Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Володько, Предельные теоремы для канонических статистик Мизеса и U -статистик от m -зависимых наблюдений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 2, 226–249

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4199>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 02:59:52

© 2010 г.

ВОЛОДЬКО Н. В.*

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ
СТАТИСТИК МИЗЕСА И U -СТАТИСТИК ОТ m -ЗАВИСИМЫХ
НАБЛЮДЕНИЙ¹⁾**

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в работах И. С. Борисова, А. А. Быстрова и автора (Сиб. матем. журн., 2006, т. 47, № 6; Матем. труды, 2008, т. 11, № 1; IMS Collections, v. 5), где были доказаны некоторые предельные теоремы для канонических U - и V -статистик, построенных по стационарно связанным наблюдениям с условиями ψ -, φ - или α -перемешивания. Однако условия в упомянутых работах, обеспечивающие известное предельное поведение указанных статистик, включают в себя либо весьма существенные ограничения на конечномерные распределения исходной стационарной последовательности, либо некоторые условия регулярности ядер рассматриваемых статистик.

В настоящей работе показано, что в случае стационарных последовательностей m -зависимых наблюдений все же возможно обойтись без указанных выше дополнительных условий при описании предельного поведения U - и V -статистик.

Ключевые слова и фразы: стационарные последовательности случайных величин, m -зависимость, ортогональный ряд, канонические U - и V -статистики.

1. Введение и предварительные результаты. Рассмотрим стационарную (в узком смысле) последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots$, принимающих значения в произвольном сепарабельном метрическом пространстве $\mathcal{X}$. Обозначим через F распределение X_1 . В дальнейшем нам будет удобно использовать также вспомогательную последовательность $\{X_i^*\}$, состоящую из независимых копий случайной величины X_1 .

Напомним определение последовательности m -зависимых величин.

*Новосибирский государственный университет, Академгородок, ул. Пирогова, 2; Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр-т Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия, e-mail: nvoldko@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08-01-00962, 09-01-00224), Министерства образования и науки РФ (код проекта РНП.2.1.1.1379), а также программы «Ведущие научные школы» (код проекта НШ-3695.2008.1).

О п р е д е л е н и е 1. Случайные величины $\{X_i; i \geq 1\}$ называются m -зависимыми, если два семейства случайных величин $\{X_i; i \leq k\}$ и $\{X_i; i > k + m\}$ независимы при любом натуральном k .

Пусть $L_2(\mathfrak{X}^d, F^d)$ обозначает пространство измеримых функций $f(t_1, \dots, t_d)$, заданных на соответствующей декартовой степени пространства $\mathfrak{X}$ и имеющих конечный второй момент по соответствующей произведению мере, т.е. удовлетворяющих условию $\mathbf{E} f^2(X_1^*, \dots, X_d^*) < \infty$.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $f(t_1, \dots, t_d) \in L_2(\mathfrak{X}^d, F^d)$ называется канонической (или вырожденной), если

$$\mathbf{E} f(t_1, \dots, t_{k-1}, X_k, t_{k+1}, \dots, t_d) = 0 \quad (1)$$

для любого k и для любых $t_j \in \mathfrak{X}$.

Определим статистику Мизеса (или V -статистику) формулой

$$V_n \equiv V_n(f) := n^{-d/2} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_d \leq n} f(X_{j_1}, \dots, X_{j_d}), \quad (2)$$

где функция $f(t_1, \dots, t_d)$ (так называемое *ядро* статистики) является канонической. В случае независимых наблюдений $\{X_i\}$ статистики такого типа (их нередко называют *каноническими V -статистиками*) изучались с середины прошлого века (обзор литературы и конкретные примеры статистик см. в [5]). Впервые предельные теоремы для них были получены в работах Р. Мизеса [10] и В. Хёфдинга [9]. Наряду с V -статистиками рассматриваются близкие к (2) функционалы, так называемые U -статистики:

$$U_n \equiv U_n(f) := n^{-d/2} \sum_{1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_d \leq n} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_d}). \quad (3)$$

Отличие U -статистик от V -статистик состоит в отсутствии в области суммирования кратных сумм совпадающих индексов (или, как говорят, диагональных подпространств).

Нашей задачей является исследование предельного поведения U - и V -статистик, построенных по выборкам растущего объема из последовательности m -зависимых случайных величин. В дальнейшем мы полагаем, что $d \geq 2$, поскольку в случае $d = 1$ упомянутые статистики представляют собой нормированные суммы стационарно связанных случайных величин, для которых соответствующая предельная теория уже разработана.

Метод настоящей работы основан на представлении ядра в виде специального кратного ортогонального ряда. Вкратце напомним классические результаты из этой области, а также основанные на указанном разложении ядра предельные теоремы для канонических U - и V -статистик, полученные ранее.

Поскольку гильбертово пространство $L_2(\mathfrak{X}, F)$ также является сепарабельным, в нем существует счетный ортонормированный базис. Более того, положив $e_0(t) \equiv 1$, можно методом ортогонализации Грама–Шмидта [4] построить ортонормированный базис $\{e_i(t)\}_{i \geq 0}$, содержащий $e_0(t)$. Тогда $\mathbf{E} e_i(X_1) = 0$ для всех значений $i \geq 1$ в силу условия ортогональности с $e_0(t)$. Условие нормировки означает, что $\mathbf{E} e_i^2(X_1) = 1$ для всех $i \geq 1$. Отметим, что при этом семейство функций $\{e_{i_1}(t_1)e_{i_2}(t_2) \cdots e_{i_d}(t_d); i_1, i_2, \dots, i_d = 0, 1, \dots\}$ является ортонормированным базисом в пространстве $L_2(\mathfrak{X}^d, F^d)$ (см. [4]).

Таким образом, можно разложить ядро $f(t_1, \dots, t_d)$ рассматриваемых статистик по базису $L_2(\mathfrak{X}^d, F^d)$. Если, кроме того, ядро является вырожденным, то элемент $e_0(t) \equiv 1$ не принимает участия в разложении (подробнее см. [2]), т.е. имеет место разложение

$$f(t_1, \dots, t_d) = \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^{\infty} f_{i_1 \dots i_d} e_{i_1}(t_1) \cdots e_{i_d}(t_d), \quad (4)$$

где ряд в правой части равенства (4) сходится в норме $L_2(\mathfrak{X}^d, F^d)$. При этом и само равенство (4) понимается как равенство в $L_2(\mathfrak{X}^d, F^d)$, т.е. для почти всех относительно произведений мер F^d векторных аргументов $(t_1, \dots, t_d)$.

Остановимся на случае $d = 2$. Рассмотрим интегральный линейный оператор с симметричным каноническим ядром $f \in L_2(\mathfrak{X}^2, F^2)$, переводящий $L_2(\mathfrak{X}, F)$ в себя. Поскольку этот линейный оператор будет вполне непрерывным и самосопряженным, то в сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2(\mathfrak{X}, F)$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого интегрального оператора. При этом, в силу вырожденности ядра, функция $e_0(t) \equiv 1$ является собственным вектором оператора, соответствующим собственному числу $\lambda_0 = 0$. Тогда для этого базиса представление (4) при $d = 2$ будет выглядеть следующим образом:

$$f(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k(t_1) e_k(t_2), \quad (5)$$

где λ_k — собственное число, отвечающее функции $e_k(\cdot)$ (см. [2], [5] и [8]).

Таким образом, при замене векторной переменной $(t_1, \dots, t_d)$ на независимые наблюдения $(X_1^*, \dots, X_d^*)$ частичные суммы ряда в правой части (4) (или (5) при $d = 2$) сходятся к случайной величине $f(X_1^*, \dots, X_d^*)$ в *среднеквадратичном*, а следовательно, и по распределению. Если, к тому же, коэффициенты разложения $\{f_{i_1 \dots i_d}\}$ (или, соответственно, λ_k для $d = 2$) абсолютно суммируемы, то в силу теоремы Б. Леви и элементарной оценки $\mathbf{E} |e_{i_1}(X_1^*) \cdots e_{i_d}(X_d^*)| \leq 1$ ряд в (4) (или (5)) будет

сходиться к случайной величине $f(X_1^*, \dots, X_d^*)$ и почти наверное относительно распределения F^d вектора $(X_1^*, \dots, X_d^*)$. Однако при замене аргументов $(X_1^*, \dots, X_d^*)$ на исходные зависимые $(X_1, \dots, X_d)$ только что отмеченное свойство, вообще говоря, не имеет места.

Напомним формулировки классических условий (и определения коэффициентов) перемешивания. Обозначим $\mathfrak{M}_j^k$, где $j \leq k$, σ -алгебру событий, порожденную случайными величинами $X_j, \dots, X_k$.

О п р е д е л е н и е 3. Последовательность $X_1, X_2, \dots$ удовлетворяет условию α -перемешивания (или сильного перемешивания), если при $i \rightarrow \infty$

$$\alpha(i) := \sup_{k \geq 1} \sup_{A \in \mathfrak{M}_1^k, B \in \mathfrak{M}_{k+i}^\infty} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \rightarrow 0.$$

О п р е д е л е н и е 4. Последовательность $X_1, X_2, \dots$ удовлетворяет условию φ -перемешивания (или равномерно сильного перемешивания), если при $i \rightarrow \infty$

$$\varphi(i) := \sup_{k \geq 1} \sup_{A \in \mathfrak{M}_1^k, B \in \mathfrak{M}_{k+i}^\infty, \mathbf{P}(A) > 0} \frac{|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)} \rightarrow 0.$$

О п р е д е л е н и е 5. Последовательность $X_1, X_2, \dots$ удовлетворяет условию ψ -перемешивания, если при $i \rightarrow \infty$

$$\psi(i) := \sup_{k \geq 1} \sup_{A \in \mathfrak{M}_1^k, B \in \mathfrak{M}_{k+i}^\infty, \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) > 0} \frac{|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)} \rightarrow 0.$$

При этом предполагается, что $\psi(1) < \infty$.

