Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Клоков, О нижних оценках скорости перемешивания для одного класса марковских процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 3, 600–607

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp42>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:42:44

- науки и техники, сер. соврем. пробл. матем., фундам. напр., т. 46. М.: ВИНТИ, 1989.
23. Эллиотт Р. Стохастический анализ и его приложения. М.: Мир, 1986, 351 с.
24. Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Стохастическое исчисление. Итоги науки и техники, сер. соврем. пробл. матем., фундам. напр., т. 45. М.: ВИНТИ, 1989.
25. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968, 427 с.

Поступила в редакцию
30.IV.2004

© 2006 г.

КЛОКОВ С. А.*

О НИЖНИХ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ¹⁾

В работе установлены нижние оценки скорости α -перемешивания для некоторых моделей из одного класса стационарных марковских процессов при выполнении условий возвратности. Дано сравнение с известными верхними оценками скорости β -перемешивания для этого же класса процессов в случаях полиномиальной и субэкспоненциальной сходимости. В последнем случае показано, что оценки являются в определенном смысле наилучшими.

Ключевые слова и фразы: марковские процессы, возвратность, инвариантная мера, коэффициенты перемешивания, полиномиальная скорость, субэкспоненциальная скорость.

1. Введение. Пусть (X_n) — случайный процесс со значениями в $\mathbf{R}^d$. Обозначим через $\mathcal{F}_{\leq n} = \sigma\{X_j: j \leq n\}$ и $\mathcal{F}_{\geq n} = \sigma\{X_j: j \geq n\}$ «прошлое» и «будущее» этого процесса. Существует несколько способов определить понятие слабой зависимости между σ -алгебрами $\mathcal{F}_{\leq m}$ и $\mathcal{F}_{\geq m+n}$ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим следующие три коэффициента перемешивания, введенные в 50–60-х годах М. Розенблаттом [14], А. Н. Колмогоровым и И. А. Брагимовым [9]:

$$\alpha(n) = \sup_{m \geq 0} \sup_{A \in \mathcal{F}_{\leq m}, B \in \mathcal{F}_{\geq m+n}} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|, \quad (1)$$

$$\beta(n) = \sup_{m \geq 0} \mathbf{E} \sup_{B \in \mathcal{F}_{\geq m+n}} \text{var} (\mathbf{P}(B | \mathcal{F}_{\leq m}) - \mathbf{P}(B)), \quad (2)$$

$$\varphi(n) = \sup_{m \geq 0} \sup_{A \in \mathcal{F}_{\leq m}, B \in \mathcal{F}_{\geq m+n}, \mathbf{P}(A) > 0} |\mathbf{P}(B | A) - \mathbf{P}(B)|, \quad (3)$$

где символ var обозначает полную вариацию заряда (меры со знаком).

Если $\alpha(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то говорят, что имеет место α -перемешивание (или сильное перемешивание). Аналогично вводятся β -перемешивание и φ -перемешивание (или равномерно сильное перемешивание). Хорошо известны неравенства между этими коэффициентами:

$$\alpha(n) \leq \beta(n) \leq \varphi(n), \quad (4)$$

* Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия; School of Mathematics, University of Leeds, Leeds LS2 9JT, UK; e-mail: klokov@iitam.omsk.net.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов EPSRC GR/R40746/01 (UK), NFGRF 2301863 (University of Kansas) и РФФИ 03-01-00045.

показывающие, что α -перемешивание является наиболее слабым, а φ -перемешивание — самым сильным из них.

Доказательство того, что стохастические модели обладают свойством перемешивания, важно, поскольку многие результаты из области предельных теорем для слабо зависимых величин и области оценки параметров опираются на предположения о перемешивании и, в частности, на его скорость. Поскольку дать полный библиографический список в этой статье не представляется возможным, мы отсылаем читателя к работам [7]–[9], [12] и спискам литературы в них.

Примеры процессов с перемешиванием получены И. А. Ибрагимовым [9], Ю. А. Давыдовым [5], Р. Брэдли [1]–[4], А. Ю. Веретенниковым [15], [16], М. Н. Малышкиным [11], автором и А. Ю. Веретенниковым [10], С. П. Майном и Р. Л. Твиди [13] и др. Однако степень изученности вопроса о классах случайных процессов, удовлетворяющих тому или иному условию перемешивания, представляется недостаточной.

