{u}\right).$$

Теорема доказана.

Положим $h_0^\uparrow = \sup_{t \geq 0} W_0^\uparrow(t)$. Ясно, что $h_0^\uparrow \geq 1$.

Теорема 7. *При всех $u \geq 1$*

$$\mathbf{P}(h_0^\uparrow > u) = \frac{1}{u}.$$

Доказательство. По теореме 4 при $u \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(h_0^\uparrow > u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t \geq 0} \frac{W_0^+(v^2 t)}{v} > u, h_0^+ > v\right) dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(h_0^+ > uv, h_0^+ > v) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(h_0^+ > uv) dv \\ &= \frac{1}{u} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(h_0^+ > v) dv = \frac{1}{u} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbf{E} h_0^+. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\mathbf{E} h_0^+ = \sqrt{\pi/2}$ (см. [8, следствие (3.2)]), получаем утверждение теоремы.

Из определения броуновского прыжка в высоту следует, что уровень 1 играет особую роль для этого процесса. Последующие результаты связаны именно с этим уровнем. Рассмотрим момент достижения уровня 1 броуновским прыжком в высоту:

$$\tau_0^\uparrow = \inf\{t > 0: W_0^\uparrow(t) = 1\}.$$

Теорема 8. *При всех $u > 0$*

$$\mathbf{P}(\tau_0^\uparrow \leq u) = K\left(\frac{\pi\sqrt{u}}{2}\right),$$

где $K(u) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \exp(-2k^2 u^2)$ — функция распределения Колмогорова.

Доказательство. По теореме 4 при $u > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_0^\uparrow \leq u) &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} W_0^\uparrow(t) \geq 1\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} \frac{W_0^+(v^2 t)}{v} \geq 1, h_0^+ > v\right) dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} W_0^+(v^2 t) \geq v, h_0^+ > v\right) dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} W_0^+(v^2 t) \geq v\right) dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, v^2 u]} W_0^+(t) \geq v\right) dv. \end{aligned}$$

В [1, формула (24)] показано, что последнее выражение при $u > 0$ равно $K(\pi\sqrt{u}/2)$. Теорема доказана.

Теорема 9. При всех $u \in [0, 1)$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_0^\uparrow}{T_0^\uparrow} \leq u\right) = \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{u}{1-u}}\right).$$

Доказательство. По теореме 5 при $u \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{\tau_0^\uparrow}{T_0^\uparrow} \leq u\right) &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} W_0^\uparrow(t T_0^\uparrow) > 1\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} W_0^+(t) > v, h_0^+ > v\right) dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, u]} W_0^+(t) > v\right) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbf{E} \sup_{t \in [0, u]} W_0^+(t). \end{aligned}$$

В [9, лемма 2] показано, что при $u \in [0, 1)$

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, u]} W_0^+(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{u}{1-u}}\right).$$

Таким образом, теорема доказана.

Рассмотрим время пребывания процесса $W_0^\uparrow$ над уровнем 1:

$$\mu_0^\uparrow = \lambda(\{t: W_0^\uparrow(t) > 1\}),$$

где $\lambda(A)$ — мера Лебега борелевского множества A на числовой прямой, и время пребывания процесса $W_0^\uparrow$ под уровнем 1:

$$\nu_0^\uparrow = \lambda(\{t: W_0^\uparrow(t) \leq 1\}).$$

Аналогично вводятся случайные величины $\mu_0^+(v)$ и $\nu_0^+(v)$, означающие времена пребывания соответственно выше и ниже положительного уровня v для броуновской экскурсии.

Теорема 10. Преобразование Лапласа случайной величины $\mu_0^\uparrow$ имеет вид

$$\mathbf{E} \exp(-s\mu_0^\uparrow) = \frac{1}{1 + \sqrt{2s}}, \quad s \geq 0.$$

Доказательство. По теореме 4 при $u \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mu_0^\uparrow > u) &= \mathbf{P}(\lambda(\{t: W_0^\uparrow(t) > 1\}) > u) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(\lambda(\{t: W_0^+(v^2 t) > v\}) > u, h_0^+ > v) dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(\lambda(\{t: W_0^+(v^2 t) > v\}) > u) dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(\lambda(\{t: W_0^+(t) > v\}) > uv^2) dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(\mu_0^+(v) > uv^2) dv. \end{aligned}$$

В [2, доказательство теоремы 1] показано, что у неотрицательной случайной величины с функцией распределения

$$F(u) := 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(\mu_0^+(v) > uv^2) dv$$

преобразование Лапласа имеет вид $1/(1 + \sqrt{2s})$, $s \geq 0$. Теорема доказана.

Теорема 11. Преобразование Лапласа случайной величины $\nu_0^\uparrow$ имеет вид

$$\mathbf{E} \exp(-s\nu_0^\uparrow) = \frac{2\sqrt{2s}}{\operatorname{sh}(2\sqrt{2s})}, \quad s \geq 0.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательства предыдущей теоремы, получаем, что при $u \geq 0$

$$\mathbf{P}(\nu_0^\uparrow > u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(\nu_0^+(v) > uv^2, h_0^+ > v) dv.$$

В [2, доказательство теоремы 2] показано, что у неотрицательной случайной величины с функцией распределения

$$G(u) := 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(\nu_0^+(v) > uv^2, h_0^+ > v) dv$$

преобразование Лапласа имеет вид $2\sqrt{2s}/\operatorname{sh}(2\sqrt{2s})$, $s \geq 0$. Теорема доказана.