Отметим, что последовательность m -зависимых случайных величин удовлетворяет условиям α - и φ -перемешивания, но может не удовлетворять условию ψ -перемешивания.

В работе [12] для независимых $\{X_i\}$ при условии $f(t_1, \dots, t_d) \in L_2(\mathfrak{X}^d, F^d)$ доказано, что

$$U_n \xrightarrow{d} \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^{\infty} f_{i_1 \dots i_d} \prod_{j=1}^{\infty} H_{\nu_j(i_1, \dots, i_d)}(\tau_j), \quad (6)$$

где $\{\tau_i\}$ — последовательность независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением, $\nu_j(i_1, \dots, i_d)$ — число индексов среди $i_1, \dots, i_d$, равных натуральному j , а $H_k(x)$ — полиномы Эрмита, определенные формулой

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2/2})$$

или с помощью рекуррентного соотношения

$$H_{n+1} = xH_n(x) - nH_{n-1}(x), \quad H_0(x) \equiv 1, \quad H_1(x) = x.$$

Трудность перехода к случаю стационарно связанных наблюдений заключается в том, что даже сходимость ряда почти наверное относительно распределения F^d и наличие φ -перемешивания наблюдений не гарантируют даже слабую сходимость частичных сумм упомянутого выше ряда к ядру при подстановке вместо неслучайных аргументов зависимых наблюдений. В работе [8] (см. также [5]), где исследовался слабый предел U -статистики второго порядка при $n \rightarrow \infty$, построенной по наблюдениям с условием φ -перемешивания, этот момент был упущен. Там утверждается, что при $d = 2$ в случае стационарно связанных наблюдений с φ -перемешиванием при условии сходимости рядов $\sum |\lambda_k|$ и $\sum \varphi^{1/2}(k)$ выполнено следующее предельное соотношение:

$$U_n \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\tau_k^2 - 1), \quad (7)$$

где $\{\lambda_k\}$ — собственные числа интегрального оператора с симметричным ядром $f(t_1, t_2)$ из (5), а $\{\tau_k\}$ — гауссовская последовательность центрированных случайных величин с ковариациями

$$\mathbf{E} \tau_k \tau_l = \mathbf{E} e_k(X_1) e_l(X_1) + \sum_{j=1}^{\infty} [\mathbf{E} e_k(X_1) e_l(X_{j+1}) + \mathbf{E} e_l(X_1) e_k(X_{j+1})], \quad (8)$$

где $\{e_k(t)\}$ — ортонормированный базис из собственных функций упомянутого интегрального оператора.

В [2, предложение 2] был построен пример, в котором при выполнении всех условий из условий [8] ряд в правой части (5) при подстановке вместо неслучайных аргументов пары зависимых наблюдений из исходной стационарной последовательности не совпадает с положительной вероятностью с соответствующим значением ядра и, более того, слабый предел рассматриваемой U -статистики не существует. Вкратце напомним эту конструкцию.

Пусть $\{Y_i; i \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, распределенных равномерно на отрезке $[-1, 1]$, а $\{\xi_i; i \geq 1\}$ — последовательность независимых между собой и от последовательности $\{Y_i\}$ бернуллиевских случайных величин с вероятностью успеха $1/2$. Положим $X_i = Y_{i+\xi_i}$. Случайные величины X_i образуют стационарную последовательность 1-зависимых величин. Очевидно, что X_i также равномерно распределены на $[-1, 1]$. При этом для соответствующих независимых наблюдений X_1^* и X_2^* мы имеем $\mathbf{P}(X_1^* = X_2^*) = 0$, а для оригинальных

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) = \mathbf{P}(\xi_1 = 1) \mathbf{P}(\xi_2 = 0) = \frac{1}{4}.$$

Отметим, что в рассматриваемом примере ни базисные функции, ни коэффициенты разложения в (5) не зависят от значения ядра f на диаго-

нали ввиду неатомарности маргинального распределения (см. характеристическое уравнение для определения спектральных характеристик). Далее, в [2] показано, что в этом случае слабый предел U -статистики будет равен

$$\frac{\mathbf{E} f(Y_1, Y_1)}{2} + \sum_{k \geq 1} \lambda_k \left(\tau_k^2 - \frac{3}{2} \right),$$

где λ_k и τ_k те же, что в (7). Поскольку в условиях работы [8] величина $\mathbf{E} f(Y_1, Y_1)$ может быть любым числом или даже не существовать, то приведенный слабый предел в общем случае не совпадает с (7).

В работах [1], [2], [7] были получены результаты, аналогичные [12], для стационарно связанных наблюдений. В силу вышесказанного для применения тех же методов в случае зависимых наблюдений потребовались дополнительные ограничения. Например, в [2] были введены следующие условия.

(АС) Для любого набора попарно различных индексов $(j_1, \dots, j_d)$ распределение вектора $(X_{j_1}, \dots, X_{j_d})$ абсолютно непрерывно относительно распределения вектора $(X_1^*, \dots, X_d^*)$.

(R) Ядро $f(t_1, \dots, t_d)$ непрерывно всюду на $\mathfrak{X}^d$ (по каждой переменной), и все базисные элементы $e_k(t)$ в (4) непрерывны и равномерно по t и k ограничены.

Отметим, что каждое из этих двух условий обеспечивает совпадение с вероятностью 1 ядра и его разложения в упомянутый ортогональный ряд (при условии абсолютной суммируемости его коэффициентов) при подстановке вместо аргументов пары зависимых наблюдений из исходной стационарной последовательности.

В работе [2] доказано, что в случае α - и φ -перемешивания при выполнении условия (АС), условия абсолютной суммируемости коэффициентов $f_{i_1 \dots i_d}$ и при некоторых ограничениях на моменты базисных элементов, а также на скорость убывания коэффициентов перемешивания верно следующее предельное соотношение:

$$U_n \xrightarrow{d} \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^{\infty} f_{i_1 \dots i_d} \prod_{j=1}^{\infty} H_{\nu_j(i_1, \dots, i_d)}(\tau_j). \quad (9)$$

Заменяя условие (АС) на (R), получаем предельную теорему для V -статистик (подробнее см. [2]):

$$V_n \xrightarrow{d} \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^{\infty} f_{i_1 \dots i_d} \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_d}. \quad (10)$$

В обоих случаях $\{\tau_i\}$ — центрированная гауссовская последовательность

с ковариациями

$$\mathbf{E} \tau_k \tau_l = \delta_{kl} + \sum_{j=1}^{\infty} [\mathbf{E} e_k(X_1) e_l(X_{j+1}) + \mathbf{E} e_l(X_1) e_k(X_{j+1})]. \quad (11)$$

Требованию (АС) удовлетворяют, к примеру, последовательности с ψ -перемешиванием (для которых предельный закон сформулирован в [1]). Но легко проверить, что приведенный выше пример последовательности 1-зависимых случайных величин этому требованию не удовлетворяет.

2. Основные результаты. Цель настоящей работы — получить предельные теоремы для U - и V -статистик, построенных по выборкам из последовательности m -зависимых случайных величин, без ограничительных условий на совместные распределения элементов исходной последовательности или условий регулярности типа условий (АС) и (R).

Предлагаемый в настоящей работе подход, как и в упомянутых работах [1] и [2], также основан на разложении ядра в кратный ряд, но в данном случае он будет несколько отличаться от (4).

В силу определения m -зависимости каждый случайный вектор аргументов $\{X_{j_1}, \dots, X_{j_d}\}$ соответствующего ядра (индексы которых в случае V -статистик могут иметь различную кратность) можно разбить на независимые между собой подвекторы (*блоки*), количество которых может принимать значения от 1 до d . Назовем блок неделимым, если после упорядочения по возрастанию индексов (чего не нужно делать для U -статистик), определяющих данный блок, расстояние между любыми соседними индексами не будет превышать m . Дадим более формальное определение. Пусть $\bar{k} = \{j_{k_1}, \dots, j_{k_l}\} \subset \{j_1, \dots, j_d\}$. Будем считать, что элементы $\{X_{j_{k_1}}, \dots, X_{j_{k_l}}\}$ образуют *неделимый блок*, если для каждого $j \in \bar{k}$ выполнено

$$\min_{j' \in \bar{k} \setminus \{j\}} |j - j'| \leq m \quad \text{и} \quad \min_{j' \in \{j_1, \dots, j_d\} \setminus \bar{k}} |j - j'| > m.$$

Отсюда следует, что все блоки (подвекторы) внутри конкретного набора $\{X_{j_1}, \dots, X_{j_d}\}$ будут независимыми в совокупности.

В дальнейшем, говоря о неделимых блоках $\{X_{j_{k_1}}, \dots, X_{j_{k_l}}\}$, мы будем иногда оперировать «неделимыми блоками» соответствующих индексов $\{j_{k_1}, \dots, j_{k_l}\}$.

Заметим, что распределение вектора наблюдений $\{X_{j_1}, \dots, X_{j_d}\}$ однозначно определяется распределениями блоков, на которые он разбивается, причем перестановка индексов внутри отдельного блока, вообще говоря, может изменить его распределение. Следовательно, всевозможных различных распределений $\{X_{j_1}, \dots, X_{j_d}\}$ будет конечное число, зависящее только от d и m .