Результат статьи [5] показывает, что в классе марковских процессов с φ -перемешиванием зависимость либо убывает экспоненциально быстро, либо не убывает совсем в том смысле, что $\varphi(n) \equiv 1$. Во многих важных случаях φ -перемешивание отсутствует. Здесь был бы полезен более слабый тип зависимости вроде α - или β -перемешивания.

В работах [16], [10] рассмотрен один класс марковских процессов при условиях возвратности (описание модели дается в следующем пункте; см. также [15], [16], [11], где вводится аналогичная модель с непрерывным временем) и получены результаты о скорости β -перемешивания. В настоящей статье вычислены нижние оценки коэффициента α -перемешивания для некоторых представителей вышеупомянутого класса процессов. Используя неравенства (4) и верхние оценки для β -перемешивания из [16], [10], можно судить о точности полученных результатов.

Оставшаяся часть статьи имеет следующую структуру. В п. 2 дается описание модели и формулируются известные результаты, относящиеся к ней. В пп. 3 и 4 доказаны нижние оценки для скорости α -перемешивания (а следовательно, и β -перемешивания) для стационарной версии процесса и сделаны выводы.

2. Описание модели и известные результаты. Следуя [16], [10], рассмотрим класс марковских цепей с фазовым пространством $\mathbf{R}^d$, которые могут быть представлены в форме нелинейной авторегрессии:

$$X_{n+1} = g(X_n) + V_{n+1}, \quad (5)$$

где (V_n) — это последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевыми средними, а функция $g: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ удовлетворяет оценкам

$$|g(x)| \leq \begin{cases} |x| - r|x|^{-p}, & |x| > R_0, \\ C_0, & |x| \leq R_0, \end{cases} \quad (6)$$

с некоторым $p \in [0, 1]$. Это условие может быть интерпретировано следующим образом. Вне шара $B_{R_0} = \{x: |x| \leq R_0\}$ функция g обеспечивает «притяжение» к началу координат. Параметры p и r регулируют силу этого притяжения. Внутри шара B_{R_0} функция g предполагается ограниченной.

Напомним определение *локального условия Дёблина* (см. [16]). Пусть B является компактным множеством, $\tau_1 = \inf\{n \geq 0: X_n \in B\}$, $\tau_{k+1} = \inf\{n > \tau_k: X_n \in B\}$. Определим «процесс на B », $X_n^B = X_{\tau_n}$, и обозначим его переходную функцию за n шагов через $P^B(n, x, dy)$. Говорят, что выполнено локальное условие Дёблина, если для каждого достаточно большого R и $B = \{x \in \mathbf{R}^d: |x| \leq R\}$

$$\inf_{x, x' \in B} \int_{\mathbf{R}^d} \min \left\{ 1, \frac{P^B(n, x, dy)}{P^B(n, x', dy)} \right\} P^B(n, x', dy) = q(R) > 0, \quad (D_1)$$

где $P^B(n, x, dy)/P^B(n, x', dy)$ означает производную абсолютно непрерывной компоненты меры $P^B(n, x, dy)$ по отношению к мере $P^B(n, x', dy)$. Сингулярная часть может быть ненулевой. Условие (D_1) обеспечивает отсутствие сингулярности мер внутри шара B .

Всюду в данной работе на функцию g и последовательность (V_n) будут накладываться ограничения, гарантирующие существование и единственность инвариантной вероятностной меры, т.е. выполнение некоторого дополнительного свойства эргодичности, обычно называемого положительностью.

Условия типа (D_1) часто используются в теории марковских цепей и обобщают классическое условие Дёблина [6]. Если последнее выполнено для всего фазового пространства, то скорость сходимости и скорость перемешивания экспоненциальны.

При некоторых предположениях на существование моментов у распределения случайных величин (V_n) получены следующие два результата о верхних оценках для скорости сходимости к инвариантной мере и β -перемешивания (заметим, что все маргинальные распределения, коэффициенты перемешивания и скорости сходимости зависят от начального значения $X_0 = x$ и нижний индекс x отражает это).