Теорема 12. При всех $u \in [0, 1]$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mu_0^\uparrow}{T_0^\uparrow} \leq u\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\nu_0^\uparrow}{T_0^\uparrow} \leq u\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{u}).$$

Доказательство. Заметим, что выполнено равенство $\mu_0^\uparrow/T_0^\uparrow = \lambda(\{t: W_0^\uparrow(tT_0^\uparrow) > 1\})$. Следовательно, по теореме 5 при $u \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{\mu_0^\uparrow}{T_0^\uparrow} > u\right) &= \mathbf{P}\left(\lambda(\{t: W_0^\uparrow(tT_0^\uparrow) > 1\}) > u\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\lambda(\{t: W_0^+(t) > v\}) > u, h_0^+ > v\right) dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\lambda(\{t: W_0^+(t) > v\}) > u\right) dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(\mu_0^+(v) > u) dv. \end{aligned}$$

В [2, лемма 4] показано, что при $u \in [0, 1]$

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(\mu_0^+(v) > u) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \arcsin(\sqrt{1-u}).$$

Таким образом, теорема доказана.

В заключение приведем две предельные теоремы, связанные с броуновским прыжком в высоту.

Рассмотрим сначала критический ветвящийся процесс в случайной среде $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, стартующий с одной частицы и задаваемый последовательностью независимых одинаково распределенных (случайных) производящих функций $\{f_n(s), n \in \mathbf{N}\}$. Предполагается, что производящая функция $f_n(s)$, $s \in [-1, 1]$, определяет закон размножения частиц в $(n-1)$ -м поколении, $n \in \mathbf{N}$. Определение этого процесса можно найти, например, в [10]. Положим

$$X_n = \ln f'_n(1), \quad \eta_n = \frac{f''_n(1)}{(f'_n(1))^2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Будем предполагать, что выполнены следующие моментные ограничения:

$$0 < \mathbf{E} X_1^2 := \sigma^2 < +\infty, \quad \mathbf{E} \ln^q(\eta_1 \vee 1) < +\infty \quad \text{при некотором } q > 2.$$

Тогда (см. теорему 2 и [3, теорема 1]) при $x \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \frac{\ln(\xi_{\lfloor t\sigma^{-2}x^2 \rfloor} \vee 1)}{x}, t \geq 0 \mid \max_{n \in \mathbf{N}_0} \xi_n > \exp x \right\} \xrightarrow{D} W_0^\uparrow.$$

Здесь символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, +\infty)$ с σ -алгеброй борелевских множеств относительно топологии Скорохода.

Рассмотрим теперь критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона $\{Z_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, стартующий с одной частицы и удовлетворяющий условию

$$\mathbf{D}Z_1 \equiv 4\lambda \in (0, +\infty).$$

Введем локальное время на уровне $u \geq 0$ для процессов W_0^+ и $W_0^\uparrow$:

$$l_0^+(u) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 I_{[u, u+\varepsilon]}(W_0^+(t)) dt, \quad l_0^\uparrow(u) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} I_{[u, u+\varepsilon]}(W_0^\uparrow(t)) dt.$$

Оказывается, при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{Z_{\lfloor nt \rfloor}}{\lambda n}, t \geq 0 \mid Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} \{l_0^\uparrow(t), t \geq 0\}. \quad (19)$$

Как следует из работы [11], для справедливости соотношения (19) достаточно показать, что для произвольного борелевского множества A пространства $D[0, +\infty)$ выполняется равенство

$$\mathbf{P}\left(\{l_0^\uparrow(t), t \geq 0\} \in A\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left\{\frac{l_0^+(vt)}{v}, t \geq 0\right\} \in A, h_0^+ > v\right) dv. \quad (20)$$

Пусть $l_v(u)$ — локальное время на уровне $u \geq 0$ процесса $\{Z_v(t), t \geq 0\}$. Из теоремы 4 следует, что

$$\mathbf{P}(\{l_0^+(t), t \geq 0\} \in A) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(\{l_v(t), t \geq 0\} \in A, h_0^+ > v) dv.$$

Но, как нетрудно понять, при $t \geq 0$

$$l_v(t) = \frac{l_0^+(vt)}{v}.$$

Таким образом, соотношение (20) доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев В. И.* О моменте достижения фиксированного уровня критическим ветвящимся процессом в случайной среде. — Дискрет. матем., 1999, т. 11, № 4, с. 33–47.
2. *Афанасьев В. И.* Закон арксинуса для ветвящихся процессов в случайной среде и процессов Гальтона–Ватсона. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 3, с. 449–464.
3. *Афанасьев В. И.* Принцип инвариантности для критического ветвящегося процесса в случайной среде, достигающего высокого уровня. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 1, с. 3–17.
4. *Durrett R. T., Iglehart D. L., Miller D. R.* Weak convergence to Brownian meander and Brownian excursion. — Ann. Probab., 1977, v. 5, № 1, p. 117–129.
5. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
7. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1996, 400 с.
8. *Durrett R. T., Iglehart D. L.* Functionals of Brownian meander and Brownian excursion. — Ann. Probab., 1977, v. 5, № 1, p. 130–135.
9. *Афанасьев В. И.* О функционалах от случайного блуждания до момента первого достижения отрицательной полуоси. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. 31, в. 4, с. 773–777.
10. *Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A.* Criticality for branching processes in random environment. — Ann. Probab., 2005, v. 33, № 2, p. 645–673.
11. *Афанасьев В. И.* Об условном принципе инвариантности для критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона. — Дискрет. матем., 2005, т. 17, № 1, с. 35–49.

Поступила в редакцию
23.XII.2008