Далее, разобьем множество d -мерных мультииндексов

$$\{(j_1, \dots, j_d): j_r = 1, \dots, n; r = 1, \dots, d\}$$

на непересекающиеся классы эквивалентности $\{K_l\}$, число которых зависит лишь от параметров d и m . Мультииндексы каждого такого класса содержат фиксированное число блоков и получаются один из другого некоторыми *параллельными сдвигами* указанных блоков (т.е. прибавлением ко всем координатам отдельного блока одного и того же целого числа, но своего для каждого блока) при одном лишь условии, что расстояние Хаусдорфа между каждой парой указанных блоков должно превосходить число m (чтобы число сдвигаемых блоков было постоянным).

Пусть мультииндексы некоторого класса K_l разбиваются на s неделимых блоков. Если $s > d/2$, потребуем, чтобы

$$\mathbf{E} f^2(X_{j_1}, \dots, X_{j_d}) < \infty. \quad (12)$$

Если же $s \leq d/2$, будем требовать лишь конечность первого момента ядра:

$$\mathbf{E} |f(X_{j_1}, \dots, X_{j_d})| < \infty. \quad (13)$$

Стоит сразу заметить, что общее число элементов K_l не превышает n^s и эквивалентно n^s при $n \rightarrow \infty$.

Предложение 1. Пусть для класса K_l с числом блоков $s = d/2$ выполнено условие (13). Тогда

$$n^{-d/2} \sum_{K_l} f(X_{j_1}, \dots, X_{j_d}) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{E} f(X_{j_1^0}, \dots, X_{j_d^0}) \quad (14)$$

при $n \rightarrow \infty$, где $(j_1^0, \dots, j_d^0)$ — любой представитель класса K_l .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фактически мы имеем дело со статистикой вида

$$S_n = n^{-s} \sum_{(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_s) \in K_l} f_0(\bar{X}_{\bar{k}_1}, \dots, \bar{X}_{\bar{k}_s}), \quad (15)$$

где функция f_0 есть суперпозиция исходного ядра f и оператора, обратного к оператору перестановки аргументов по возрастанию их индексов (для симметричных относительно перестановки аргументов ядер имеем тождество $f_0 \equiv f$); каждая из последовательностей $\{\bar{X}_{\bar{k}_i}\}$ ($i = 1, \dots, s$) состоит из m_{k_i} -зависимых случайных векторов (блоков), вообще говоря, различной размерности с одним и тем же маргинальным распределением в каждой последовательности. При этом для любого набора блочных мультииндексов $(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_s) \in K_l$ набор $(\bar{X}_{\bar{k}_1}, \dots, \bar{X}_{\bar{k}_s})$ состоит из независимых блоков. Кроме того, если расстояние Хаусдорфа между наборами блочных мультииндексов $(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_s)$ и $(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_s)$ превосходит число m ,

то соответствующие векторные наборы $(\bar{X}_{\bar{k}_1}, \dots, \bar{X}_{\bar{k}_s})$ и $(\bar{X}_{\bar{r}_1}, \dots, \bar{X}_{\bar{r}_s})$ также независимы.

Для случайной величины X обозначим $\|X\|_p := (\mathbf{E}|X|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$.

Пусть N — произвольное положительное число. Введем в рассмотрение срезку и ее хвост для ядра f_0 :

$$\begin{aligned} f_0^{(N)}(t_1, \dots, t_s) &:= f_0(t_1, \dots, t_s) I(|f_0(t_1, \dots, t_s)| \leq N), \\ \bar{f}_0^{(N)}(t_1, \dots, t_s) &:= f_0(t_1, \dots, t_s) - f_0^{(N)}(t_1, \dots, t_s). \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\|S_n - \mathbf{E} S_n\|_1 \leq \|S_n^{(N)} - \mathbf{E} S_n^{(N)}\|_1 + \|\bar{S}_n^{(N)} - \mathbf{E} \bar{S}_n^{(N)}\|_1,$$

где $S_n^{(N)}$ и $\bar{S}_n^{(N)}$ строятся по формуле (15) для срезки и хвоста срезки ядра соответственно. Очевидно, что $\mathbf{E} S_n^{(N)} \rightarrow \mathbf{E} S_n$ и

$$\sup_n \|\bar{S}_n^{(N)} - \mathbf{E} \bar{S}_n^{(N)}\|_1 \leq 2 \|\bar{f}_0^{(N)}(\bar{X}_{\bar{j}_1^0}, \dots, \bar{X}_{\bar{j}_s^0})\|_1 \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. Остается доказать, что для любого фиксированного N при $n \rightarrow \infty$

$$\|S_n^{(N)} - \mathbf{E} S_n^{(N)}\|_1 \rightarrow 0.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского нам достаточно установить предыдущее соотношения для нормы $\|\cdot\|_2$, которая для срезанной статистики, очевидно, существует. Обозначим через $\tilde{f}_0^{(N)}$ центрированную срезку ядра. Тогда легко видеть, что

$$\begin{aligned} &\|S_n^{(N)} - \mathbf{E} S_n^{(N)}\|_2^2 \\ &= \frac{1}{n^{2s}} \sum_{(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_s) \in K_l} \sum_{(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_s) \in K_l} \mathbf{E} \tilde{f}_0^{(N)}(\bar{X}_{\bar{k}_1}, \dots, \bar{X}_{\bar{k}_s}) \tilde{f}_0^{(N)}(\bar{X}_{\bar{r}_1}, \dots, \bar{X}_{\bar{r}_s}) \\ &= O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

поскольку смешанный момент под знаком кратной суммы может быть отличен от нуля, только если расстояние Хаусдорфа между наборами индексов $(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_s)$ и $(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_s)$ не превосходит m , что означает, что число «степеней свободы» в пространстве индексов не превосходит $2s-1$, т.е. число ненулевых слагаемых (мажорируемых одним числом) в указанной кратной сумме имеет порядок $O(n^{2s-1})$. Предложение доказано.

Если же $s < d/2$, то из вышеприведенных выкладок следует, что

$$n^{-d/2} \sum_{K^l} f(X_{j_1}, \dots, X_{j_d}) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad (16)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, классы, в которых $s < d/2$, не играют никакой роли для описания слабого предела рассматриваемой статистики. Следовательно, в рассуждениях мы можем добавлять и отнимать слагаемые, составленные из них для удобства выкладок, не изменяя предельного значения.

Остановимся на ситуации, когда $d > 2$ чётно и $s = d/2$. Если длина некоторого блока в классе больше двух, значит, в этом классе есть другой блок, длина которого равна единице. А тогда в силу независимости блоков и вырожденности ядра

$$\mathbf{E} f(X_{j_1}, \dots, X_{j_d}) = 0,$$

следовательно, ненулевой предел при $s = d/2$ дают только классы, в которых векторы $(X_{j_1}, \dots, X_{j_d})$ состоят лишь из двухэлементных неделимых блоков.

Теперь рассмотрим случай, когда возможно разбиение $\{X_{j_1}, \dots, X_{j_d}\}$ на $s > d/2$ неделимых блоков. Наряду с неделимыми блоками $\bar{k}_r$ будем оперировать *классами эквивалентности блоков* T_r . Векторы T_r получают друг из друга параллельным переносом. Количество элементов в неделимых блоках класса T_r будем обозначать $\#(T_r)$, минимальную «координату» блока — $\min(\bar{k}_r)$, расстояние Хаусдорфа между двумя блоками — $d(\bar{k}_u, \bar{k}_r)$.

Из условия (12) вытекает, что $f_0(u_1, \dots, u_s) \in L_2(\mathfrak{X}^{\#(T_1)} \times \dots \times \mathfrak{X}^{\#(T_s)}, F_{T_1} \times \dots \times F_{T_s})$, где $u_r \in \mathfrak{X}^{\#(T_r)}$, F_{T_r} — распределение векторов T_r .

Таким образом, ситуация сводится к случаю независимых аргументов, описанному в [12] (см. также [5], [2]). В каждом пространстве $L_2(\mathfrak{X}^{\#(T_r)}, F_{T_r})$ можно также построить ортонормированный базис $\{e_l^{(r)}(u_r)\}_{l \geq 0}$, такой, что $e_0^{(r)}(u_r) \equiv 1$. Из ортогональности следует, что $\mathbf{E} e_l^{(r)}(\bar{X}_{\bar{k}_r}) = 0$ для $l \geq 1$.

Далее, семейство функций

$$\{e_{l_1}^{(1)}(u_1) \cdots e_{l_s}^{(s)}(u_s)\}_{l_1, \dots, l_s=0,1,\dots}$$

будет ортонормированным базисом гильбертова пространства

$$L_2(\mathfrak{X}^{\#(T_1)} \times \dots \times \mathfrak{X}^{\#(T_s)}, F_{T_1} \times \dots \times F_{T_s}).$$

Тогда $f_0(u_1, \dots, u_s)$ можно представить в виде ряда

$$f_0(u_1, \dots, u_s) = \sum_{l_1, \dots, l_s=0}^{\infty} f_{l_1 \dots l_s} e_{l_1}^{(1)}(u_1) \cdots e_{l_s}^{(s)}(u_s), \quad (17)$$

частичные суммы которого сходятся в норме упомянутого пространства. Соответственно, подставив вместо переменных $\{u_1, \dots, u_s\}$ случайные величины $\{\bar{X}_{\bar{k}_1}, \dots, \bar{X}_{\bar{k}_s}\}$, принадлежащие интересующему нас классу,

получим ряд, частичные суммы которого сходятся в среднеквадратичном к ядру $f(X_{j_1}, \dots, X_{j_d})$.

Очевидно, что в случаях $\#(T_r) = 1$ базис $\{e_l^{(r)}(t)\}_{l \geq 0}$ является базисом пространства $L_2(\mathfrak{X}, F)$. Без ограничения общности можно считать его совпадающим с ранее введенным базисом $\{e_l(t)\}_{l \geq 0}$.