Предложение 1 (см. [16, теоремы 1–3]). Пусть процесс (X_n) удовлетворяет (5) и (6) с параметрами $p = 1$ и достаточно большим r , $E|V_n|^{m_0} < \infty$, $m_0 > 4$, и выполнено локальное условие Дёблина (D_1) . Тогда существует единственная инвариантная вероятностная мера μ_{inv} , обладающая абсолютными моментами порядков не менее чем $m_0 - 2$, и

$$\text{var}(\mu_{n,x} - \mu_{\text{inv}}) \leq C(1 + |x|^m) n^{-(1+k)}, \quad (7)$$

$$\beta_x(n) \leq C(1 + |x|^m) n^{-(1+k)}, \quad (8)$$

где $m \in (2, m_0 - 2)$ и $k < (m - 2)/2$ могут быть выбраны произвольно, а C зависит от m и k .

Пусть теперь параметр p принадлежит открытому интервалу $(0, 1)$, что обеспечивает более сильное притяжение к началу координат. Предположим также, что случайные величины (V_n) обладают конечными субэкспоненциальными моментами. В этих более ограничительных предположениях получена лучшая скорость сходимости.

Предложение 2 (см. [10, теорема 1]). Пусть процесс (X_n) удовлетворяет условиям (5) и (6) с параметрами $p \in (0, 1)$ и $r > 0$ и существуют $K > 0$ и $\alpha \in (0, 1 - p]$ такие, что $E \exp\{k|V_n|^\alpha\} < \infty$ для $0 \leq k < K$. Предположим также, что выполнено локальное условие Дёблина (D_1) . Тогда существует единственная инвариантная вероятностная мера μ_{inv} и

$$\text{var}(\mu_{n,x} - \mu_{\text{inv}}) \leq C(x) \exp\{-cn^\delta\}, \quad (9)$$

$$\beta_x(n) \leq C(x) \exp\{-cn^\delta\} \quad (10)$$

с $\delta \in (0, \alpha/(1 + p))$, некоторой положительной функцией $C(x)$ и константой $c > 0$, которые зависят от δ .

3. Полиномиальная оценка. Идея получения нижних оценок для $\alpha(n)$ такова. Рассмотрим конкретную одномерную стационарную стохастическую модель (X_n) , $n \in \mathbb{Z}$, предьявим некоторые события $A \in \mathcal{F}_{\leq 0}^X$, $B \in \mathcal{F}_{\geq n}^X$, $P(A) > 0$, и вычислим нижнюю оценку для $P(A)(P(B|A) - P(B))$. При этом последовательность шума (V_n) выбрана так, что величины имеют полиномиальные или субэкспоненциальные «хвосты», а функция g обеспечивает как можно более слабое притяжение к началу координат. Такой подход, по-видимому, должен привести к нижней оценке, которая близка к оптимальной.

Теорема 1. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует стационарная стохастическая модель, удовлетворяющая предположениям предложения 1, для которой

$$C_1 n^{-(m_0 + \varepsilon)/2} \leq \alpha(n) \leq \beta(n) \leq C_2 n^{-(m_0 - \varepsilon - 2)/2}, \quad C_1, C_2 > 0.$$

Доказательство. Верхняя граница доказана в предложении 1, так что необходимо обосновать лишь нижнюю границу.

Рассмотрим случай $d = 1$ и положим

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq R_0, \\ x - rx^{-1}, & x > R_0, \end{cases} \quad (11)$$

где $r > 0$ и $R_0 > 0$ имеют тот же смысл, что и в (6). Предположим, что распределение случайных величин V_n задается с помощью соотношения

$$P\{V_n \in A\} = \frac{1}{2} 1_A \left(-\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) + \frac{\gamma}{2} \int_{A \cap [1, \infty)} \frac{dx}{x^{\gamma+1}}, \quad (12)$$

где 1_A обозначает индикатор множества A и $\gamma > 2$ является параметром. Элементарные вычисления показывают, что $EV_n = 0$ и $E|V_n|^m < \infty$ для любого $m < \gamma$, но $E|V_n|^\gamma = \infty$.

