Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Тюрин, О скорости сходимости в теореме Ляпунова, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 2, 250–270

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4200>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:17:32

© 2010 г.

ТЮРИН И. С.*

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ТЕОРЕМЕ ЛЯПУНОВА

Изучается скорость сходимости в теореме Ляпунова при наличии абсолютных моментов третьего порядка. Применение выпуклого анализа позволило установить неуклучшаемую оценку близости в средней метрике вероятностного распределения и его преобразования нулевого смещения. Этот результат применен к оценке точности гауссовской аппроксимации в равномерной метрике, а также метриках ζ_r , $r = 1, 2, 3$. Оценка, полученная для ζ_3 , оптимальна. Кроме того, доказано, что константа C , фигурирующая в неравенстве Берри–Эссеена, не превосходит 0.5894. Удалось также оценить соответствующую константу, возникающую в аналогичном неравенстве для неодинаково распределенных слагаемых.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, скорость сходимости, неравенство Берри–Эссеена, нулевое смещение.

1. Введение. Рассмотрим независимые (действительные) случайные величины (с.в.) $X_1, \dots, X_n$ с нулевыми средними, дисперсиями равными $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ и конечными третьими абсолютными моментами $\beta_1, \dots, \beta_n$. Обозначим

$$\sigma^2 = \sigma^2(n) := \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \quad \varepsilon_n := \frac{1}{\sigma^3} \sum_{j=1}^n \beta_j.$$

Согласно теореме Ляпунова $S_n := (X_1 + \dots + X_n)/\sigma(n)$ слабо сходится к стандартной нормальной с.в. при $\varepsilon_n \rightarrow 0$. С теоретической и практической точек зрения немалый интерес представляет оценка скорости сходимости в этой теореме. Как известно (см. [1], [2]), существует такая наименьшая постоянная C , что для расстояния Колмогорова между S_n и стандартной гауссовской величиной N справедливо неравенство

$$\rho(S_n, N) := \sup_{x \in \mathbf{R}} |\mathbf{P}(S_n \leq x) - \mathbf{P}(N \leq x)| \leq C\varepsilon_n, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: itiurin@gmail.com

Оценке этой константы посвящено множество работ. Эссеен [2] показал, что $C \leq 7.5$. Бергстрем [3] получил оценку $C \leq 4.8$. Такано [4] установил, что в случае независимых одинаково распределенных (н.о.р.) слагаемых $C \leq 2.031$. В. М. Золотарев (см. [5]–[8]) получил новое неравенство, позволяющее оценивать близость двух сумм независимых с.в. и с его помощью показал последовательно справедливость оценок $C \leq 1.322$ и $C \leq 0.9051$, а для случая н.о.р. величин $C \leq 1.301$ и $C \leq 0.8197$. Предложенный метод получил развитие в работах ван Бика [9] и И. С. Шиганова [10], которые доказали соответственно оценки $C \leq 0.7975$ и $C \leq 0.7915$. Для сумм с.в., имеющих одинаковое распределение, И. С. Шиганов получил оценку $C \leq 0.7655$, которую в 2006 году улучшила И. Г. Шевцова [11], показав, что в этом случае $C \leq 0.7056$.

Отдельного упоминания заслуживает родственная задача отыскания асимптотически правильных постоянных в теореме Ляпунова. Как показал Эссеен [12], если все с.в. X_j , $j = 1, 2, \dots$, имеют одно и то же распределение, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(S_n, N)}{\varepsilon_n} \leq C_1 := \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} = 0.409 \dots, \quad (2)$$

причем константа в правой части этого неравенства не может быть уменьшена (откуда, в частности, следует нижняя оценка $C \geq C_1$). Последний результат был развит Б. А. Рогозиным [13], который установил, что при тех же предположениях

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(S_n, \mathcal{N})}{\varepsilon_n} \leq C_2 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (3)$$

где $\rho(S_n, \mathcal{N}) := \inf_{G \in \mathcal{N}} \rho(S_n, G)$, $\mathcal{N}$ — множество всех нормальных с.в.

Г. П. Чистяков (см. [14]–[16]) обобщил (2) и (3) на случай неодинаково распределенных слагаемых. Он доказал, что

$$\rho(S_n, N) \leq C_1 \varepsilon_n + r_1(\varepsilon_n), \quad \rho(S_n, \mathcal{N}) \leq C_2 \varepsilon_n + r_2(\varepsilon_n),$$

где $r_1(\varepsilon_n), r_2(\varepsilon_n)$ есть $o(\varepsilon_n)$ при $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Известны также оценки скорости сходимости в теореме Ляпунова при наличии моментов порядка $2 + \delta$ (см. [17], [18]).

Аналоги (1) существуют и для других вероятностных метрик, например ζ_r (где $r = 1, 2, 3$), о которых подробнее будет сказано в п. 2. Оценки в этих метриках могут быть получены естественным образом при использовании метода Стейна. При доказательстве упомянутых оценок, в частности, используется так называемое нулевое смещение вероятностного распределения (см. [19]).

Для расстояния в метриках ζ_r ($r = 1, 2, 3$) известны следующие оценки (см. [20]):

$$\zeta_1(S_n, N) \leq 3\varepsilon_n, \quad \zeta_2(S_n, N) \leq \frac{3\sqrt{2\pi}}{8} \varepsilon_n, \quad \zeta_3(S_n, N) \leq \frac{1}{2} \varepsilon_n. \quad (4)$$

В [21] рассмотрена задача об отыскании наименьшей верхней грани $\mathbf{E} f(X_1, \dots, X_n)$ по множеству наборов независимых простых с.в., удовлетворяющих m ограничениям вида $\mathbf{E} g_{ij}(X_j) = c_{ij}$, $j = 1, \dots, n$. А именно, установлено, что в этом случае можно ограничиться рассмотрением с.в., принимающих не более $m + 1$ значений. В настоящей работе результаты [21] обобщены на случай произвольного квазивыпуклого функционала, заданного на множестве вероятностных распределений.

При помощи полученных результатов установлена наилучшая оценка близости в средней метрике вероятностного распределения и его преобразования нулевого смещения. Последнее применено к оценке точности гауссовской аппроксимации распределений нормированных сумм независимых слагаемых. Установлено, что значения констант в (4) можно уменьшить в 3 раза. При этом, наша оценка, полученная для метрики ζ_3 , оптимальна. Кроме того, выведены новые оценки близости характеристических функций нормированной суммы и стандартной нормальной с.в. Это позволило доказать, что $C \leq 0.6379$, а в случае н.о.р. слагаемых $C \leq 0.5894$.

2. Обозначения и формулировки результатов. Пусть (S, d) — некоторое метрическое пространство, Q — множество зарядов ограниченной вариации на σ -алгебре $\mathcal{B}(S)$ борелевских подмножеств S с операциями умножения на скаляр и сложения, определенными следующим образом: пусть $\mu, \mu_1, \mu_2 \in Q$, $c \in \mathbf{R}$, положим для каждого $A \in \mathcal{B}(S)$

$$(c\mu)(A) := c \cdot \mu(A), \quad (\mu_1 + \mu_2)(A) := \mu_1(A) + \mu_2(A).$$

Легко видеть, что Q замкнуто относительно этих операций и представляет собой линейное пространство, а множество D дискретных вероятностных мер, сосредоточенных в конечном числе точек, есть выпуклое подмножество Q . Последнее означает, что $\alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2 \in D$ для произвольных $\mu_1, \mu_2 \in D$ и $\alpha \in (0, 1)$.

Рассмотрим множество наборов, состоящих из n независимых с.в. $X_1, \dots, X_n$. Тогда

$$\mathbf{E} f(X_1, \dots, X_n) = \int_{\mathbf{R}^n} f dP_{X_1} \dots dP_{X_n},$$

где $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $P_{X_1}, \dots, P_{X_n}$ — распределения с.в. $X_1, \dots, X_n$. Таким образом, $\mathbf{E} f(X_1, \dots, X_n)$ можно рассматривать как функцию на множестве мер, линейную по каждому из n своих аргументов.