Для формулировки основных результатов введем некоторые понятия и обозначения. Пусть $\{\tau_i\}$ — гауссовская центрированная последовательность с ковариациями

$$M_{kl} = \mathbf{E} \tau_k \tau_l = \mathbf{E} e_k(X_1) e_l(X_1) + \sum_{j=1}^m [\mathbf{E} e_k(X_1) e_l(X_{j+1}) + \mathbf{E} e_l(X_1) e_k(X_{j+1})]. \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что

$$M_{kl} = \delta_{kl} + \sum_{j=1}^m [\mathbf{E} e_k(X_1) e_l(X_{j+1}) + \mathbf{E} e_l(X_1) e_k(X_{j+1})],$$

где δ_{kl} — символ Кронекера. Очевидно, что в случае m -зависимости выражение (18) совпадает с (11).

При этом в (18) допускается вырожденность в нуле тех или иных τ_i при $M_{ii} = 0$.

Пусть $I(l_1, \dots, l_s, q)$, где $q \leq s/2$, — множество выборок (без возвращения и фиксации порядка извлечения) объема q , элементами которых являются пары чисел из множества индексов $\{l_1, \dots, l_s\}$, которые предполагаются попарно различимыми. Количество всевозможных таких выборок совпадает с числом всевозможных вариантов фиксации в множестве натуральных чисел $\{1, \dots, s\}$ ровно q пар без общих элементов:

$$\frac{s!}{2^q (s - 2q)! q!}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} p &= \{\{l_{i_1}, l_{i_2}\}, \dots, \{l_{i_{2q-1}}, l_{i_{2q}}\}\} \in I(l_1, \dots, l_s, q); \\ M_p &= M_{l_{i_1} l_{i_2}} \cdots M_{l_{i_{2q-1}} l_{i_{2q}}}; \\ p^c &= \{l_1, \dots, l_s\} \setminus (\{l_{i_1}, l_{i_2}\} \cup \dots \cup \{l_{i_{2q-1}}, l_{i_{2q}}\}). \end{aligned} \quad (19)$$

Зафиксируем некоторый класс эквивалентности K векторов, разбивающихся на $s \geq [d/2] + 1$ неделимых блоков, из которых s_1 одноэлементных, а остальные двухэлементных. Обозначим множество таких классов $\mathfrak{K}^{(s_1)}$. Отдельно выделим те классы из $\mathfrak{K}^{(s_1)}$, в которых все двухэлементные блоки образованы двумя различными координатами. Обозначим множество таких классов $\mathfrak{K}_1^{(s_1)}$. Пусть $\{X_{j_1}, \dots, X_{j_d}\} \in K$ и одноэлементные блоки соответствуют в этом векторе координатам $j_{k_1}, \dots, j_{k_{s_1}}$,

где $1 \leq k_1 < \dots < k_{s_1} \leq d$. Тогда выделим коэффициенты разложения (17) при таких базисных функциях $e_{l_1}^{(1)} \dots e_{l_{s_1}}^{(s)}$, где одноэлементным блокам соответствуют некоторые $e_{i_1}, \dots, e_{i_{s_1}}$, а двухэлементным — нулевой элемент базиса, тождественно равный 1:

$$f_{i_1 \dots i_{s_1}}^{(K)} = \mathbf{E} f(X_{j_1}, \dots, X_{j_d}) e_{i_1}(X_{j_{k_1}}) \dots e_{i_{s_1}}(X_{j_{k_{s_1}}}). \quad (20)$$

Основные результаты работы содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 1. Пусть каноническое ядро $f(t_1, \dots, t_d)$ и последовательность m -зависимых случайных величин $\{X_i\}$ таковы, что для всех мультииндексов $\{j_1, \dots, j_d\}$, разбивающихся на более чем $[d/2]$ неделимых блоков, выполнено (12), для остальных выполнено (13). Тогда

$$\begin{aligned} V_n \xrightarrow{d} & \sum_{k=0}^{[(d-1)/2]} \sum_{i_1, \dots, i_{d-2k}=1}^{\infty} \sum_{K \in \mathfrak{K}^{(d-2k)}} f_{i_1 \dots i_{d-2k}}^{(K)} \sum_{q=0}^{[d/2-k]} (-1)^q \\ & \times \sum_{p \in I(i_1, \dots, i_{d-2k}, q)} M_p \prod_{i \in p^c} \tau_i + C, \end{aligned} \quad (21)$$

где ряд в правой части сходится в среднеквадратичном, $\{\tau_i\}$ — гауссовская центрированная последовательность с ковариациями (18); $C = 0$ в случае нечетного d , в противном случае

$$C = \sum_{K' \in \mathfrak{K}^{(0)}} \mathbf{E} f(X_{j'_1}, \dots, X_{j'_d}).$$

Здесь $\{X_{j'_1}, \dots, X_{j'_d}\}$ — некоторый вектор из класса K' .

Теорема 2. Пусть условия теоремы 1 выполнены для мультииндексов $\{j_1, \dots, j_d\}$ из области суммирования кратной суммы в (3). Тогда

$$\begin{aligned} U_n \xrightarrow{d} & \sum_{k=0}^{[(d-1)/2]} \sum_{i_1, \dots, i_{d-2k}=1}^{\infty} \sum_{K \in \mathfrak{K}_1^{(d-2k)}} f_{i_1 \dots i_{d-2k}}^{(K)} \sum_{q=0}^{[d/2-k]} (-1)^q \\ & \times \sum_{p \in I(i_1, \dots, i_{d-2k}, q)} M_p \prod_{i \in p^c} \tau_i + C, \end{aligned} \quad (22)$$

где ряд в правой части сходится в среднеквадратичном, τ_i определены выше, $C = 0$ в случае нечетного d , в противном случае

$$C = \sum_{K' \in \mathfrak{K}_1^{(0)}} \mathbf{E} f(X_{j'_1}, \dots, X_{j'_d}).$$

Здесь $\{X_{j'_1}, \dots, X_{j'_d}\}$ — некоторый вектор из класса K' .

З а м е ч а н и е 1. Сумму $\sum_{K \in \mathfrak{K}^{(d-2k)}}$ можно расписать следующим образом:

$$\sum_{K \in \mathfrak{K}^{(d-2k)}} = \sum_{1 \leq k_{d-2k+1} < \dots < k_d \leq d} \sum_{p_1 \in I(k_{d-2k+1}, \dots, k_d, k)} \sum_{-m \leq m_1, \dots, m_k \leq m}, \quad (23)$$

где $k_{d-2k+1}, \dots, k_d$ — номера координат, входящих в состав двухэлементных блоков, p_1 — разбиение их на k пар, m_i — разность между большей и меньшей координатами i -го двухэлементного блока (эти блоки можно упорядочить, скажем, по возрастанию меньшей координаты).

Сумма $\sum_{K' \in \mathfrak{K}^{(0)}}$, как частный случай (23), записывается следующим образом:

$$\sum_{K' \in \mathfrak{K}^{(0)}} = \sum_{p' \in I(1, \dots, d, d/2)} \sum_{-m \leq m_1, \dots, m_{d/2} \leq m}.$$

Соответственно, сумма $\sum_{K \in \mathfrak{K}_1^{(d-2k)}}$ расписывается как

$$\sum_{K \in \mathfrak{K}_1^{(d-2k)}} = \sum_{1 \leq k_{d-2k+1} < \dots < k_d \leq d} \sum_{p \in I(k_{d-2k+1}, \dots, k_d, k)} \sum_{1 \leq |m_1|, \dots, |m_k| \leq m},$$

а сумма $\sum_{K' \in \mathfrak{K}_1^{(0)}}$ — как

$$\sum_{K' \in \mathfrak{K}_1^{(0)}} = \sum_{p' \in I(1, \dots, d, d/2)} \sum_{1 \leq |m_1|, \dots, |m_{d/2}| \leq m}.$$

З а м е ч а н и е 2. В заключение работы будет показано, что при выполнении как условий теоремы 1, так и условий теоремы 2 из [2] правая часть (21) совпадает с правой частью (10). Аналогично, при выполнении как условий теоремы 2, так и условий теоремы 1 из [2] правая часть (22) совпадает с правой частью (9).

П р и м е р. При $d = 2$ слабый предел V -статистики имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} f_{ij}(\tau_i \tau_j - M_{ij}) + \sum_{k=-m}^m \mathbf{E} f(X_{m+1}, X_{k+m+1}),$$

где

$$f_{ij} = \mathbf{E} f(X_1, X_{m+2}) e_i(X_1) e_j(X_{m+2}).$$

Если же $d = 3$, то слабый предел статистики Мизеса выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{\infty} f_{i_1 i_2 i_3}(\tau_{i_1} \tau_{i_2} \tau_{i_3} - M_{i_1 i_2} \tau_{i_3} - M_{i_1 i_3} \tau_{i_2} - M_{i_2 i_3} \tau_{i_1}) \\ & + \sum_{k=-m}^m \sum_{i=1}^{\infty} (f_i^{k,1} + f_i^{k,2} + f_i^{k,3}) \tau_i, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_{i_1 i_2 i_3} &= \mathbf{E} f(X_1, X_{m+2}, X_{2m+3}) e_{i_1}(X_1) e_{i_2}(X_{m+2}) e_{i_3}(X_{2m+3}), \\ f_i^{k,1} &= \mathbf{E} f(X_{3m+2}, X_{m+1}, X_{m+k+1}) e_i(X_{3m+2}), \\ f_i^{k,2} &= \mathbf{E} f(X_{m+1}, X_{3m+2}, X_{m+k+1}) e_i(X_{3m+2}), \\ f_i^{k,3} &= \mathbf{E} f(X_{m+1}, X_{m+k+1}, X_{3m+2}) e_i(X_{3m+2}). \end{aligned}$$

3. Доказательство теорем 1, 2 и замечания 2.