Покажем, что марковская цепь, заданная (5), (11) и (12) для $\gamma > 4$, обладает инвариантной вероятностной мерой. Это будет следовать из предложения 1, если только выполнено локальное условие Дёблина. Последнее будет иметь место, если мы покажем, что, стартуя из любых двух различных точек $x, x' \in [-R, R]$, $R \geq R_0$, две копии цепи (X_n) и (X'_n) , управляемые одной и той же последовательностью шума (V_n) , с ненулевой вероятностью попадают одновременно в одну точку фазового пространства за конечный промежуток времени. Рассмотрим траекторию, когда случайные величины из последовательности шума (V_n) принимают только значения $-\gamma/(\gamma-1)$. После конечного числа шагов, скажем n_x , снос приведет процесс X_n в начало координат, и затем он попадет в состояние $-\gamma/(\gamma-1)$. Вероятность этого события равна 2^{-n_x} . Цепь останется в этой точке на протяжении k дополнительных шагов с (условной) вероятностью 2^{-k} . Таким образом, процессы (X_n) и (X'_n) после $n_x \vee n_{x'}$ шагов оказываются в состоянии $-\gamma/(\gamma-1)$ с вероятностью не меньшей, чем $2^{-(n_x \vee n_{x'})}$, и локальное условие Дёблина выполнено.

Изучим некоторые свойства инвариантной меры μ_{inv} . Носитель μ_{inv} — это подмножество $[-\gamma/(\gamma-1), \infty)$ в силу (11) и (12). Точка $-\gamma/(\gamma-1)$ является атомом для μ_{inv} . В самом деле, возьмем какой-нибудь интервал $[A, B]$ с $\mu_{\text{inv}}[A, B] = \mu > 0$. После конечного числа шагов, скажем n_μ , снос и значения шума, равные $-\gamma/(\gamma-1)$, перемещают все точки интервала $[A, B]$ в точку $-\gamma/(\gamma-1)$ с вероятностью 2^{-n_μ} . Обозначим $\delta = \mu_{\text{inv}}\{-\gamma/(\gamma-1)\} > 0$.

Пусть $\gamma > 4$, $m_0 = \gamma - \varepsilon$ (см. предложение 1 и (12)). Рассмотрим следующие события для стационарной версии процесса (X_n) :

$$A_n = \{X_0 > M\sqrt{n \ln \ln n}\}, \quad B_n = \{X_n > \frac{1}{2}M\sqrt{n \ln \ln n}\}, \quad M > 0.$$

Окончательное значение M будет выбрано позже. Так как μ_{inv} является вероятностной мерой, имеем:

$$P(A_n) = \mu_{\text{inv}}(M\sqrt{n \ln \ln n}, +\infty) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

и, согласно (12),

$$\begin{aligned} P(A_n) &\geq P\{X_{-1} = -\gamma/(\gamma-1)^{-1}, X_0 > M\sqrt{n \ln \ln n}\} \\ &= \delta P\{X_0 > M\sqrt{n \ln \ln n} \mid X_{-1} = -\gamma/(\gamma-1)^{-1}\} \\ &= \delta P\{V_0 > M\sqrt{n \ln \ln n} + \gamma/(\gamma-1)^{-1}\} \geq c(M\sqrt{n \ln \ln n})^{-\gamma} \end{aligned} \quad (14)$$

с некоторой константой $c > 0$. Очевидно, что аналогичные соотношения верны и для $P(B_n)$.

Оценим $P(B_n|A_n)$ снизу. Применяя закон повторного логарифма для суммы случайных величин (V_n) , выберем константу $C > 0$ так, чтобы событие

$$D = \bigcap_{k \geq 3} \left\{ \sum_{j=1}^k V_j \geq -C\sqrt{k \ln \ln k} \right\}$$

имело положительную вероятность. Это означает, что существует достаточно много траекторий случайного блуждания $\sum_{j=1}^k V_j$, которые целиком лежат выше уровня $-C\sqrt{k \ln \ln k}$.

Лемма 1. Пусть n достаточно велико и произошли события A_n и D . Тогда для всех $1 \leq k \leq n$ события

$$\begin{aligned} \{X_k \geq M\sqrt{n \ln \ln n} - 2k\}, & \quad k = 1, 2, \\ \{X_k \geq M\sqrt{n \ln \ln n} - 2C\sqrt{k \ln \ln k}\}, & \quad k \geq 3, \end{aligned}$$

также произошли.