Функция $g: G \rightarrow \mathbf{R}$, где G — выпуклое множество, называется квазивыпуклой, если для любых $x, y \in G$ и $\alpha \in (0, 1)$ имеем

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{g(x), g(y)\}.$$

Всюду далее будем предполагать, что заданы $h_1, \dots, h_m$ — некоторые вещественнозначные функции на S . Рассмотрим множество

$$K := \{\mu \in D: \langle h_i, \mu \rangle = 0, i = 1, \dots, m\}, \quad \text{где} \quad \langle f, \mu \rangle := \int_S f d\mu.$$

Нетрудно видеть, что K — выпуклое множество. Кроме того, обозначим K_j — множество мер $\mu \in K$, сосредоточенных на не более чем j точках ($j \in \mathbf{N}$).

Теорема 1. Для произвольной квазивыпуклой функции $g: K \rightarrow \mathbf{R}$ имеем

$$\sup_{\mu \in K} g(\mu) = \sup_{\mu \in K_{m+1}} g(\mu).$$

В последнем выражении супремум по пустому множеству считаем равным нулю.

Теорема 2. Пусть f — неотрицательная функция на S , V — векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $A: K \rightarrow V$ — такое отображение, что

$$A(\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu) = \alpha A\mu + (1 - \alpha)A\nu \quad (5)$$

для любых $\mu, \nu \in K, \alpha \in (0, 1)$. Тогда наименьшее γ , при котором неравенство

$$\|A\mu\| \leq \gamma \langle f, \mu \rangle \quad (6)$$

выполнено для любой меры $\mu \in K$, совпадает с наименьшим γ , при котором (6) верно для произвольной меры $\mu \in K_{m+1}$.

Пусть W — с.в. с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 > 0$. Говорят, что с.в. W^* имеет распределение W -нулевого смещения, если

$$\mathbf{E} W f(W) = \sigma^2 \mathbf{E} f'(W^*) \quad (7)$$

для каждой дифференцируемой функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, для которой левая часть (7) определена. Известно (см. [19]), что W^* существует для любой описанной выше W и имеет плотность

$$p(w) = \begin{cases} \sigma^{-2} \mathbf{E} (W \cdot \mathbf{1}\{W > w\}), & \text{если } w \geq 0; \\ \sigma^{-2} \mathbf{E} (-W \cdot \mathbf{1}\{W < w\}), & \text{если } w < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для произвольной функции $f \in C^{(r-1)}(\mathbf{R})$, где $r \in \mathbf{N}$, положим

$$M_r(f) := \sup_{x \neq y} \left| \frac{f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(y)}{x - y} \right|.$$

Как обычно, $C^{(0)}(\mathbf{R}) := C(\mathbf{R})$. Если $f \notin C^{(r-1)}(\mathbf{R})$, то считаем $M_r(f) = \infty$. Положим

$$\zeta_r(X, Y) := \sup \left\{ |\mathbf{E} f(X) - \mathbf{E} f(Y)| : f \in \mathcal{F}_r \right\}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

где $\mathcal{F}_r$ — множество вещественных ограниченных функций с $M_r(f) \leq 1$.

Заметим, что ζ_1 имеет другие представления. Это так называемая средняя метрика

$$\kappa_1(X, Y) := \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{P}(X \leq x) - \mathbf{P}(Y \leq x)| dx,$$

а также минимальная L_1 -метрика

$$l_1(X, Y) := \inf \{ \mathbf{E} |\tilde{X} - \tilde{Y}| : \text{Law}(\tilde{X}) = \text{Law}(X), \text{Law}(\tilde{Y}) = \text{Law}(Y) \}.$$

По этому поводу см. [22, с. 56].

Теорема 3. Пусть W центрирована, имеет единичную дисперсию и конечный третий абсолютный момент. Тогда

$$\zeta_1(W, W^*) \leq \frac{1}{2} \mathbf{E} |W|^3, \quad (9)$$

причем равенство достигается, когда W принимает ровно два значения.

Следствие 1. Пусть с.в. S_n^* имеет распределение S_n -нулевого смещения. Тогда

$$\zeta_1(S_n, S_n^*) \leq \frac{1}{2} \varepsilon_n.$$

Теорема 4. Справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \zeta_1(S_n, N) &\leq 2\zeta_1(S_n, S_n^*) \leq \varepsilon_n, & \zeta_2(S_n, N) &\leq \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \zeta_1(S_n, S_n^*) \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \varepsilon_n, \\ \zeta_3(S_n, N) &\leq \frac{1}{3} \zeta_1(S_n, S_n^*) \leq \frac{1}{6} \varepsilon_n. \end{aligned} \quad (10)$$

Последнее двойное неравенство оптимально, а именно, для любого $\delta > 0$ существует такая последовательность н.о.р. с.в. $X_1, X_2, \dots$, что

$$\frac{\zeta_3(S_n, N)}{\varepsilon_n} \geq \frac{1}{6} - \delta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для $\gamma > 0$ и $t \in \mathbf{R}$ положим

$$b(t, \gamma) := \begin{cases} -t^2 + 2\gamma a|t|^3, & \text{если } \gamma|t| < M; \\ -2\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 (1 - \cos \gamma t), & \text{если } M \leq \gamma|t| \leq 2\pi; \\ 0, & \text{если } \gamma|t| > 2\pi. \end{cases}$$

Здесь $a := \max_{x>0} \{(\cos(x) - 1 + x^2/2)/x^3\} \approx 0.099162$, M — точка, в которой достигается этот максимум, $M \approx 3.995896$.

Обозначим $f_{S_n}(t) := \mathbf{E} e^{itS_n}$, $\varphi(t) := \exp(-t^2/2)$, $\delta_n(t) := |f_{S_n}(t) - \varphi(t)|$, $t \in \mathbf{R}$.

Теорема 5. Для произвольного $t \in \mathbf{R}$ имеем

$$\delta_n(t) \leq \delta^{(1)}(\varepsilon_n, t) := \exp\left(\frac{1}{2}b(t, 2\varepsilon_n)\right) + \varphi(t), \quad (11)$$

$$\delta_n(t) \leq \delta^{(2)}(\varepsilon_n, t) := \varepsilon_n \varphi(t) \int_0^{|t|} \frac{s^2}{2} \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) ds. \quad (12)$$

Обозначим $A := \varepsilon_n^{-1/3}/6a$. Для всех $t \in \mathbf{R}$ верна оценка

$$\begin{aligned} \delta_n(t) &\leq \delta^{(3)}(\varepsilon_n, t) \\ &= \begin{cases} \varepsilon_n \varphi(t) \int_0^{|t|} (s^2/2) \exp(s^2 \varepsilon_n^{2/3}/2) ds, & |t| \leq A; \\ \varepsilon_n \varphi(t) \left(\int_0^A (s^2/2) \exp(s^2 \varepsilon_n^{2/3}/2) ds + \int_A^{|t|} (s^2/2l) \exp(2a\varepsilon_n s^3) ds \right), & |t| > A. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$l := \inf_{t \geq 0} \left\{ \exp(-t^2/2 + 2at^3) \right\} \approx 0.624489.$$

Для случая н.о.р. величин оценки могут быть несколько улучшены. Обозначим $\tau_n := \sigma^{-3} \sum_{j=1}^n \sigma_j^3$. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — центрированные н.о.р. с.в. с дисперсиями 1 и конечными третьими абсолютными моментами β . Тогда $\varepsilon_n = \beta/\sqrt{n}$, $\tau_n = 1/\sqrt{n}$.

Теорема 6. Для описанной последовательности с.в. и произвольного $t \in \mathbf{R}$ справедливы неравенства

$$\delta_n(t) \leq \delta^{(4)}(n, \varepsilon_n, t) := \left(1 + \frac{b(t, \varepsilon_n + \tau_n)}{n}\right)^{n/2} + \varphi(t), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \delta_n(t) &\leq \delta^{(5)}(n, \varepsilon_n, t) \\ &:= \varepsilon_n \varphi(t) \int_0^{|t|} \left(1 + \frac{b(s, \varepsilon_n + \tau_n)}{n}\right)^{(n-1)/2} \frac{s^2}{2} \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть $m \in \mathbf{N}$ и $n \geq m$. Тогда

$$\delta_n(t) \leq \delta^{(6)}(m, \varepsilon_n, t) := \exp\left(\frac{1}{2}b(t, \varepsilon_n + \tau_m)\right) + \varphi(t), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \delta_n(t) &\leq \delta^{(7)}(m, \varepsilon_n, t) \\ &:= \varepsilon_n \varphi(t) \int_0^{|t|} \exp\left(\frac{m-1}{2m}b(s, \varepsilon_n + \tau_m) + \frac{s^2}{2}\right) \frac{s^2}{2} ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценки (11)–(17) позволили установить следующий результат.

Теорема 7. *Неравенство (1) имеет место с константой $C \leq 0.6379$, а в случае одинаково распределенных слагаемых $C \leq 0.5894$.*

3. Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Если $K = \emptyset$, то $K_{m+1} = \emptyset$, и утверждение теоремы выполнено. Далее предполагаем, что множество K непусто.

Последовательность множеств $K_1, K_2, \dots$ возрастает к множеству K , следовательно,

$$\sup_{\mu \in K} g(\mu) = \sup_{j \geq 1} \sup_{\mu \in K_j} g(\mu) = \sup_{j \geq m+1} \sup_{\mu \in K_j} g(\mu).$$

Поэтому достаточно установить, что

$$\sup_{\mu \in K_{m+1}} g(\mu) \geq \sup_{\mu \in K_{m+2}} g(\mu) \geq \sup_{\mu \in K_{m+3}} g(\mu) \geq \dots$$

Для этого возьмем произвольную меру $\mu \in K_j$, где $j > m+1$, и покажем, что существует $\mu' \in K_{j-1}$, такая, что $g(\mu') \geq g(\mu)$.

Пусть μ сосредоточена в точках $s_1, \dots, s_j \in S$ и

$$\mu(s_i) = \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, j. \quad (18)$$

Вектор $\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_j)$ задает вероятностное распределение, поэтому

$$\mu_1 + \dots + \mu_j = 1. \quad (19)$$

Кроме того, выполнены условия $\langle h_i, \mu \rangle = 0$, $i = 1, \dots, m$, и, следовательно,

$$\mu_1 \cdot h_i(s_1) + \dots + \mu_j \cdot h_i(s_j) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (20)$$

Обратно, всякий вектор с неотрицательными координатами, удовлетворяющий системе линейных уравнений (19) и (20) задает согласно формулам (18) элемент множества K_j , а если одна из его координат равна нулю, то элемент K_{j-1} . Имеем $m+1$ уравнение и как минимум $m+2$ неизвестных, следовательно, существует ненулевое решение $\bar{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_j)$ соответствующей однородной системы. Поскольку сумма координат этого вектора равна нулю, но сам вектор ненулевой, то у него есть положительная и отрицательная координаты. Поэтому существуют такие наименьшие $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, что соответственно одна из координат вектора $\bar{\mu}_* = \bar{\mu} - \alpha \bar{\nu}$ равна нулю, и некоторая координата $\bar{\mu}^* = \bar{\mu} + \beta \bar{\nu}$ равна нулю. Если $\alpha = 0$, то $\mu \in K_{j-1}$, иначе

$$\bar{\mu} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \bar{\mu}_* + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \bar{\mu}^*,$$

и в силу квазивыпуклости $g(\mu) \leq \max\{g(\mu_*), g(\mu^*)\}$, где μ_*, μ^* — распределения, отвечающие $\bar{\mu}_*$ и $\bar{\mu}^*$. Таким образом $g(\mu) \leq g(\mu_*)$ либо $g(\mu) \leq g(\mu^*)$. Но μ_* и $\mu^* \in K_{j-1}$.

Доказательство теоремы 2. В силу теоремы 1 достаточно показать, что при каждом фиксированном значении γ функция $g(\mu) := \|A\mu\| - \gamma\langle f, \mu \rangle$ является квазивыпуклой. Пусть $\alpha + \beta = 1$. Согласно свойствам нормы

$$\begin{aligned} \|A(\alpha\mu + \beta\nu)\| - \gamma\langle f, \alpha\mu + \beta\nu \rangle &= \|\alpha A\mu + \beta A\nu\| - \gamma\langle f, \alpha\mu \rangle - \gamma\langle f, \beta\nu \rangle \\ &\leq \|\alpha A\mu\| + \|\beta A\nu\| - \gamma\langle f, \alpha\mu \rangle - \gamma\langle f, \beta\nu \rangle \\ &= \alpha g(\mu) + \beta g(\nu) \leq \max\{g(\mu), g(\nu)\}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Вначале проверим, что можно ограничиться рассмотрением простых с.в. W . Достаточно показать, что для любой с.в. W , удовлетворяющей условиям теоремы, существует такая последовательность $(W_n)_{n \geq 1}$ простых с.в. с нулевым средним и единичной дисперсией, такая, что

$$\zeta_1(W_n, W_n^*) \rightarrow \zeta_1(W, W^*) \quad \text{и} \quad \mathbf{E}|W_n|^3 \rightarrow \mathbf{E}|W|^3, \quad n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Считаем, что случайная величина W задана на вероятностном пространстве $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mathbf{P} = P_W)$. Построим последовательность простых с.в. $(W'_n)_{n \geq 1}$, сходящуюся к W по норме L_3 . Положим

$$W_n := \frac{W'_n - \mathbf{E} W'_n}{\sqrt{\text{Var } W'_n}}.$$

Легко видеть, что W_n тоже сходится к W по норме L_3 . Поэтому второе из условий (21), очевидно, выполнено. Остается показать справедливость первого из этих условий.

Из неравенства треугольника для метрики ζ_1 нетрудно получить

$$|\zeta_1(W, W^*) - \zeta_1(W_n, W_n^*)| \leq \zeta_1(W, W_n) + \zeta_1(W^*, W_n^*). \quad (22)$$

Первое слагаемое в правой части (22) стремится к нулю, поскольку

$$\zeta_1(W, W_n) = l_1(W, W_n) \leq \mathbf{E}|W - W_n| \leq (\mathbf{E}|W - W_n|^3)^{1/3}.$$

Оценим второе слагаемое. Для функции $f \in \mathcal{F}_1$ положим $F(x) := \int_0^x f(u) du$. Тогда

$$\mathbf{E} f(W^*) - \mathbf{E} f(W_n^*) = \mathbf{E} W F(W) - \mathbf{E} W_n F(W_n). \quad (23)$$

Поскольку при замене функции $f(x)$ на $f(x) - f(0)$ разность математических ожиданий в левой части (23) не изменится, можем считать без

ограничения общности, что $f(0) = 0$. Тогда $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ влечет $|f(x)| \leq |x|$ и, как следствие, $|F(x)| \leq |x|^2$, $|xf(x)| \leq |x|^2$. По теореме о конечном приращении

$$WF(W) - W_n F(W_n) = (W - W_n) \cdot \{xF(x)\}'|_{x=\xi} = (W - W_n)\{F(\xi) + \xi f(\xi)\},$$

где ξ — число между W и W_n . Последнее, с учетом того, что

$$|F(\xi) + \xi f(\xi)| \leq 2|\xi|^2 \leq 2(|W| + |W_n|)^2,$$

дает оценку

$$\left| \mathbf{E} \{WF(W) - W_n F(W_n)\} \right| \leq 2\mathbf{E} |W - W_n| (|W| + |W_n|)^2.$$

Наконец, из неравенства Гельдера

$$\mathbf{E} |W - W_n| (|W| + |W_n|)^2 \leq (\mathbf{E} |W - W_n|^3)^{1/3} (\mathbf{E} (|W| + |W_n|)^3)^{2/3}.$$

Таким образом к нулю стремится и второе слагаемое (22), поскольку $(\mathbf{E} |W - W_n|^3)^{1/3} \rightarrow 0$ по определению сходимости в L_3 .

Итак, достаточно рассматривать только простые с.в. Пусть A_1 — отображение, сопоставляющее распределению P_X с.в. X распределение ее нулевого смещения P_X^* . Кроме того, рассмотрим линейный оператор A_2 , сопоставляющий заряду ν его функцию распределения (ф.р.) $G_\nu(x) := \nu((-\infty, x])$. Нетрудно видеть, что

$$(\alpha P_{W_1} + (1 - \alpha) P_{W_2})^* = \alpha P_{W_1}^* + (1 - \alpha) P_{W_2}^*,$$

поэтому отображение $A_2 - A_2 A_1$ удовлетворяет (5). Если положить $h_1(x) = x$, $h_2(x) = x^2 - 1$ и в теореме 2 взять $f(x) = |x|^3$, $A = A_2 - A_2 A_1$, V — пространство интегрируемых (по мере Лебега) на вещественной прямой функций с нормой

$$\|G\| = \int_{-\infty}^{\infty} |G(x)| dx,$$

то получим, что достаточно рассматривать только простые с.в., принимающие не более трех значений. Функция распределения простой с.в. W имеет ступенчатый вид. По формуле (8) легко получить функцию распределения W^* . Зная обе эти функции, не составляет труда найти явное выражение расстояния в средней метрике $\varkappa_1(W, W^*)$.

Рис. 1

Пусть W принимает ровно два значения $-x$ и y с вероятностями p и q . Тогда ее функция распределения кусочно-постоянна и имеет два скачка в точках $-x$ и y равных соответственно p и q . Так как W центрирована, имеем $px = qy$. Откуда, согласно (8), следует, что W^* распределена равномерно на отрезке $[-x, y]$. Следовательно, на $[-x, y]$ ее функция распределения линейна, а график представляет собой отрезок, соединяющий точки $(-x, 0)$ и $(y, 1)$. По определению $\kappa_1(W, W^*)$ равна площади фигуры, заключенной между функцией распределения (в рассматриваемом случае это объединение двух треугольников, см. рис. 1 а)).

Из того, что $\mathbf{E}W = 0$ и $\mathbf{E}W^2 = 1$ следует, что $x = \sqrt{q/p}$, $y = \sqrt{p/q}$. Отсюда

$$\mathbf{E}|W|^3 = px^3 + qy^3 = q\sqrt{\frac{q}{p}} + p\sqrt{\frac{p}{q}}. \quad (24)$$

Найдем площадь фигуры, заключенной между функцией распределения с.в. W и W^* . Плотность W^* равна, $px = qy = \sqrt{pq}$. Следовательно, функция распределения этой с.в. на отрезке $[-x, y]$ имеет коэффициент наклона $\sqrt{pq}$. Длина вертикального катета первого треугольника равна p , а второго q . Отсюда сумма площадей этих треугольников равна

$$\frac{1}{2}p^2 \frac{1}{\sqrt{pq}} + \frac{1}{2}q^2 \frac{1}{\sqrt{pq}} = \frac{1}{2}p\sqrt{\frac{p}{q}} + \frac{1}{2}q\sqrt{\frac{q}{p}} = \frac{1}{2}\mathbf{E}|W|^3.$$

Итак, если W принимает ровно два значения, в (9) имеем равенство.

Рассмотрим случай, когда W принимает три значения. Считаем без ограничения общности, что два из них ($-a < -b$) не превосходят нуля, а одно (c) положительно. Как и ранее функция распределения с.в. W кусочно постоянна, а функция распределения W^* кусочно-линейна, однако форма фигуры, заключенной между ними, имеет более сложный вид (см. рис. 1 б)). Обозначим R значение функции распределения с.в. W^* в точке $-b$, S — ее значение в точке 0. Пусть W принимает значения $-a$, $-b$, c соответственно с вероятностями p , q , r . Тогда в силу моментных ограничений

$$\begin{cases} p + q + r = 1, \\ -pa - qb + rc = 0, \\ pa^2 + qb^2 + rc^2 = 1. \end{cases}$$

Это система линейных уравнений относительно p , q , r . Воспользовавшись правилом Крамера, получим

$$p = (1 - bc)(c + b)/\Delta, \quad q = (ac - 1)(a + c)/\Delta, \quad r = (ab + 1)(a - b)/\Delta,$$

где $\Delta = (a+c)(b+c)(a-b)$. Таким образом, всякая с.в. с нулевым средним и дисперсией 1, принимающая три значения, определяется этими тремя

значениями однозначно. Легко видеть, что p, q, r неотрицательны тогда и только тогда, когда

$$ac \geq 1, \quad bc \leq 1. \quad (25)$$

Другими словами, с.в. W , принимающая значения $-a, -b, c$ существует в том и только том случае, когда выполнено (25). Наша цель — доказать, что функция

$$g(a, b, c) := \kappa_1(W, W^*) - \frac{1}{2} \mathbf{E} |W|^3 \quad (26)$$

не превосходит нуля. Ее явное выражение через переменные a, b, c зависит от взаимного расположения функций распределения с.в. W и W^* . Имеется 5 случаев:

I. $R \leq p, S \leq p + q$, или, эквивалентно, $a(a - b) \leq 1, c \geq 1$. В этом случае

$$g(a, b, c) = \frac{r}{c} - pa^3 - qb^3.$$

II. $R \leq p, S \geq p + q \Leftrightarrow a(a - b) \leq 1, c \leq 1$,

$$g(a, b, c) = \frac{r}{c} - pa^3 - qb^3.$$

III. $R \geq p, S \leq p + q \Leftrightarrow a(a - b) \geq 1, c \geq 1$ (последнее влечет $c(b + c) \geq 1$),

$$g(a, b, c) = pa \left\{ a - b - \frac{1}{a} \right\}^2 + \frac{r}{c} - pa^3 - qb^3.$$

IV. $p \leq R \leq p + q, S \geq p + q \Leftrightarrow a(a - b) \geq 1, c(b + c) \geq 1, c \leq 1$,

$$g(a, b, c) = pa \left\{ a - b - \frac{1}{a} \right\}^2 + \frac{r}{c} - pa^3 - qb^3.$$

V. $R \geq p + q \Leftrightarrow c(b + c) \leq 1$,

$$g(a, b, c) = \frac{p}{a} - rc^3.$$

Заметим, что в каждом из случаев g — это одна и та же функция, заданная соотношением (26). Поэтому, если набор значений a, b, c удовлетворяет ограничениям сразу двух случаев, для функции g можно использовать как выражение, соответствующее первому из них, так и выражение, соответствующее второму.

Как видно, в случаях I, II, а также в случаях III, IV функция g имеет одно и то же представление. I и II объединим в случай А, III и IV — в случай В.

А. $a(a - b) \leq 1$,

$$g(a, b, c) = \frac{r}{c} - pa^3 - qb^3.$$

В. $a(a-b) \geq 1$, $c(b+c) \geq 1$,

$$g(a, b, c) = pa\left\{a - b - \frac{1}{a}\right\}^2 + \frac{r}{c} - pa^3 - qb^3.$$

Покажем, что в каждом из случаев А, В, V функция g не превосходит нуля.

Случай А.

$$\begin{aligned} g(a, b, c) &= \frac{r}{c} - pa^3 - qb^3 \\ &= \frac{(1+ab)(a-b)}{\Delta c} - \frac{(1-bc)(b+c)a^3}{\Delta} - \frac{(ac-1)(a+c)b^3}{\Delta} \\ &= \frac{(a-b)(ac-1)(1-bc)}{\Delta c} (-1-bc-ac-ab) \leq 0 \end{aligned}$$

в силу (25), неотрицательности чисел a, b, c и того, что $a > b$.

Случай V.

$$\begin{aligned} g(a, b, c) &= \frac{p}{a} - rc^3 = \frac{(1-bc)(b+c)}{\Delta a} - \frac{(1+ab)(a-b)c^3}{\Delta} \\ &= \frac{(ac-1)}{\Delta a} \left\{ -[(ab+1)(a-b)]c^2 - [1+b(a-b)]c - b \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку $ac \geq 1$ достаточно доказать, что выражение, стоящее внутри фигурных скобок, не превосходит нуля. Рассмотрим это выражение как функцию от переменной c , зафиксировав остальные. При $c = 0$ эта функция равна $-b \leq 0$. Осталось заметить, что она убывает по c , поскольку коэффициенты при c и c^2 отрицательны, и, как следствие, не превосходит нуля при любых положительных значениях c .

Случай В.

$$\begin{aligned} g(a, b, c) &= pa\left\{a - b - \frac{1}{a}\right\}^2 + \frac{r}{c} - pa^3 - qb^3 \\ &= \frac{(1-bc)(b+c)a}{\Delta} \left\{a - b - \frac{1}{a}\right\}^2 \\ &\quad + \frac{(1+ab)(a-b)}{\Delta c} - \frac{(1-bc)(b+c)a^3}{\Delta} - \frac{(ac-1)(a+c)b^3}{\Delta} \\ &= \frac{1-bc}{\Delta ac} \{k_2 c^2 + k_1 c + k_0\}, \end{aligned}$$

где $k_2 = 1 - 2a(a-b)(1+ab)$, $k_1 = b[1 - a(a-b)(1+ab)]$, $k_0 = a(a-b)(1+ab)$. Допустим, что $g(a, b, c) > 0$. В силу условия $a(a-b) \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} 1 - a(a-b)(1+ab) &\leq 1 - (1+ab) = -ab \leq 0, \\ 1 - 2a(a-b)(1+ab) &\leq 1 - 2(1+ab) = -1 - 2ab < 0. \end{aligned}$$

Значит k_2 и k_1 не превосходят нуля и, следовательно, $k_2c^2 + k_1c + k_0$ убывает по c . Поэтому, если при фиксированных a и b уменьшить значение переменной c , g останется положительной. Величину c снизу ограничивают два условия задачи: $ac \geq 1$ и $c(b+c) \geq 1$. Первое из этих условий избыточно, оно следует из двух других: $c(b+c) \geq 1$ и $a(a-b) \geq 1$. Действительно, пусть $ac < 1$. Тогда

$$1 \leq c(b+c) < \frac{1}{a} \left(b + \frac{1}{a} \right) \Rightarrow a^2 < ab + 1 \Rightarrow a(a-b) < 1.$$

Значит мы можем уменьшить c до такого значения c_* , что $c_*(b+c_*) = 1$. При этом g останется положительной. Но ситуация, когда $c(b+c) = 1$ удовлетворяет ограничениям случая V, для которого было доказано, что $g \leq 0$. Пришли к противоречию.

Доказательство следствия 1. Без ограничения общности считаем $\sigma = 1$. Пусть I – случайный индекс, принимающий значения $1, \dots, n$ с вероятностями $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$, не зависящий от $X_1, \dots, X_n$. Построим на расширенном вероятностном пространстве

$$S'_i := \sum_{j \neq i} X_j + X_i^*, \quad i = 1, \dots, n,$$

где X_i^* имеет распределение X_i -нулевого смещения и не зависит от $I, X_1, \dots, X_n, i = 1, \dots, n$. Тогда $S_n^* = S'_I$ (см. [19]). Поэтому для произвольной функции $f \in \mathcal{F}_1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} f(S_n^*) &= \mathbf{E} f(S'_I) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E} f(S'_I) \mathbf{1}\{I = k\} \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{E} f(S'_k) \mathbf{1}\{I = k\} = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \mathbf{E} f(S'_k). \end{aligned} \quad (27)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} f(S_n) - \mathbf{E} f(S_n^*)| &= \left| \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \mathbf{E} f(S_n) - \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \mathbf{E} f(S'_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 |\mathbf{E} f(S_n) - \mathbf{E} f(S'_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \zeta_1(X_k, X_k^*) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^3 \zeta_1\left(\frac{X_k}{\sigma_k}, \frac{X_k^*}{\sigma_k}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sigma_k^3 \cdot \frac{1}{2} \mathbf{E} \left| \frac{X_k}{\sigma_k} \right|^3 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k = \frac{1}{2} \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Здесь было использовано утверждение теоремы 3 для с.в. $\sigma_k^{-1}X_k$, а также свойство однородности метрики ζ_1 (т.е. $\zeta_1(cX, cY) = |c|\zeta_1(X, Y)$) и $(\alpha X)^* \stackrel{D}{=} \alpha X^*$.

Доказательство теоремы 4. Нетрудно видеть, что для непрерывной $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$h(w) := e^{w^2/2} \int_{-\infty}^w (f(x) - \mathbf{E} f(N)) e^{-x^2/2} dx$$

удовлетворяет уравнению Стейна $h'(w) - wh(w) = f(w) - \mathbf{E} f(N)$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} f(S_n) - \mathbf{E} f(N)| &= |\mathbf{E} h'(S_n) - \mathbf{E} S_n h(S_n)| = |\mathbf{E} h'(S_n) - \mathbf{E} h'(S_n^*)| \\ &\leq M_2(h) \zeta_1(S_n, S_n^*). \end{aligned}$$

Как показано в [20],

$$M_2(h) \leq \min \left\{ 2M_1(f), \frac{\sqrt{2\pi}}{4} M_2(f), \frac{1}{3} M_3(f) \right\}.$$

Принимая во внимание то, что $M_r(f) \leq 1$ в определении метрики ζ_r , имеем

$$\begin{aligned} \zeta_1(S_n, N) &\leq 2\zeta_1(S_n, S_n^*), \quad \zeta_2(S_n, N) \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \zeta_1(S_n, S_n^*), \\ \zeta_3(S_n, N) &\leq \frac{1}{3} \zeta_1(S_n, S_n^*). \end{aligned} \quad (28)$$

Оценки, содержащие ε_n , получаются применением следствия 1 к (28).

Докажем оптимальность (10). Положим $f(x) := x^3/6$. Тогда $M_3(f) = 1$ и $\mathbf{E} f(N) = 0$, поскольку с.в. N симметрична, а функция f нечетна. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — н.о.р. величины с нулевыми средними и дисперсиями равными 1. Тогда

$$\mathbf{E} S_n^3 = \frac{\mathbf{E} X_1^3}{\sqrt{n}}, \quad \varepsilon_n = \frac{\mathbf{E} |X_1|^3}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\zeta_3(S_n, N)}{\varepsilon_n} \geq |\mathbf{E} f(S_n) - \mathbf{E} f(N)| = \frac{1}{6} \frac{|\mathbf{E} X_1^3|}{\mathbf{E} |X_1|^3}.$$

Остается доказать, что $|\mathbf{E} X_1^3|/\mathbf{E} |X_1|^3$ может быть сколь угодно близко к единице. Согласно (24) третий абсолютный момент центрированной с.в. X_1 с дисперсией 1, принимающей два значения $x = -\sqrt{q/p}$, $y = \sqrt{p/q}$ соответственно с вероятностями p и q , равен

$$\mathbf{E} |X_1|^3 = q \sqrt{\frac{q}{p}} + p \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

нетрудно видеть, что третий момент этой с.в. равен

$$\mathbf{E} X_1^3 = -q \sqrt{\frac{q}{p}} + p \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

При $p \rightarrow 1$ имеем $|\mathbf{E} X_1|/\mathbf{E} |X_1|^3 \rightarrow 1$.

Лемма 1 ([23]). Пусть W — центрированная с.в. с дисперсией 1 и конечным третьим абсолютным моментом β . Обозначим $f(t) := \mathbf{E} e^{itW}$, $t \in \mathbf{R}$. Тогда при всех $t \in \mathbf{R}$

$$|f(t)|^2 \leq 1 + b(t, \beta + 1), \quad (29)$$

кроме того,

$$|f_{S_n}(t)|^2 \leq \exp(b(t, \varepsilon_n + \tau_n)). \quad (30)$$

Лемма 2. Функция $b(t, \gamma)$ не убывает по γ при каждом $t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Проверяется непосредственно вычислением производной.

Следствие 2. Для всех $t \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$

$$|f_{S_n}(t)|^2 \leq \exp(b(t, 2\varepsilon_n)). \quad (31)$$

Доказательство. По неравенству Ляпунова имеем $\sigma_j^3 \leq \beta_j$, $j = 1, \dots, n$. Поэтому $\tau_n \leq \varepsilon_n$. Теперь (31) следует из (30) и леммы 2.

Лемма 3. При выполнении условий леммы 1

$$|f(t) - \varphi(t)| \leq \varphi(t) \int_0^{|t|} |f(s) - f^*(s)| s \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) ds, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (32)$$

где $f^*(t)$ — характеристическая функция с.в. W^* , имеющей распределение W -нулевого смещения.

Доказательство. В силу определения распределения W -нулевого смещения

$$\begin{aligned} f'(t) &= i\mathbf{E} W \cos(tW) - \mathbf{E} W \sin(tW) \\ &= -it\mathbf{E} \sin(tW^*) - t\mathbf{E} \cos(tW^*) = -t\mathbf{E} e^{itW^*}. \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим функцию $\psi(t) := f(t)/\varphi(t)$. Заметим, что $\psi(0) = 1$. С учетом (33) имеем

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} (f(t)e^{\frac{1}{2}t^2}) = f'(t)e^{\frac{1}{2}t^2} + tf(t)e^{\frac{1}{2}t^2} = \{f(t) - f^*(t)\}te^{\frac{1}{2}t^2}.$$

Тогда

$$\left| \frac{f(t)}{\varphi(t)} - 1 \right| = |\psi(|t|) - \psi(0)| \leq \int_0^{|t|} |\psi'(s)| ds = \int_0^{|t|} |f(s) - f^*(s)| s e^{\frac{1}{2}s^2} ds.$$

Лемма 4. Для любых с.в. X и Y имеем $|\mathbf{E} e^{itX} - \mathbf{E} e^{itY}| \leq |t| \zeta_1(X, Y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Хорошо известно, что для любых $t, x, y \in \mathbf{R}$ выполнено неравенство $|e^{itx} - e^{ity}| \leq |t| \cdot |x - y|$. Поэтому для любых $\tilde{X}, \tilde{Y}$, определенных на одном вероятностном пространстве, таких, что $\text{Law}(\tilde{X}) = \text{Law}(X)$ и $\text{Law}(\tilde{Y}) = \text{Law}(Y)$, имеем

$$|\mathbf{E} e^{itX} - \mathbf{E} e^{itY}| = |\mathbf{E} e^{it\tilde{X}} - \mathbf{E} e^{it\tilde{Y}}| \leq \mathbf{E} |e^{it\tilde{X}} - e^{it\tilde{Y}}| \leq |t| \mathbf{E} |\tilde{X} - \tilde{Y}|. \quad (34)$$

Переходя в (34) к нижней грани по всевозможным $\tilde{X}, \tilde{Y}$, получим

$$|\mathbf{E} e^{itX} - \mathbf{E} e^{itY}| \leq |t| l_1(X, Y) = |t| \zeta_1(X, Y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5. С учетом (31) неравенство (11) тривиально:

$$|f_{S_n}(t) - \varphi(t)| \leq |f_{S_n}(t)| + |\varphi(t)| \leq \exp\left(\frac{1}{2} b(t, 2\varepsilon_n)\right) + \varphi(t).$$

Не ограничивая общности, считаем, что $\sigma = 1$. Обозначим $f_j(t) := \mathbf{E} e^{itX_j}$, $f_j^*(t) := \mathbf{E} e^{itX_j^*}$, $j = 1, \dots, n$. Положим в (32) $W := S_n$. Воспользовавшись леммой 4 и следствием 1, получим

$$|f(s) - f^*(s)| \leq |s| \zeta_1(S_n, S_n^*) \leq \frac{\varepsilon_n |s|}{2}.$$

Подставив последнее выражение в (32), приходим к (12).

Согласно (27)

$$f^*(s) = \sum_{m=1}^n \sigma_m^2 \mathbf{E} e^{isS'_m} = \sum_{m=1}^n \sigma_m^2 f_m^*(s) \prod_{j \neq m} f_j(s).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |f(s) - f^*(s)| &= \left| \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \prod_j f_j(s) - \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 f_i^*(s) \prod_{j \neq i} f_j(s) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \{f_i(s) - f_i^*(s)\} \prod_{j \neq i} f_j(s) \right|. \end{aligned} \quad (35)$$

По лемме 4 и теореме 3 имеем

$$|f_j(s) - f_j^*(s)| \leq |s| \zeta_1(X_j, X_j^*) = |s| \sigma_j \zeta_1\left(\frac{X_j}{\sigma_j}, \frac{X_j^*}{\sigma_j}\right) \leq \frac{\beta_j |s|}{2\sigma_j^2}. \quad (36)$$

Из (29) следует, что $|f_j(s)| \leq \exp(-\sigma_j^2 s^2/2 + 2\beta_j a |s|^3)$ для всех вещественных s . Поэтому

$$\begin{aligned} |f(s) - f^*(s)| &\leq \left| \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{s}{2} \prod_{j \neq i} \exp\left(-\frac{\sigma_j^2 s^2}{2} + 2\beta_j a |s|^3\right) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{s}{2} \exp\left(\frac{\sigma_j^2 s^2}{2} - 2\beta_j a |s|^3\right) \right| \exp\left(-\frac{s^2}{2} + 2\varepsilon_n a |s|^3\right). \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку $\sigma_j^3 \leq \beta_j \leq \varepsilon_n$ для $j = 1, \dots, n$, имеем для каждого такого j и $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\sigma_j^2 t^2}{2} - 2\beta_j a t^3\right) &\leq \exp\left(\frac{\sigma_j^2 t^2}{2} - 2\sigma_j^3 a t^3\right) = \exp\left(\frac{s^2}{2} - 2as^3\right)\Big|_{s=t\sigma_j} \\ &\leq \sup\left\{\exp\left(\frac{s^2}{2} - 2as^3\right) : s \in [0, t\varepsilon_n^{1/3}]\right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Функция $\exp(s^2/2 - 2as^3)$ возрастает на отрезке $[0, 1/6a]$, в точке $1/6a$ — глобальный максимум равный $1/l$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\sup\left\{\exp\left(\frac{s^2}{2} - 2as^3\right) : s \in [0, t\varepsilon_n^{1/3}]\right\} \\ &= \begin{cases} \exp\left(\frac{t^2 \varepsilon_n^{2/3}}{2} - 2a\varepsilon_n t^3\right), & \text{если } t\varepsilon_n^{1/3} \leq 1/6a; \\ 1/l, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

Объединяя (37), (38) и (39), имеем при $|s|\varepsilon_n^{1/3} \leq 1/6a$

$$|f(s) - f^*(s)| \leq \frac{\varepsilon_n |s|}{2} \exp\left(\frac{s^2 \varepsilon_n^{2/3}}{2} - \frac{s^2}{2}\right),$$

а при $|s|\varepsilon_n^{1/3} > 1/6a$

$$|f(s) - f^*(s)| \leq \frac{\varepsilon_n |s|}{2l} \exp\left(-\frac{s^2}{2} + 2a\varepsilon_n |s|^3\right).$$

Подставляя полученные выражения в (32), получим требуемые оценки.

Доказательство теоремы 6. Докажем вначале (14). Пусть $f_1(t) := \mathbf{E} e^{itX_1}$. Имеем

$$|f_{S_n}(t) - \varphi(t)| \leq |f_{S_n}(t)| + |\varphi(t)| = \left|f_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^n + |\varphi(t)|. \quad (40)$$

Из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} \left|f_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| &\leq \sqrt{1 + b\left(\frac{t}{\sqrt{n}}, \beta + 1\right)} = \sqrt{1 + \frac{1}{n} b\left(t, \frac{\beta + 1}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{n} b(t, \varepsilon_n + \tau_n)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Подставив последнее выражение в (40) получим требуемое утверждение. Чтобы установить (16), заметим, что $1+x \leq e^x$ при всех вещественных x . Применив это неравенство к (14), получим

$$|f_{S_n}(t) - \varphi(t)| \leq \exp\left(\frac{1}{2} b(t, \varepsilon_n + \tau_n)\right) + \varphi(t).$$

Остается заметить, что последовательность $(\tau_m)_{m \geq 1}$ убывает, откуда следует (16).

Положим $W := S_n$ в (32). Воспользовавшись (35) для с.в. $\frac{1}{\sqrt{n}}X_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}X_n$, получим

$$|f(s) - f^*(s)| = \left| f_1\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right|^{n-1} \cdot \left| f_1\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) - f_1^*\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right|.$$

Первый из множителей оцениваем при помощи (41), второй — при помощи (36). Имеем

$$|f(s) - f^*(s)| \leq \left(1 + \frac{b(s, \varepsilon_n + \tau_n)}{n} \right)^{(n-1)/2} \frac{\varepsilon_n |s|}{2}. \quad (42)$$

Подставив полученное выражение в (32), получим (15). Для того, чтобы установить (17), применим к первому множителю, стоящему в правой части (42), неравенство $1 + x \leq e^x$ и заметим, что $(\tau_m)_{m \geq 1}$ убывает.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 7. Поскольку $\rho(S_n, N) \leq 1$, то при $\varepsilon_n \geq 1/C$ утверждение теоремы тривиально, поэтому достаточно рассматривать $\varepsilon_n \leq 1/0.6379$ в общем случае, а для н.о.р. величин $\varepsilon_n \leq 1/0.5894$. Кроме того, в [24] показано, что при $\varepsilon_n \leq 1/7$

$$\rho(S_n, N) \leq 0.527 \varepsilon_n \lambda_n^{3/2},$$

а при $\varepsilon_n \leq 0.1$

$$\rho(S_n, N) \leq 0.5151 \varepsilon_n \lambda_n^{3/2},$$

где $\lambda_n := \sigma^2(n)/(\sigma^2(n) - \sigma_m)$, $\sigma_m := \max_{j=1, \dots, n} \sigma_j$. Для н.о.р. слагаемых $\varepsilon_n = \beta_1/(\sigma_1^3 \sqrt{n}) \geq 1/\sqrt{n}$. Значит, $n \geq \lceil 1/\varepsilon_n^2 \rceil$. Поэтому при $\varepsilon_n \leq 1/7$ имеем $\lambda_n \leq 49/48$ и, следовательно,

$$\rho(S_n, N) < 0.5436 \varepsilon_n.$$

В общем случае без ограничения общности считаем $\sigma = 1$, тогда $\sigma_m^3 \leq \beta_m \leq \sum_{j=1}^n \beta_j = \varepsilon_n$. Таким образом, при $\varepsilon_n \leq 0.0484$ выполнено

$$\begin{aligned} \rho(S_n, N) &\leq 0.5151 \varepsilon_n \left(\frac{1}{1 - \varepsilon_n^{2/3}} \right)^{3/2} \\ &< 0.5151 \varepsilon_n \left(\frac{1}{1 - 0.0484^{2/3}} \right)^{3/2} < 0.6379 \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Следовательно, в общем случае можно ограничиться рассмотрением ε_n из отрезка $I_1 = [0.0484; 1/0.6379]$, а в случае н.о.р. величин — из $I_2 = [1/7; 1/0.5894]$. В основе доказательства теоремы для этих значений ε_n лежит неравенство, полученное В. М. Золотаревым и впоследствии улучшенное ван Биком.

Пусть $p(u)$ — непрерывная симметричная функция из $L_1(\mathbf{R})$, такая, что ее преобразование Фурье $\hat{p}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} p(u) du \in L_1(\mathbf{R})$,

$$\|p\| := \int_{-\infty}^{\infty} |p(u)| du, \quad v(x) := \int_0^x \max\{p(u), 0\} du,$$

$$q(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \left| \hat{p}\left(\frac{t}{y}\right) \right| \frac{\delta_n(t)}{t} dt,$$

и существует χ_p — единственный положительный корень уравнения $4v(x) = \|p\|$. Тогда согласно неравенству ван Бика (см., например, [9])

$$\frac{\rho(S_n, N)}{\varepsilon_n} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{v(x) x/y + q(y)}{\varepsilon_n(4v(x) - \|p\|)}, \quad \forall y > 0, \quad x > \chi_p. \quad (43)$$

Обозначим

$$p_1(u) := \frac{\sin u}{2\pi u(1 - u^2/\pi^2)}, \quad \hat{p}_1(t) := \cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \mathbf{1}(|t| \leq 1),$$

где $\mathbf{1}(\cdot)$ — индикаторная функция. Рассмотрим семейство функций

$$p_{a_1, a_2, a_3}(u) := 0.5(p_1(u - a_1) + p_1(u + a_1) + a_3(p_1(u - a_2) + p_1(u + a_2))), \quad (44)$$

которым соответствуют преобразования Фурье

$$\hat{p}_{a_1, a_2, a_3}(t) := \hat{p}_1(t)(\cos(a_1 t) + a_3 \cos(a_2 t)), \quad a_1, a_2 \in \mathbf{R}, \quad a_3 > -1.$$

Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Рассмотрим всевозможные наборы с.в. $X_1, \dots, X_n$, $n \in \mathbf{N}$, такие, что $\varepsilon_n = \varepsilon$. Из (43) вытекает, что наименьшая верхняя грань $\rho(S_n, N)/\varepsilon_n$ по всем указанным наборам не превосходит при любых значениях параметров x, y, a_1, a_2, a_3 величины $D(\varepsilon, x, y, a_1, a_2, a_3)$, которая получается из правой части (43), если величину $\delta_n(t)$, фигурирующую в определении $q(y)$, заменить ее оценкой $\Delta(\varepsilon, t) := \min\{\delta^{(1)}(\varepsilon, t), \delta^{(2)}(\varepsilon, t), \delta^{(3)}(\varepsilon, t)\}$ и подставить $p := p_{a_1, a_2, a_3}$ из (44). Для $\varepsilon \in I_1$ будем подбирать значения x, y, a_1, a_2, a_3 так, чтобы $D(\varepsilon, x, y, a_1, a_2, a_3)$ оказалась как можно меньше, после чего оценка для C получится взятием верхней грани по всем $\varepsilon \in I_1$. Задачу подбора x, y, a_1, a_2, a_3 можно решать численно при помощи компьютера. В данной работе для этой цели был использован метод сопряженных градиентов, соответствующая процедура взята из библиотеки GNU Scientific Library версии 1.11. Вычисления были проведены для 440 значений ε , для остальных использовано неравенство

$$D(\varepsilon^{(1)}, x, y, a_1, a_2, a_3) \leq \frac{\varepsilon^{(2)}}{\varepsilon^{(1)}} D(\varepsilon^{(2)}, x, y, a_1, a_2, a_3), \quad \varepsilon^{(1)} < \varepsilon^{(2)}, \quad (45)$$

которое следует из того, что каждая из функций $\delta^{(1)}(\varepsilon, t)$, $\delta^{(2)}(\varepsilon, t)$, $\delta^{(3)}(\varepsilon, t)$ не убывает по ε . Экстремальное значение $D(\varepsilon, x, y, a_1, a_2, a_3) = 0.637733$ возникло при $\varepsilon = 0.4767$, $x = 7.5916$, $y = 17.9896$, $a_1 = 2.2371$, $a_2 = 5.3685$, $a_3 = 0.5062$.

В случае н.о.р. с.в. использование неравномерных по n оценок позволило добиться лучших результатов. Обозначим $J(\varepsilon, n)$ наименьшую верхнюю грань $\rho(S_n, N)/\varepsilon_n$ по всем наборам н.о.р. с.в. $X_1, \dots, X_n$ с $\varepsilon_n = \varepsilon$. Тогда $C = \sup\{J(\varepsilon, n): \varepsilon > 0, n \in \mathbf{N}\}$. Достаточно показать, что $J(\varepsilon, n) \leq 0.5894$ при $\varepsilon \in I_2, n \geq n_0(\varepsilon) := \lceil 1/\varepsilon^2 \rceil$. Зафиксируем ε , после чего для нескольких первых значений $n = n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k$ получим оценку для $J(\varepsilon, n)$ следующим образом. Заменим величину $\delta_n(t)$, фигурирующую в определении $q(y)$, оценкой $\Delta_1(n, \varepsilon, t) := \min\{\delta^{(4)}(n, \varepsilon, t), \delta^{(5)}(n, \varepsilon, t)\}$ и возьмем $p = p_{a_1, a_2, a_3}$, после чего в правой части (43) возникнет функция $J_1(\varepsilon, n, x, y, a_1, a_2, a_3)$, при каждом допустимом наборе параметров x, y, a_1, a_2, a_3 , представляющая собой оценку величины $J(\varepsilon, n)$. Как и ранее, при помощи компьютера подберем x, y, a_1, a_2, a_3 так, чтобы $J_1(\varepsilon, n, x, y, a_1, a_2, a_3)$ оказалась как можно меньше.

Для $n > n_0 + k$ величины $J(\varepsilon, n)$ оценим равномерно. Вместо $\delta_n(t)$ подставим $\Delta_2(n, \varepsilon, t) := \min\{\delta^{(6)}(n_0 + k + 1, \varepsilon, t), \delta^{(5)}(n_0 + k + 1, \varepsilon, t)\}$. В правой части (43) возникнет функция $J_2(\varepsilon, x, y, a_1, a_2, a_3) \geq \sup_{n > n_0 + k} J(\varepsilon, n)$. Подбрав должным образом x, y, a_1, a_2, a_3 , найдем искомую оценку. Обозначим $J(\varepsilon)$ максимум из $k+2$ полученных оценок. $J(\varepsilon)$ оценивает сверху величину $\sup_n J(\varepsilon, n)$. Поскольку при каждом фиксированном n функции $\delta^{(k)}(n, \varepsilon, t)$, $k = 4, 5, 6, 7$, не убывают по ε , то $J(\varepsilon)$ обладает аналогичным (45) свойством, а именно, $J(\varepsilon^{(1)}) \leq (\varepsilon^{(2)}/\varepsilon^{(1)})J(\varepsilon^{(2)})$, $\varepsilon^{(1)} < \varepsilon^{(2)}$, что позволило проводить вычисления лишь для конечного числа значений ε .

Для случая н.о.р. величин экстремальное значение $J(\varepsilon) = J_1(\varepsilon, n, x, y, a_1, a_2, a_3) = 0.589327$ было достигнуто при $\varepsilon = 0.14286$, $n = 49$, при этом $x = 3.8570$, $y = 28.6444$, $a_1 = 1.8827$, $a_2 = 2.8276$, $a_3 = -0.4959$. Итак, утверждение теоремы справедливо во всех рассмотренных случаях.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю признательность профессору А. В. Булинскому за внимание к работе и ценные указания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berry A. C. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, № 1, p. 122–136.
2. Esseen C.-G. On the Liapunoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. A28, № 9, p. 1–19.

3. *Bergström H.* On the central limit theorem in the case of not equally distributed random variables. — *Skand. Aktuarietidskr.*, 1949, v. 33, p. 37–62.
4. *Takano K.* A remark to a result of A. C. Berry. — *Res. Mem. Inst. Math.*, 1951, v. 9, № 6, p. 4.08–4.15.
5. *Золотарев В. М.* О близости распределений двух сумм независимых случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1965, т. 10, в. 3, с. 519–526.
6. *Золотарев В. М.* Абсолютная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1966, т. 11, в. 1, с. 108–119.
7. *Zolotarev V. M.* A sharpening of the inequality of Berry-Esseen. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1967, v. 8, p. 332–342.
8. *Золотарев В. М.* Некоторые неравенства теории вероятностей и их применение к уточнению теоремы А. М. Ляпунова. — *Докл. Акад. наук СССР*, 1967, т. 177, в. 3, с. 501–504.
9. *van Beek P.* An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry-Esseen inequality. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1972, v. 23, p. 187–196.
10. *Шуганов И. С.* Об уточнении верхней константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. — *Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды ВНИИСИ*, 1982, с. 109–115.
11. *Шевцова И. Г.* Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри-Эссеена. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, т. 51, в. 3, с. 622–626.
12. *Esseen C.-G.* A moment inequality with an application to the central limit theorem. — *Scand. Aktuarietidskr.*, 1956, v. 39, p. 160–170.
13. *Рогозин Б. А.* Одно замечание к работе Эссеена «Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме». — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1960, т. 5, в. 1, с. 125–128.
14. *Чистяков Г. П.* Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, т. 46, в. 2, с. 326–344.
15. *Чистяков Г. П.* Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. II. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, т. 46, в. 3, с. 573–579.
16. *Чистяков Г. П.* Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. III. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, т. 47, в. 3, с. 475–497.
17. *Королев В. Ю., Шевцова И. Г.* О точности нормальной аппроксимации. I. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, т. 50, в. 2, с. 353–366.
18. *Королев В. Ю., Шевцова И. Г.* О точности нормальной аппроксимации. II. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, т. 50, в. 3, с. 555–564.
19. *Goldstein L., Reinert G.* Stein's method and the zero bias transformation with application to simple random sampling. — *Ann. Appl. Probab.*, 1997, v. 7, № 4, p. 935–952.
20. *Raïc M.* Normal approximation by Stein's method. *Proceedings of the Seventh Young Statisticians Meeting.* — *Metodoloski zvezki*, 2003, v. 21, p. 71–97.
21. *Hoeffding H.* The extrema of the expected value of a function of independent random variables. — *Ann. Math. Statist.*, 1955, v. 26, № 2, p. 268–275.
22. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
23. *Prawitz H.* Weitere Ungleichungen für den absoluten Betrag einer charakteristischen Function. — *Scand. Actuarial J.*, 1974, p. 21–28.
24. *Prawitz H.* On the remainder in the central limit theorem. — *Scand. Actuarial J.*, 1975, p. 145–156.

Поступила в редакцию
4.VI.2009