Доказательство теоремы 1. Для нахождения слабого предела V -статистики разобьем область суммирования в (2) на введенные выше классы, количество которых не зависит от n . Сначала найдем предельное распределение нормированной суммы по мультииндексам фиксированного класса.

Пусть векторы фиксированного класса разбиваются на $s > [d/2]$ неделимых блоков. Для каждого T_i зафиксируем произвольный элемент соответствующего базиса с номером l_i . Найдем слабый предел выражения

$$n^{-d/2} \sum_* e_{l_1}^{(1)}(\bar{X}_{\bar{k}_1}) \cdots e_{l_s}^{(s)}(\bar{X}_{\bar{k}_s}), \quad (24)$$

где $\sum_*$ обозначает суммирование по всем векторам выделенного класса. В сумме (24) индексы каждого блока пробегает значения от 1 до n (с точностью до длины блока), при этом расстояния между индексами различных блоков должны быть больше m . Добавляя и отнимая соответствующие слагаемые, можно представить (24) в виде линейной комбинации произведений величин вида

$$S(T) = n^{-\#(T)/2} \sum_{\min(\bar{k})=1}^n \tilde{e}(\bar{X}_{\bar{k}}), \quad (25)$$

где $\#$ — считающая мера, $\bar{X}_{\bar{k}}$ — некоторый блок наблюдений (а вектор $\bar{k}$, соответственно, — индексов), либо совпадающий с одним из $\bar{k}_i$, либо «склеенный» из нескольких. Расстояния между соседними индексами в $\bar{k}$ не превышают m . Сумма длин блоков в каждом произведении равна d . Первым слагаемым в упомянутой линейной комбинации является $S(T_1) \cdots S(T_s)$, в остальных слагаемых количество блоков-сомножителей будет уменьшаться, а их длина соответственно увеличиваться.

Видно, что (25) является суммой k -зависимых одинаково распределенных величин, где $k \leq dm$. Если $\#(T) = 2$, то $S(T)$ будет сходиться по вероятности к константе по закону больших чисел для k -зависимых случайных величин, так как первый момент слагаемых в $S(T)$ будет, очевидно, конечен.

Покажем, что в случае $\#(T) > 2$ величина $S(T)$ сходится к нулю по вероятности. Ее можно расписать в виде

$$S(T) = S_1 + \cdots + S_k,$$

где все S_i являются суммами независимых одинаково распределенных величин и количество слагаемых в каждой S_i эквивалентно n/k . Рассмотрим одну из таких сумм, скажем, S_1 , и покажем, что она стремится

к нулю по вероятности при $\#(T) > 2$. Имеем

$$S_1 = n^{-\#(T)/2} \sum_{\min(\bar{k})=ik+1, 0 \leq i \leq [n/k]-1} \tilde{e}(\bar{X}_{\bar{k}}).$$

Как уже было отмечено, блок $\bar{k}$ «склеен» из одного или нескольких блоков $\bar{k}_r$, т.е. $\tilde{e}(\bar{X}_{\bar{k}})$ является произведением нескольких $e_{l_r}^{(r)}(\bar{X}_{\bar{k}_r})$, только блоки-компоненты уже не будут независимыми. Требуемая сходимости к нулю будет доказана, если показать, что для любого r

$$\max |n^{-1/2} e_{l_r}^{(r)}(\bar{X}_{\bar{k}_r})| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0,$$

где максимум ищется по всем $[n/k]$ слагаемым S_1 . Так как все эти слагаемые независимы, то последнее соотношение выполняется, если имеет место асимптотическое соотношение $\mathbf{P}(|e_{l_r}^{(r)}(\bar{X}_{\bar{k}_r})| > \varepsilon n^{1/2}) = o(1/n)$ для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ или, иначе говоря, $\mathbf{P}(|e_{l_r}^{(r)}(\bar{X}_{\bar{k}_r})| > x) = o(1/x^2)$ при $x \rightarrow \infty$. Так как по построению $e_{l_r}^{(r)}(\bar{X}_{\bar{k}_r})$ имеет конечный второй момент, равный единице, требуемое свойство выполнено.

Значит, если изначально существует такой блок, что $\#(T_r) \geq 3$, то и вся сумма (24) сходится к нулю по вероятности. Будем теперь рассматривать лишь те классы, в которых каждый блок содержит не более двух элементов.

В [2, доказательство теоремы 1] показано, что последовательность

$$\left\{ n^{-1/2} \sum_{j=1}^n e_1(X_j), n^{-1/2} \sum_{j=1}^n e_2(X_j), \dots \right\} \quad (26)$$

слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к центрированной гауссовской последовательности $\{\tau_i\}$ с ковариационной матрицей (18).

Заметим, что в случае $\#(T_r) = 1$ в силу вырожденности ядра в разложении (17) коэффициенты $f_{l_1 \dots l_s}$ равны нулю при $l_r = 0$ (подробнее см. [5], [2, предложение 1]), т.е. есть смысл рассматривать лишь элементы базиса $e_l(t)$ для $l \geq 1$.

Далее, если $\tilde{e}(\bar{X}_{\bar{k}})$ совпадает с некоторым $e_l^{(r)}(\bar{X}_{\bar{k}_r})$, где $\#(T_r) = 2$, то

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n e_l^{(r)}(\bar{X}_{\bar{k}_r}) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{E} e_l^{(r)}(\bar{X}_{\bar{k}_r}),$$

причем, как было замечено ранее, $\mathbf{E} e_l^{(r)}(\bar{X}_{\bar{k}_r}) = 0$ при $l > 0$ и $\mathbf{E} e_l^{(r)}(\bar{X}_{\bar{k}_r}) = 1$ при $l = 0$. Значит, в случае двухэлементных блоков стоит рассматривать лишь нулевой элемент базиса $e_0^{(r)}(\bar{X}_{\bar{k}_r}) \equiv 1$.

Пусть в нашем классе имеется s_1 одноэлементных блоков и $(d - s_1)/2$ двухэлементных, причем в выражении (24) одноэлементным блокам соответствуют элементы базиса, отличные от нулевого, а двухэлементным, напротив, лишь тождественная единица.

Видно, что $S(T)$ либо сходится по вероятности к константе, либо совпадает с некоторым элементом последовательности (26). Так как (24) представляет собой конечную линейную комбинацию произведений различных $S(T)$, вышесказанное позволяет получить предел по распределению для выражения в (24), заменив в этой линейной комбинации все $S(T)$ на их слабые пределы. Найдем этот предел.

В силу того, что двухэлементным блокам соответствует лишь нулевой элемент базиса, от них зависит лишь количество слагаемых в (24) при фиксированных одноэлементных T_r . Нетрудно проверить, что это количество будет эквивалентно $n^{(d-s_1)/2}$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, учитывая конечность моментов слагаемых, в пределе сумма (24) зависит лишь от одноэлементных блоков и эквивалентна величине

$$n^{-s_1/2} \sum_{|u_i - u_j| > m, 1 \leq i \neq j \leq s_1} e_{l'_1}(X_{u_1}) \cdots e_{l'_{s_1}}(X_{u_{s_1}}) =: g_{s_1}(l'_1, \dots, l'_{s_1}).$$

Лемма 1. *Справедлива следующая сходимость распределений:*

$$g_{s_1}(l_1, \dots, l_{s_1}) \xrightarrow{d} \sum_{q=0}^{[s_1/2]} (-1)^q \sum_{p \in I(l_1, \dots, l_{s_1}, q)} M_p \prod_{i \in p^c} \tau_i, \quad (27)$$

где $\{\tau_i\}$ — гауссовская последовательность с ковариационной матрицей (18).

Доказательство. Из того факта, что если $\#(T) \geq 3$, то $S(T) \rightarrow 0$ по вероятности при $n \rightarrow \infty$, нетрудно вывести следующую рекуррентную формулу для $g_{s_1}(l_1, \dots, l_{s_1})$:

$$\begin{aligned} g_{s_1}(l_1, \dots, l_{s_1}) &= n^{-1/2} \sum_{j=1}^n e_{l_1}(X_j) g_{s_1-1}(l_2, \dots, l_{s_1}) - \sum_{i=2}^{s_1} g_{s_1-2}(l_2, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_{s_1}) n^{-1} \\ &\quad \times \left(\sum_{j=1}^n e_{l_1}(X_j) e_{l_i}(X_j) + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n-k} (e_{l_1}(X_j) e_{l_i}(X_{j+k}) + e_{l_1}(X_{j+k}) e_{l_i}(X_j)) \right) \\ &\quad + o_{\mathbf{P}}(1). \end{aligned} \quad (28)$$

Устремляя n к бесконечности, получим рекуррентную асимптотическую формулу для пределов:

$$\begin{aligned} \lim g_{s_1}(l_1, \dots, l_{s_1}) &= \tau_{l_1} \lim g_{s_1-1}(l_2, \dots, l_{s_1}) \\ &\quad - \sum_{i=2}^{s_1} M_{l_1 l_i} \lim g_{s_1-2}(l_2, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_{s_1}). \end{aligned} \quad (29)$$

Докажем (27) индукцией по s_1 . Легко видеть, что для $s_1 = 1$ и $s_1 = 2$ утверждение леммы выполнено (считаем $g_0 \equiv 1$). Далее, пусть оно вы-

полнено для всех $s_2 < s_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{s_1} g_{s_1}(l_1, \dots, l_{s_1}) = & \tau_{l_1} \sum_{q=0}^{[(s_1-1)/2]} (-1)^q \sum_{p \in I(l_2, \dots, l_{s_1}, q)} M_p \prod_{i \in p^c} \tau_i \\ & - \sum_{i=2}^{s_1} M_{l_1 l_i} \sum_{q=0}^{[(s_1-2)/2]} (-1)^q \sum_{p \in I(l_2, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_{s_1}, q)} M_p \prod_{j \in p^c} \tau_j. \end{aligned}$$

Для $q \leq [(s_1 - 1)/2]$ множество $I(l_1, \dots, l_{s_1}, q)$ состоит из элементов $I(l_2, \dots, l_{s_1}, q)$ и элементов вида $\{l_1, l_i\} \cup p$, где $p \in I(l_2, \dots, l_{i-1}, l_{i+1}, \dots, l_{s_1}, q-1)$, а в случае четного s_1 для $q = s_1/2$ — только из элементов второго типа. Учитывая это, получаем утверждение леммы.