Доказательство. Так как $\gamma > 4$, $V_j \geq -\gamma/(\gamma - 1)$ и n велико, то

$$X_1 = X_0 - \frac{r}{X_0} + V_1 \geq X_0 - 2$$

и, аналогично, $X_2 \geq X_0 - 4$, $X_3 \geq X_0 - 6$. Увеличивая C в случае необходимости, имеем:

$$X_0 - 6 \geq M\sqrt{n \ln \ln n} - 2C\sqrt{3 \ln \ln 3},$$

и событие для $k = 3$ произошло.

Используя индукцию, докажем, что требуемое событие для X_{k+1} произошло, если все предыдущие события для $X_1, \dots, X_k$ также произошли. В силу (11) можно представить X_{k+1} в виде

$$X_{k+1} = X_0 + \sum_{j=1}^{k+1} V_j - r \sum_{j=0}^k \frac{1}{X_j}.$$

Запишем оценки:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} V_j & \geq -C\sqrt{(k+1) \ln \ln(k+1)}, \\ r \sum_{j=0}^k \frac{1}{X_j} & \leq \frac{r(k+1)}{M\sqrt{n \ln \ln n} - 2C\sqrt{k \ln \ln k}} \leq \frac{2rk}{(M - 2C)\sqrt{n \ln \ln n}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$X_{k+1} \geq M\sqrt{n \ln \ln n} - C\sqrt{(k+1) \ln \ln(k+1)} - \frac{2rk}{(M - 2C)\sqrt{n \ln \ln n}},$$

и остается показать, что при некотором выборе M и всех $k < n$

$$\frac{2rk}{(M - 2C)\sqrt{n \ln \ln n}} \leq C\sqrt{(k+1) \ln \ln(k+1)}$$

или

$$\frac{4r^2}{C^2(M - 2C)^2} k^2 \leq (k+1) \ln \ln(k+1) \cdot n \ln \ln n.$$

Так как $k < 3(k+1) \ln \ln(k+1)$, $k \geq 3$, и $k < n \ln \ln n$, это неравенство выполнено, если только значение M выбрано достаточно большим. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 получаем:

$$\mathbf{P}(B_n | A_n) \geq \mathbf{P}(B_n D | A_n) = \mathbf{P}(D) > 0,$$

откуда, согласно (14), выводится оценка

$$\alpha(n) \geq \mathbf{P}(A_n)(\mathbf{P}(B_n | A_n) - \mathbf{P}(B_n)) \geq \mathbf{P}(A_n)(\mathbf{P}(D) - o(1)) \geq C(M\sqrt{n \ln \ln n})^{-\gamma},$$

которая завершает доказательство теоремы 1.

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что $\mathbf{P}(B_n | A_n) \geq \mathbf{P}(D) > 0$ и $\mathbf{P}(B_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это влечет отсутствие φ -перемешивания, а результаты Ю. А. Давыдова и Р. Брэдли (см. [5]) приводят к заключению, что $\varphi(n) \equiv 1$.

З а м е ч а н и е 2. Сравним нижнюю границу для α -перемешивания и верхнюю границу для β -перемешивания. Существует зазор величины $1 + \varepsilon$ между показателями в соответствующих оценках. В настоящее время автору неизвестно, появляется этот зазор в силу различия между α - и β -перемешиванием или же это недостаток используемого метода. Ответ на этот вопрос может рассматриваться как интересное направление для дальнейших исследований.

4. Субэкспоненциальная оценка. Модифицируя рассуждения в доказательстве теоремы 1, можно получить нижнюю оценку в субэкспоненциальном случае.

Теорема 2. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует стационарная стохастическая модель, удовлетворяющая предположениям предложения 2, такая, что

$$C_1 \exp\{-c_1 n^{\alpha/(1+p)}\} \leq \alpha(n) \leq \beta(n) \leq C_2 \exp\{-c_2 n^{\alpha/(1+p)-\varepsilon}\}$$

с некоторыми константами $c_1, c_2, C_1, C_2 > 0$.

Доказательство. Верхняя граница доказана в предложении 2. Рассмотрим случай $d = 1$ и положим

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq R_0, \\ x - rx^{-p}, & x > R_0, \end{cases} \quad (15)$$

где $r > 0$ и $R_0 > 0$ имеют тот же смысл, что и в (6). При данном значении параметра $\alpha \in (0, 1 - p]$ найдем константу B , при которой

$$B \int_1^\infty \exp\{-x^\alpha\} dx = 1,$$

и положим

$$\gamma = B \int_1^\infty x \exp\{-x^\alpha\} dx.$$

Предположим, что распределение случайных величин V_n задается соотношением

$$\mathbf{P}\{V_n \in A\} = \frac{1}{2} \mathbf{1}_A(-\gamma) + \frac{B}{2} \int_{A \cap [1, \infty)} \exp\{-x^\alpha\} dx. \quad (16)$$

Элементарные вычисления показывают, что $\mathbf{E}V_n = 0$ и $\mathbf{E} \exp\{\kappa |V_n|^\alpha\} < \infty$ для всех $\kappa < 1$. Таким образом, предположение предложения 2 о существовании субэкспоненциальных моментов выполнено с $K = 1$.

Точно так же, как и в полиномиальном случае, можно показать, что локальное условие Дёблина выполнено и инвариантная вероятностная мера существует и имеет атом в точке $-\gamma$.

Рассмотрим следующие события для стационарной версии процесса (X_n) :

$$A_n = \{X_0 > Mn^{1/(1+p)}\}, \quad B_n = \left\{X_n > \frac{1}{2} Mn^{1/(1+p)}\right\}, \quad M > 0.$$

Как и в полиномиальном случае, $\mathbf{P}(A_n) \rightarrow 0$ и $\mathbf{P}(B_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Используя соотношение

$$\int_M^\infty \exp\{-x^\alpha\} dx \sim \alpha^{-1} M^{1-\alpha} \exp\{-M^\alpha\}, \quad M \rightarrow \infty,$$

оценим $\mathbf{P}(A_n)$ аналогично тому, как это было сделано в (14):

$$\mathbf{P}(A_n) \geq c M^{1-\alpha} n^{(1-\alpha)/(1+p)} \exp\{-M^\alpha n^{\alpha/(1+p)}\}, \quad c > 0. \quad (17)$$

По закону повторного логарифма для любой константы $C > 0$ событие

$$D = \bigcap_{k \geq 3} \left\{ \sum_{j=1}^k V_j \geq -Ck^{1/(1+p)} \right\}$$

имеет положительную вероятность. Возьмем $C = M/4$.

Лемма 2. Пусть n достаточно велико и события A_n и D произошли. Тогда для всех $1 \leq k \leq n$ события $\{X_k \geq Mn^{1/(1+p)} - 2Ck^{1/(1+p)}\}$ также произошли.

Доказательство. Используем индукцию. Предположим, что требуемые события произошли для $X_0, \dots, X_k$. Представим X_{k+1} как

$$X_{k+1} = X_0 + \sum_{j=1}^{k+1} V_j - r \sum_{j=0}^k \frac{1}{X_j^p}.$$

Имеем

$$r \sum_{j=0}^k \frac{1}{X_j^p} \leq \frac{r(k+1)}{(M-C)^p n^{p/(1+p)}}$$

и

$$\begin{aligned} X_{k+1} &\geq Mn^{1/(1+p)} - C(k+1)^{1/(1+p)} - \frac{r(k+1)}{(M-C)^p n^{p/(1+p)}} \\ &\geq Mn^{1/(1+p)} - 2C(k+1)^{1/(1+p)} \end{aligned}$$

для достаточно большого M . Лемма 2 доказана.

Из этой леммы и (17) получаем точно так же, как и в полиномиальном случае, что

$$\alpha(n) \geq CM^{1-\alpha} n^{(1-\alpha)/(1+p)} \exp\{-M^\alpha n^{\alpha/(1+p)}\} \geq C_1 \exp\{-c_1 n^{\alpha/(1+p)}\},$$

и теорема 2 доказана.

Замечание 3. Сравнив степени в субэкспонентах в оценках, полученных для α - и β -перемешивания, видим, что разница между ними может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно, результат в [10] дает правильный показатель субэкспоненты и не может быть существенно улучшен.