З а м е ч а н и е 3. В случае $m = 0$ (т.е. когда мы имеем дело с независимыми наблюдениями) $M_{ij} = \delta_{ij}$, величины τ_i являются независимыми стандартными нормальными величинами, а выражение в правой части (27) совпадает с $\prod_{j=1}^{\infty} H_{\nu_j(l_1, \dots, l_{s_1})}(\tau_j)$, определенным ранее в (6).

Лемма 2. Пусть векторы фиксированного класса K разбиваются на $s \geq [d/2] + 1$ неделимых блоков, из которых s_1 одноэлементных. Тогда

1) если в этом классе существует такое T_u , что $\#(T_u) \geq 3$, то

$$n^{-d/2} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_d \leq n: \{X_{j_1}, \dots, X_{j_d}\} \in K} f(X_{j_1}, \dots, X_{j_d}) \xrightarrow{d} 0; \quad (30)$$

2) если длины всех блоков не превышают 2, то

$$\begin{aligned} n^{-d/2} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_d \leq n: \{X_{j_1}, \dots, X_{j_d}\} \in K} f(X_{j_1}, \dots, X_{j_d}) \\ \xrightarrow{d} \sum_{i_1, \dots, i_{s_1}=1}^{\infty} f_{i_1 \dots i_{s_1}}^{(K)} \sum_{q=0}^{[s_1/2]} (-1)^q \sum_{p \in I(i_1, \dots, i_{s_1}, q)} M_p \prod_{i \in p^c} \tau_i, \end{aligned} \quad (31)$$

где ряд в правой части сходится в среднеквадратичном.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (17)

$$\begin{aligned} n^{-d/2} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_d \leq n: \{X_{j_1}, \dots, X_{j_d}\} \in K} f(X_{j_1}, \dots, X_{j_d}) \\ = \sum_{l_1, \dots, l_s=0}^{\infty} f_{l_1 \dots l_s} n^{-d/2} \sum_{d(\bar{k}_u, \bar{k}_v) > m, 1 \leq u \neq v \leq s} e_{l_1}^{(1)}(\bar{X}_{\bar{k}_1}) \dots e_{l_s}^{(s)}(\bar{X}_{\bar{k}_s}) \\ = \sum_{l_1, \dots, l_s=0}^N f_{l_1 \dots l_s} n^{-d/2} \sum_{d(\bar{k}_u, \bar{k}_v) > m, 1 \leq u \neq v \leq s} e_{l_1}^{(1)}(\bar{X}_{\bar{k}_1}) \dots e_{l_s}^{(s)}(\bar{X}_{\bar{k}_s}) \\ + \sum_{\max(l_1, \dots, l_s) > N} f_{l_1 \dots l_s} n^{-d/2} \sum_{d(\bar{k}_u, \bar{k}_v) > m, 1 \leq u \neq v \leq s} e_{l_1}^{(1)}(\bar{X}_{\bar{k}_1}) \dots e_{l_s}^{(s)}(\bar{X}_{\bar{k}_s}). \end{aligned} \quad (32)$$

В случае наличия такого T_u , что $\#(T_u) \geq 3$, из разложения величины (24) в сумму произведений (25) и рассуждений после введения этих формул следует, что первое слагаемое в правой части (32) сходится к нулю по вероятности. В ситуации с одно- и двухэлементными блоками, применив лемму 1, нетрудно видеть, что

$$\sum_{l_1, \dots, l_s=0}^N f_{l_1 \dots l_s} n^{-d/2} \sum_{d(\bar{k}_u, \bar{k}_v) > m, 1 \leq u \neq v \leq s} e_{l_1}^{(1)}(\bar{X}_{\bar{k}_1}) \dots e_{l_s}^{(s)}(\bar{X}_{\bar{k}_s}) \\ \xrightarrow{d} \sum_{i_1, \dots, i_{s_1}=1}^N f_{i_1 \dots i_{s_1}}^{(K)} \sum_{q=0}^{[s_1/2]} (-1)^q \sum_{p \in I(i_1, \dots, i_{s_1}, q)} M_p \prod_{i \in p^c} \tau_i.$$

Докажем, что при $N \rightarrow \infty$ второе слагаемое в правой части (32) сходится к нулю в среднеквадратичном для любого класса, содержащего не менее $[d/2] + 1$ неделимых блоков. Для удобства записи будем обозначать $\bar{X}^{(i)}$ различные выборки из класса K :

$$\mathbf{E} \left(n^{-d/2} \sum_{\max(l_1, \dots, l_s) > N} f_{l_1 \dots l_s} \sum_{d(\bar{k}_u, \bar{k}_v) > m, 1 \leq u \neq v \leq s} e_{l_1}^{(1)}(\bar{X}_{\bar{k}_1}) \dots e_{l_s}^{(s)}(\bar{X}_{\bar{k}_s}) \right)^2 \\ = n^{-d} \sum_{\bar{X}^{(1)}, \bar{X}^{(2)} \in K} \sum_{\max\{l_k\}, \max\{i_k\} > N} f_{l_1 \dots l_s} f_{i_1 \dots i_s} \mathbf{E} e_{l_1}^{(1)}(\bar{X}_{\bar{k}_1}^{(1)}) \\ \dots e_{l_s}^{(s)}(\bar{X}_{\bar{k}_s}^{(1)}) e_{i_1}^{(1)}(\bar{X}_{\bar{k}'_1}^{(2)}) \dots e_{i_s}^{(s)}(\bar{X}_{\bar{k}'_s}^{(2)}). \quad (33)$$

Внесение знака математического ожидания под знак ряда здесь законно в силу сходимости соответствующих рядов в среднеквадратичном.

Заметим, что если в классе $s \geq [d/2] + 1$ неделимых блоков, то среди них по крайней мере $2s - d$ одноэлементных. Следовательно, среди блоков $\bar{X}_{\bar{k}_1}^{(1)}, \dots, \bar{X}_{\bar{k}'_s}^{(2)}$ как минимум $4s - 2d$ одноэлементных, или, иначе, не более $2d - 2s$ блоков большей длины. Если хотя бы один из одноэлементных блоков находится на расстоянии, большем, чем m , от всех остальных, то математическое ожидание в правой части (33) будет равно нулю (независимо от индексов $l_1, \dots, l_s, i_1, \dots, i_s$). Значит, для того, чтобы слагаемые отличались от нуля, каждый одноэлементный блок должен находиться на расстоянии, не превышающем m , либо от другого одноэлементного блока, либо от блока большей длины. Способов выбрать $\bar{X}^{(1)}$ и $\bar{X}^{(2)}$, удовлетворяющие таким условиям, не больше

$$C(d, m) n^{2d-2s} n^{2s-d} \leq C(d, m) n^d,$$

где $C(d, m)$ — константа, зависящая только от d и m . А для фиксированных $\bar{X}^{(1)}$ и $\bar{X}^{(2)}$

$$\mathbf{E} \sum_{\max\{l_k\}, \max\{i_k\} > N} f_{l_1 \dots l_s} f_{i_1 \dots i_s} e_{l_1}^{(1)}(\bar{X}_{\bar{k}_1}^{(1)}) \dots e_{l_s}^{(s)}(\bar{X}_{\bar{k}_s}^{(1)}) e_{i_1}^{(1)}(\bar{X}_{\bar{k}'_1}^{(2)}) \dots e_{i_s}^{(s)}(\bar{X}_{\bar{k}'_s}^{(2)})$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[\mathbf{E} \left(\sum_{\max\{l_k\} > N} f_{l_1 \dots l_s} e_{l_1}^{(1)}(\overline{X}_{\overline{k}_1}^{(1)}) \dots e_{l_s}^{(s)}(\overline{X}_{\overline{k}_s}^{(1)}) \right)^2 \right]^{1/2} \\
&\quad \times \left[\mathbf{E} \left(\sum_{\max\{i_k\} > N} f_{i_1 \dots i_s} e_{i_1}^{(1)}(\overline{X}_{\overline{k}_1'}^{(2)}) \dots e_{i_s}^{(s)}(\overline{X}_{\overline{k}_s'}^{(2)}) \right)^2 \right]^{1/2} \\
&= \sum_{\max\{l_k\} > N} f_{l_1 \dots l_s}^2.
\end{aligned}$$

А значит,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} \left(n^{-d/2} \sum_{\max(l_1, \dots, l_s) > N} f_{l_1 \dots l_s} \sum_{d(\overline{k}_u, \overline{k}_v) > m, \ 1 \leq u \neq v \leq s} e_{l_1}^{(1)}(\overline{X}_{\overline{k}_1}) \dots e_{l_s}^{(s)}(\overline{X}_{\overline{k}_s}) \right)^2 \\
&\leq C(d, m) \sum_{\max\{l_k\} > N} f_{l_1 \dots l_s}^2 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Теперь покажем, что при $N \rightarrow \infty$ «хвост» предельной величины в (31) сходится к нулю в среднеквадратичном.

Пусть $\{i_1'', \dots, i_{s_1}''\}$ — некоторая перестановка $\{i_1', \dots, i_{s_1}'\}$. Для начала докажем, что

$$\sum_{\max\{i_k\}, \max\{i_k''\} > N} |f_{i_1 \dots i_{s_1}} f_{i_1' \dots i_{s_1}'}| |M_{i_1 i_1''} \dots M_{i_{s_1} i_{s_1}''}| \rightarrow 0$$

при коэффициентах $f_{i_1 \dots i_{s_1}}$, суммируемых в квадрате. Ввиду определения M_{kl} достаточно для произвольных $j_1, \dots, j_{s_1}$ показать, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1, \dots, i_{s_1}, i_1', \dots, i_{s_1}' = 1}^{\infty} |f_{i_1 \dots i_{s_1}} f_{i_1' \dots i_{s_1}'}| \left| \mathbf{E} e_{i_1}(X_1) e_{i_1'}(X_{j_1+1}) \right| \\
&\quad \dots \left| \mathbf{E} e_{i_{s_1}}(X_1) e_{i_{s_1}'}(X_{j_{s_1}+1}) \right| < \infty.
\end{aligned}$$

Сначала зафиксируем все индексы, кроме i_{s_1}, i_{s_1}'' , и проведем суммирование только по последним:

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{E} e_{i_1}(X_1) e_{i_1''}(X_{j_1+1})| \dots |\mathbf{E} e_{i_{s_1-1}}(X_1) e_{i_{s_1-1}''}(X_{j_{s_1-1}+1})| \\
&\quad \times \sum_{i_{s_1}, i_{s_1}'' = 1}^{\infty} |f_{i_1 \dots i_{s_1}} f_{i_1' \dots i_{s_1}'}| \left| \mathbf{E} e_{i_{s_1}}(X_1) e_{i_{s_1}'}(X_{j_{s_1}+1}) \right| \\
&\leq \left| \mathbf{E} e_{i_1}(X_1) e_{i_1''}(X_{j_1+1}) \right| \dots \left| \mathbf{E} e_{i_{s_1-1}}(X_1) e_{i_{s_1-1}''}(X_{j_{s_1-1}+1}) \right| \\
&\quad \times \left(\sum_{i_{s_1}=1}^{\infty} f_{i_1 \dots i_{s_1}}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i_{s_1}'=1}^{\infty} f_{i_1' \dots i_{s_1}'}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Аналогично, суммируя последовательно по каждой паре индексов и учитывая, что $\{i_1'', \dots, i_{s_1}''\} = \{i_1', \dots, i_{s_1}'\}$, получаем

$$\sum_{i_1, \dots, i_{s_1}, i_1', \dots, i_{s_1}'=1}^{\infty} |f_{i_1 \dots i_{s_1}} f_{i_1' \dots i_{s_1}'}| |M_{i_1 i_1'} \dots M_{i_{s_1} i_{s_1}'}| \leq (2m+1)^{s_1} \sum_{i_1, \dots, i_{s_1}=1}^{\infty} f_{i_1 \dots i_{s_1}}^2.$$

Запишем второй момент интересующего нас хвоста предельного ряда в правой части (31):

$$\begin{aligned} & \sum_{\max\{i_k\}, \max\{i_k'\} > N} f_{i_1 \dots i_{s_1}} f_{i_1' \dots i_{s_1}'} \sum_{q, q'=0}^{[s_1/2]} (-1)^{q+q'} \\ & \times \sum_{p \in I(i_1, \dots, i_{s_1}, q)} \sum_{p' \in I(i_1', \dots, i_{s_1}', q')} M_p M_{p'} \mathbf{E} \prod_{i \in p^c} \tau_i \prod_{i' \in p'^c} \tau_{i'} \\ & =: \sum_{\max\{i_k\}, \max\{i_k'\} > N} f_{i_1 \dots i_{s_1}} f_{i_1' \dots i_{s_1}'} \Sigma^*. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\Sigma^* = \sum_{\{i_1'', \dots, i_{s_1}''\}} M_{i_1 i_1''} \dots M_{i_{s_1} i_{s_1}''}, \quad (34)$$

где суммирование в правой части проводится по всем различным перестановкам $\{i_1', \dots, i_{s_1}'\}$. Воспользуемся представлением смешанных моментов гауссовской последовательности через элементы ковариационной матрицы [3, п. 1.3]:

$$\mathbf{E} \prod_{i \in p^c} \tau_i \prod_{i' \in p'^c} \tau_{i'} = \sum_{p_0 \in I(p^c, p'^c, 2s_1 - 2q - 2q')} M_{p_0},$$

таким образом,

$$\Sigma^* = \sum_{q, q'=0}^{[s_1/2]} (-1)^{q+q'} \sum_{p \in I(i_1, \dots, i_{s_1}, q)} \sum_{p' \in I(i_1', \dots, i_{s_1}', q')} \sum_{p_0 \in I(p^c, p'^c, 2s_1 - 2q - 2q')} M_p M_{p'} M_{p_0}.$$

Очевидно, правая часть (34) соответствует в вышеприведенной сумме части слагаемых при $q = 0$ и $q' = 0$, так как слагаемые этой правой части составлены из пар, в которых один индекс принадлежит $\{i_1, \dots, i_{s_1}\}$, а другой $\{i_1', \dots, i_{s_1}'\}$. Значит, эти слагаемые не могут содержать в качестве множителя M_p или $M_{p'}$ с соответствующими $q \geq 1$ или $q' \geq 1$. Рассмотрим слагаемые при $q = 0$ и $q' = 0$, не входящие в правую часть (34). Очевидно, они соответствуют всевозможным $p_0 \in I(i_1, \dots, i_{s_1}, i_1', \dots, i_{s_1}', 2s_1)$, содержащим хотя бы одну пару, в которой оба индекса принадлежат $\{i_1, \dots, i_{s_1}\}$ или $\{i_1', \dots, i_{s_1}'\}$. Обозначим все такие пары $p_1, \dots, p_N$, где $N = 2C_{s_1}^2 = s_1(s_1 - 1)$. Имеем

$$\sum_{p_0 \in I(i_1, \dots, i_{s_1}, i_{s_1}', 2s_1): p_j \in p_0, 1 \leq j \leq N} M_{p_0}.$$

Заметим, что если различные пары p_k и p_l имеют один общий индекс, то фиксированное p_0 может содержать лишь одну из них. Используя формулу включения-исключения, а также формулу для математического ожидания произведения гауссовских величин, можно записать введенную сумму следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N M_{p_j} \mathbf{E} \prod_{i \in \{i_1, \dots, i'_{s_1}\} \setminus p_j} \tau_i - \sum_{k < l: p_k \cap p_l = \emptyset} M_{p_k} M_{p_l} \mathbf{E} \prod_{i \in \{i_1, \dots, i'_{s_1}\} \setminus (p_k \cup p_l)} \tau_i \\ & + \dots - \sum_{k_1 < \dots < k_{2[s_1/2]}: p_{k_i} \cap p_{k_j} = \emptyset, i \neq j} M_{p_{k_1}} \dots M_{p_{k_{2[s_1/2]}}} \\ & \times \mathbf{E} \prod_{i \in \{i_1, \dots, i'_{s_1}\} \setminus (p_{k_1} \cup \dots \cup p_{k_{2[s_1/2]}})} \tau_i. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что предложенное разложение в точности совпадает с тем фрагментом суммы $-\Sigma^*$, где хотя бы одно из q и q' больше нуля. Это доказывает равенство (34), а учитывая рассуждения выше, и сходимость предельного ряда в среднеквадратичном. Лемма доказана.

Всевозможные $\{X_{j_1}, \dots, X_{j_d}\}$ делятся на конечное число классов эквивалентности, зависящее только от d и m , следовательно, V -статистику можно разбить на конечное число слагаемых, каждое из которых является нормированной суммой $f(X_{j_1}, \dots, X_{j_d})$ по векторам наблюдений из некоторого фиксированного класса.

Для классов, в которых не менее $[d/2] + 1$ неделимых блоков, слабый предел получен в лемме 2. Для классов, в которых менее $d/2$ или ровно $d/2$ (для четных d) неделимых блоков, пределы (по вероятности) выписаны соответственно в (16) и (14).

В силу рассуждений в начале доказательства теоремы, для перехода к V -статистике можно просуммировать по всем соответствующим классам предельные выражения в правых частях (31) и (14). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Доказательство по сути повторяет доказательство теоремы 1 за тем исключением, что в случае U -статистик мы не рассматриваем классы векторов с повторяющимися элементами. Отсюда закономерно следует, что в двухэлементных блоках расстояние между индексами наблюдений не должно равняться 0, что и отражено в выражениях для $\sum_{K \in \mathfrak{K}_1^{(d-2k)}}$ и $\sum_{K' \in \mathfrak{K}_1^{(0)}}$.

Доказательство замечания 2. Докажем сначала совпадение пределов для статистик Мизеса при выполнении условий обеих интересующих нас в этом случае теорем.

Нетрудно заметить, что слагаемое при $k = 0$ (которому соответствует единственный класс K) и $q = 0$ в правой части (21) совпадает с правой частью (10). Достаточно показать, что при выполнении условий теоремы 2 из [2] оставшаяся сумма равна 0.

Упомянутые условия, как было сказано, обеспечивают сходимость частичных сумм ряда (4) к ядру почти наверное относительно совместного распределения $X_{j_1}, \dots, X_{j_d}$ для любых (в том числе и для совпадающих) $X_{j_1}, \dots, X_{j_d}$ из исходной стационарной последовательности. Таким образом,

$$f_{i_1 \dots i_{d-2k}}^{(K)} = \sum_{i_{d-2k+1}, \dots, i_d=1}^{\infty} f_{(i_1 \dots i_d)} \mathbf{E} e_{i_{l_1}}(X_m) e_{i_{l_2}}(X_{m+m_1}) \times \dots \times \mathbf{E} e_{i_{l_{2k-1}}}(X_m) e_{i_{l_{2k}}}(X_{m+m_k}), \quad (35)$$

где в перестановке $(i_1 \dots i_d)$ индексы $i_{d-2k+1}, \dots, i_d$ занимают места $k_{d-2k+1}, \dots, k_d$ из (23) по порядку, а на остальных местах по порядку расположены $i_1, \dots, i_{d-2k}$. Множество индексов $\{l_1, \dots, l_{2k}\}$ совпадает с множеством $\{d-2k+1, \dots, d\}$, и $\{\{k_{l_1}, k_{l_2}\}, \dots, \{k_{l_{2k-1}}, k_{l_{2k}}\}\} = p_1$ (p_1 задано в (23)). При фиксированных $i_1, \dots, i_{d-2k}$ просуммируем $f_{i_1 \dots i_{d-2k}}^{(K)}$ по классам K с одинаковыми p_1 из (23), но с различными интервалами m_i :

$$\sum_{i_{d-2k+1}, \dots, i_d=1}^{\infty} f_{(i_1 \dots i_d)} M_{i_{l_1} i_{l_2}} \dots M_{i_{l_{2k-1}} i_{l_{2k}}}.$$

Зафиксируем индексы $i_1, \dots, i_d$ и перестановку $(i_1 \dots i_d)$. Далее, выберем из нее $d-2r$ индексов ($0 < r < d/2$), занимающих конкретные $d-2r$ мест в перестановке, которые будут соответствовать p^c . Приведем подобные слагаемые при каждом произведении $f_{(i_1 \dots i_d)} \prod_{i \in p^c} \tau_i$ в (21), используя преобразования выше.

Переобозначим индексы $\{i_1, \dots, i_d\} \setminus p^c$ как $\{j_1, \dots, j_{2r}\}$. Из них некоторые $2k$ индексов ($0 \leq k \leq r$) соответствуют двухэлементным блокам из (23), а оставшиеся $2(r-k) = 2q$ — парам из (21).

Чтобы просуммировать интересующие нас подобные слагаемые по k и классам K , нужно из $2r$ индексов выбрать $2k$ для двухэлементных блоков и обе части разбить на пары. В результате получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \sum_{\{j'_1, \dots, j'_{2k}\} \subset \{j_1, \dots, j_{2r}\}} \sum_{p, p_1} M_p M_{p_1} \\ &= \sum_{\tilde{p} \in I(j_1, \dots, j_{2r}, r)} M_{\tilde{p}} \sum_{k=0}^r C_r^k 1^k (-1)^{r-k} = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$p_1 \in I(j'_1, \dots, j'_{2k}, k), \quad p \in I(\{j_1, \dots, j_{2r}\} \setminus \{j'_1, \dots, j'_{2k}\}, r-k).$$

В случае четного d при $r = d/2$ (т.е. при $p^c = \emptyset$) аналогичным образом доказывается, что все постоянные слагаемые из (21), включая C , также дают в сумме 0.

Теперь докажем совпадение пределов U -статистик в случае выполнения как условий теоремы 2, так и условий теоремы 1 из [2]. Эти условия, как и прежде, по сути дают возможность представить коэффициент $f_{i_1, \dots, i_{d-2k}}^{(K)}$ в виде (35).

Введем обозначения. Если $p = \{\{i_{l_1}, i_{l_2}\}, \dots, \{i_{l_{2q-1}}, i_{l_{2q}}\}\}$, то будем обозначать

$$\delta_p = \delta_{i_{l_1} i_{l_2}} \cdots \delta_{i_{l_{2q-1}} i_{l_{2q}}},$$

$$\widetilde{M}_p = (M_{i_{l_1} i_{l_2}} - \delta_{i_{l_1} i_{l_2}}) \cdots (M_{i_{l_{2q-1}} i_{l_{2q}}} - \delta_{i_{l_{2q-1}} i_{l_{2q}}}).$$

Если в правой части (22) в слагаемых при $k = 0$ для каждого q и p заменить M_p на δ_p , то учитывая замечание 3, получим правую часть (9). Докажем, что разность правых частей (22) и (9) равна нулю.

Рассуждаем таким же образом, как и раньше. Фиксируем перестановку $(i_1 \dots i_d)$ и $d - 2r$ индексов из нее для p^c ($1 < r < d/2$) и приводим подобные слагаемые при $f_{(i_1 \dots i_d)} \prod_{i \in p^c} \tau_i$. Так же обозначаем $\{j_1, \dots, j_{2r}\} = \{i_1, \dots, i_d\} \setminus p^c$. Получаем множитель при $f_{(i_1 \dots i_d)} \prod_{i \in p^c} \tau_i$ (в интересующей нас разности правых частей):

$$\sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} \sum_{\{j'_1, \dots, j'_{2k}\} \subset \{j_1, \dots, j_{2r}\}} \sum_{p, p_1} M_p \widetilde{M}_{p_1} + (-1)^r \sum_{p \in I(j_1, \dots, j_{2r}, r)} (M_p - \delta_p). \quad (36)$$

Здесь $p_1 \in I(j'_1, \dots, j'_{2k}, k)$, $p \in I(\{j_1, \dots, j_{2r}\} \setminus \{j'_1, \dots, j'_{2k}\}, r - k)$, а $\widetilde{M}_{p_1}$ появляется за счет того, что в двухэлементных блоках не может быть одинаковых индексов, в отличие от ситуации со статистиками Мизеса. Последняя сумма в (36) соответствует разности при $k = 0$, согласно сделанному выше замечанию.

Остается показать, что выражение в (36) есть тождественный нуль. Легко видеть, что $p \cup p_1 = \tilde{p} \in I(j_1, \dots, j_{2r}, r)$. Зафиксируем некоторое $\tilde{p}$, т.е. будем рассматривать такие слагаемые из (36), в которых $p \cup p_1 = \tilde{p}$. Пусть $0 \leq v \leq r$ и $p_2 = \{\{j_{l_1}, j_{l_2}\}, \dots, \{j_{l_{2v-1}}, j_{l_{2v}}\}\} \subset \tilde{p}$. Если раскрыть скобки в выражении для $\widetilde{M}_{p_1}$, то интересующие нас слагаемые представимы в виде суммы различных M_{p_2} , умноженных на степени -1 и произведение символов Кронекера.

Рассмотрим сначала $1 \leq v \leq r - 1$ и приведем подобные слагаемые при M_{p_2} (в предположении $p \cup p_1 = \tilde{p}$). Здесь k может принимать значения от $r - v$ до r , при этом среди v пар, образующих p_2 , какие-то $r - k$ образуют p , а остальные относятся к p_1 . Таким образом, следует учесть количество различных вариантов в этом случае. В результате, получаем множитель при M_{p_2} :

$$\sum_{k=r-v}^r (-1)^{r-k} \delta_{\tilde{p}/p_2} (-1)^{r-v} C_v^{r-k} = \delta_{\tilde{p}/p_2} (-1)^{r-v} \sum_{q=0}^v (-1)^q C_v^q = 0.$$

Если $v = 0$, т.е. $M_{p_2} = 1$, то множитель состоит из двух слагаемых, при $k = r$ и $k = 0$:

$$\delta_{\bar{p}}(-1)^r + \delta_{\bar{p}}(-1)^{r+1} = 0.$$

В случае $v = r$, $M_{p_2} = M_{\bar{p}}$, множитель выглядит как в случае статистик Мизеса:

$$\sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} C_v^{r-k} + (-1)^r = 0.$$

Случай $r = d/2$, если d четно, разбирается аналогично. Замечание 2 доказано.

В заключение автор хотел бы поблагодарить И. С. Борисова за постановку задачи и ценные замечания, а также рецензента, указавшего ряд неточностей в первоначальной версии работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов И. С., Быстров А. А.* Предельные теоремы для канонических статистик Мизеса, построенных по зависимым наблюдениям. — Сиб. матем. журн., 2006, т. 47, № 6, с. 1205–1217.
2. *Борисов И. С., Володько Н. В.* Ортогональные ряды и предельные теоремы для канонических U - и V -статистик от стационарно связанных наблюдений. — Матем. труды, 2008, т. 11, № 1, с. 25–48.
3. *Гизман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965, 655 с.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968, 496 с.
5. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Теория U -статистик. Киев: Наукова думка, 1989, 383 с.
6. *Утев С. А.* Суммы случайных величин с φ -перемешиванием. — Труды Ин-та математики СО АН СССР, 1989, т. 13, с. 78–100.
7. *Borisov I. S., Volodko N. V.* Limit theorems and exponential inequalities for canonical U - and V -statistics of dependent trials. — High Dimensional Probability V: The Luminy Volume. Ed. by C. Houdré et al. Beachwood: IMS, 2009, p. 108–130. (IMS Collections, v. 5.)
8. *Eagleson G. K.* Orthogonal expansions and U -statistics. — Austral. J. Statist., 1979, v. 21, № 3, p. 221–237.
9. *Hoeffding W.* A class of statistics with asymptotically normal distribution. — Ann. Math. Statist., 1948, v. 19, p. 293–325.
10. *von Mises R.* On the asymptotic distribution of differentiable statistical functions. — Ann. Math. Statist., 1947, v. 18, p. 309–348.
11. *Rosenthal H. P.* On the subspaces of L^p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables. — Israel J. Math., 1970, v. 8, p. 273–303.
12. *Rubin H., Vitale R.* Asymptotic distribution of symmetric statistics. — Ann. Statist., 1980, v. 8, № 1, p. 165–170.

Поступила в редакцию
19.XII.2008