Автор признателен А. Ю. Веретенникову за детальное обсуждение вопроса, затронутого в статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bradley R. C. Counterexamples to the central limit theorem under strong mixing conditions. — Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 1984, v. 36, p. 153–172.
2. Bradley R. C. Basic properties of strong mixing conditions. — Progr. Probab. Statist., 1986, v. 11, p. 165–192.
3. Bradley R. C. Identical mixing rates. — Probab. Theory Related Fields, 1987, v. 74, № 4, p. 497–503.
4. Bradley R. C. Counterexamples to the central limit theorem under strong mixing conditions. II. — Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 1990, v. 57, p. 59–67.
5. Давыдов Ю. А. Условия перемешивания для цепей Маркова. — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, в. 2, с. 321–338.
6. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956, 605 с.
7. Doukhan P., Massart P., Rio E. The functional central limit theorem for strongly mixing processes. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1994, v. 30, № 1, p. 63–82.
8. Гринь А. Г. Предельные теоремы для схемы серий слабо зависимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 4, с. 888–897.
9. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
10. Klovov S. A., Veretennikov A. Yu. Sub-exponential mixing rate for a class of Markov chains. — Math. Commun., 2004, v. 9, № 1, p. 9–26.
11. Малышкин М. Н. Субэкспоненциальные оценки скорости сходимости к инвариантной мере для стохастических дифференциальных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 489–504.
12. Merlevède F., Peligrad M. The functional central limit theorem under the strong mixing condition. — Ann. Probab., 2000, v. 28, № 3, p. 1336–1352.
13. Meyn S. P., Tweedie R. L. Markov Chains and Stochastic Stability. — London: Springer-Verlag, 1993, 548 p.

14. Rosenblatt M. A central limit theorem and a strong mixing condition. — Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1956, v. 42, p. 43–47.
15. Веретенников А. Ю. Об оценках скорости перемешивания для стохастических уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 2, с. 299–308.
16. Веретенников А. Ю. О полиномиальном перемешивании и скорости сходимости для стохастических дифференциальных и разностных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 2, с. 312–327.

Поступила в редакцию
14.X.2002

Исправленный вариант
23.V.2005

© 2006 г.

КУЗНЕЦОВА А. Я.*

О СМЕСЯХ ОДНОВЕРШИННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В работе отмечаются некоторые полезные свойства смесей одновершинных распределений.

Ключевые слова и фразы: одновершинные распределения, смеси распределений, отклонение распределений от равномерного.

Мы ограничимся здесь специальным подклассом класса одновершинных распределений.

По определению, плотность вероятности $p(x; X)$ случайной величины X принадлежит классу CU (Continuous Unimodal), если она непрерывна и ограничена и существует такое a , что она не убывает при $x < a$ и не возрастает при $x > a$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть U — какая-либо случайная величина, плотность вероятности $p(x; U)$ которой входит в класс CU. Тогда плотность вероятности $p(x; \{U\})$ ее дробной части $\{U\}$ удовлетворяет неравенству: при любом $0 \leq x \leq 1$

$$|p(x; \{U\}) - 1| \leq 2 \max_x p(x; U)$$

(см. [1, пример 5, § 8, гл. II]).

Следствие 1. Пусть $\eta > 0$ — масштабный параметр. Тогда в условиях леммы 1

$$|p(x; \{\eta U\}) - 1| \leq \frac{2}{\eta} \max p(x; U).$$

Типичные примеры применения следствия 1 см. в [2] и [3].

Перейдем теперь к рассмотрению смесей (см. [1, § 5, гл. II]) плотностей класса CU.

Пусть $U_1, \dots, U_k$ — какие-либо случайные величины, плотность которых входит в класс CU, и $p(x; U) = \sum_{j=1}^k p(x; U_j) \lambda_j$, где $\lambda_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$.

Из следствия 1 с очевидностью вытекает

Следствие 2. При всех $0 \leq x \leq 1$

$$|p(x; \{\eta U\}) - 1| \leq \frac{2}{\eta} \sum_{j=1}^k \lambda_j \max p(x; U_j).$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия.