Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Шевцова, Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена–Каца, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 2, 271–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4201>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:16:33

© 2010 г.

ШЕВЦОВА И. Г.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ПРАВИЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ В НЕРАВЕНСТВЕ БЕРРИ–ЭССЕЕНА–КАЦА¹⁾

Предложена уточненная классификация асимптотических констант в неравенстве Берри–Эссеена–Каца для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными моментами порядка $2 + \delta$, где $\delta \in [0, 1]$. Найдены двусторонние оценки и/или точные значения асимптотически наилучших и асимптотически правильных постоянных. Впервые построены нижние оценки правильных постоянных для случая $\delta \in [0, 1]$. Получены уточненные двусторонние оценки для симметричных распределений.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, схема серий, нормальная аппроксимация, неравенство Берри–Эссеена, дробь Ляпунова, равномерная оценка, правильная постоянная, асимптотически правильная постоянная, асимптотически наилучшая постоянная.

1. Постановка задачи. Правильные, асимптотически правильные и асимптотически наилучшие константы. Для $\delta \in [0, 1]$ введем класс $\mathcal{F}_{2+\delta}$ функций распределения $F(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x) = 1, \quad (1)$$

$$\beta_{2+\delta} = \beta_{2+\delta}(F) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2+\delta} dF(x) < \infty.$$

При $\delta = 0$ класс $\mathcal{F}_2$ — это класс всех распределений с нулевым средним и единичной дисперсией, $\beta_2 \equiv 1$. Легко видеть, что $\mathcal{F}_{\delta_1} \subset \mathcal{F}_{\delta_2}$ для любых $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq 1$, кроме того, $\beta_{2+\delta} \geq 1$ для всех $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ и $\delta \in [0, 1]$ в силу неравенства Ляпунова.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, заданные на некотором вероятностном пространстве

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: ishevtsova@cs.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00563, 08-01-00567, 08-07-00152 и 09-07-12032-офи-м), а также Министерства образования и науки (государственные контракты П1181 и П958, грант МК-581.2010.1).

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ и имеющие общую функцию распределения $F(x) = \mathbf{P}(X_1 < x)$, $x \in \mathbf{R}$. Обозначим

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

$$F_n(x) \equiv \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n < x\sqrt{n}) = F^{*n}(x\sqrt{n}), \quad x \in \mathbf{R},$$

где F^{*n} — n -кратная свертка функции распределения F с собой. Для $F \in \mathcal{F}_2$ в силу центральной предельной теоремы

$$\Delta_n(F) \equiv \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Интересен вопрос о скорости сходимости в (2).

Как показал в 1983 г. В. К. Мацкявичюс [16], для $F \in \mathcal{F}_2$ (т.е. если на распределение слагаемых не накладывать никаких ограничений, кроме существования дисперсии) сходимость в (2) может быть сколь угодно медленной. Таким образом, для конструирования разумных оценок скорости сходимости в (2), стремящихся к нулю с ростом n , необходима некоторая дополнительная информация о распределении слагаемых F . В данной работе предполагается, что эта дополнительная информация представлена интегральной характеристикой специального вида — абсолютным моментом $\beta_{2+\delta}$ порядка $2+\delta$, где δ — некоторое число из интервала $(0, 1]$. В этом случае остаточный член в центральной предельной теореме удастся оценить при помощи хорошо известного неравенства

$$\Delta_n(F) \equiv \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C_{\text{BE}}(\delta) L_n^{2+\delta}, \quad n \geq 1, \quad F \in \mathcal{F}_{2+\delta}, \quad (3)$$

где $L_n^{2+\delta} = \beta_{2+\delta} n^{-\delta/2}$ — так называемая дробь Ляпунова порядка $2+\delta$, а $C_{\text{BE}}(\delta)$ — некоторая положительная и конечная величина, зависящая только от δ . Данное неравенство впервые было доказано для $\delta = 1$ в 1941–1942 гг. независимо Э. Берри [40] и К.-Г. Эссееном [42]. Что касается случая $0 < \delta < 1$, то в 60-е годы XX столетия были предприняты успешные попытки обобщений результата Берри и Эссеена. Так, в 1963 г. М. Кац [54] обобщил неравенство Берри–Эссеена на случай, когда $\mathbf{E} X_1^2 g(X_1) < \infty$ для некоторой функции g , неотрицательной, четной и не убывающей вместе с $x/g(x)$ в области $x > 0$:

$$\Delta_n(F) \leq A \frac{\mathbf{E} X_1^2 g(X_1)}{g(\sqrt{n})},$$

где A не зависит от n (но зависит от выбора функции g). Таким образом, неравенство (3) при всех $0 < \delta \leq 1$ является частным случаем неравенства Каца с $g(x) = |x|^\delta$. В 1965 г. В. В. Петров [20] обобщил неравенство Каца на разнораспределенные слагаемые. В 1966 г. А. Бикялис [1] доказал неравномерную оценку для разнораспределенных случайных величин, имеющих конечные абсолютные моменты порядка $2+\delta$, $0 < \delta \leq 1$,

из которой вытекает равномерная оценка (3). Точные формулировки упомянутых результатов вместе с их доказательствами можно найти, например, в монографии В. В. Петрова [21].

Интересно отметить, что если при $\delta = 1$ неравенство (3) устанавливает правильную по порядку оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме, характерную, например, для любого *решетчатого* распределения $F \in \mathcal{F}_3$, то в случае $0 < \delta < 1$ «правильность» оценки (3) не очевидна. Более того, в 1967 г. Л. В. Осипов и В. В. Петров [19] доказали, что $\Delta_n(F) = o(n^{-\delta/2})$ для любого *фиксированного* распределения $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$, что ставит под сомнение адекватность и целесообразность использования оценок типа $\Delta_n(F) = O(n^{-\delta/2})$, в том числе оценки (3). Данная работа имеет своей целью в некотором роде «реабилитировать» эти оценки. А именно, будет показано, что верхняя огибающая семейства

$$\mathbf{G}_{2+\delta} = \{g_F(n) = \Delta_n(F), n \geq 1: F \in \mathcal{F}_{2+\delta}\}$$

эквивалентна $n^{-\delta/2}$ при $n \rightarrow \infty$, а следовательно, неравенство Берри–Эссеена–Каца устанавливает *правильный* порядок скорости сходимости, понимаемый в *равномерном* смысле. Кроме того, в данной работе впервые будут найдены нетривиальные асимптотические нижние оценки константы $C_{\text{ВЕ}}(\delta)$ в (3). Для случая же $\delta = 1$ до сих пор открытым остается вопрос о точных значениях абсолютных констант, входящих в оценку Берри–Эссеена и ее структурные уточнения, чему посвящен специальный раздел данной работы (см. п. 1.1).

1.1. Случай $\delta = 1$. При $\delta = 1$ неравенство (3) принимает вид

$$\Delta_n(F) \leq C_{\text{ВЕ}} L_n^3, \quad n \geq 1, \quad F \in \mathcal{F}_3, \quad (4)$$

где L_n^3 — дробь Ляпунова третьего порядка:

$$L_n^3 = L_n^3(F) = \frac{\beta_3(F)}{\sqrt{n}},$$

а $C_{\text{ВЕ}}$ — некоторая абсолютная положительная постоянная. Как отмечалось выше, неравенство (4) устанавливает *правильный порядок* скорости сходимости в центральной предельной теореме, поэтому принципиальное значение приобретает задача о *наилучшем оценивании* константы $C_{\text{ВЕ}}$. Не вдаваясь в подробности, отметим, что помимо оригинальных работ Э. Берри [40] и К.-Г. Эссеена [42] изучению и уточнению абсолютной константы $C_{\text{ВЕ}}$ были посвящены работы Х. Бергстрёма [38], [39], П. Л. Сюя [52], К. Такано [58], Р. Хоффмана (см. [43]), Д. Л. Уоллеса [62], [63], В. Феллера [29], С. Икеды [53], С. Цаля [64], В. М. Золотарева [6], [7], [65], П. ван Бика [35], Х. Правитца [57], И. С. Шиганова [34], С. В. Нагаева и В. И. Чеботарева [17], И. Г. Шевцовой [31], [32], И. С. Тюрина [60], [28], В. Ю. Королева и И. Г. Шевцовой [13]–[15], [55]; подробный обзор можно найти, например, в статьях [13], [15]. Наилучшая

на сегодняшний день оценка $C_{\text{BE}} \leq 0.4784$ получена в недавних работах [15], [55].

Большое значение вычислению наименьшего возможного (*правильного*) значения постоянной C_{BE} в (4)

$$C_{\text{п}} = \sup \left\{ \frac{\Delta_n(F)}{L_n^3(F)} : F \in \mathcal{F}_3, n \geq 1 \right\}$$

придавал А. Н. Колмогоров. В своей работе [11] он выдвинул гипотезу о том, что $C_{\text{п}} = 1/\sqrt{2\pi}$. Однако три года спустя, решая несколько иную задачу, К.-Г. Эсseen [43] показал, что значение постоянной C_{BE} в (4) не может быть меньше, чем

$$\frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 0.0107\dots = 0.4097\dots$$

Результат Эссеена получен как следствие решения задачи о наименьшей постоянной C_* , обеспечивающей асимптотическую оценку

$$\Delta_n(F) \leq C_* L_n^3 + o(L_n^3), \quad L_n^3 \rightarrow 0. \quad (5)$$

Эсseen предложил искать решение этой задачи в виде

$$C_* = \sup_{F \in \mathcal{F}_3} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^3}$$

и показал, что

$$C_{\text{ан}} \equiv \sup_{F \in \mathcal{F}_3} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^3} = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}}, \quad (6)$$

причем супремум достигается на двухточечном распределении, приписывающем вероятности $(\sqrt{10} - 2)/2$ и $(4 - \sqrt{10})/2$ точкам $-(4 - \sqrt{10})/2$ и $(\sqrt{10} - 2)/2$ соответственно. Поскольку $C_{\text{п}} \geq C_{\text{ан}}$, тем самым была найдена нижняя оценка для $C_{\text{п}}$. Величину $C_{\text{ан}}$ будем называть *асимптотически наилучшей* постоянной.

В 1960 г. Б. А. Рогозин в работе [24] показал, что если аппроксимацию F_n производить всем семейством нормальных законов, то асимптотическая постоянная в той постановке, которую рассматривал Эсseen, равна $1/\sqrt{2\pi}$:

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_3} \limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{a,b} \frac{1}{L_n^3} \sup_x \left| F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-a}{b}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Таким образом, предположение А. Н. Колмогорова было в определенном смысле подтверждено.

Интересно отметить, что в книге И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника [10, теорема 3.5.2] вместо (6) анонсировано соотношение

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^3} = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} \quad (7)$$

(в левой части которого по сравнению с (6) изменен порядок следования предела и супремума), но доказано именно (6). Эта неточность была замечена В. М. Золотаревым [8], указавшим, что задача вычисления наименьшего возможного значения C_* в (5) допускает как минимум две постановки, определяющие характер остаточного члена $o(L_n^3)$.

1) Остаточный член $o(L_n^3)$ в (5) не обязан обладать свойством равномерности по $F \in \mathcal{F}_3$. В этом случае C_* совпадает с асимптотически наилучшей константой, найденной Эссееном:

$$C_* = C_{\text{ан}} = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}}.$$

2) Константа C_* определяется выражением (7), фигурирующим в монографии [10]:

$$\overline{C}_{\text{ан}} \equiv \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^3}. \quad (8)$$

В этом случае, как легко видеть, остаточный член в (5) с $C_* = \overline{C}_{\text{ан}}$ равномерен в классе $\mathcal{F}_3$. Фактически же выражение (8) приводит к схеме серий, допускающей безусловную зависимость $F = F(n)$ и, следовательно, ситуацию, в которой отношение Ляпунова $L_n^3(F) = \beta_3(F)/\sqrt{n}$ не обязано быть бесконечно малой величиной при $n \rightarrow \infty$. А это, в свою очередь, означает, что неравенство (5) с $C_* = \overline{C}_{\text{ан}}$ дает, вообще говоря, завышенную оценку равномерного расстояния $\Delta_n(F)$ при малых значениях ляпуновской дроби L_n^3 .

Из контекста [8] ясно, что, формулируя определение асимптотической постоянной C_* в виде (8), В. М. Золотарев неявно подразумевал выполнение условия Ляпунова: $L_n^{2+\delta} \rightarrow 0$, которое в (8) выполняться не обязано. Все встает на свои места, если в (8) вместо безусловного взять условный супремум по n и F с фиксированным отношением Ляпунова: $L_n^3 = \ell > 0$, а затем устремить ℓ к нулю:

$$C_{\text{ан}} \equiv \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n, F \in \mathcal{F}_3: L_n^3 = \ell} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^3}. \quad (9)$$

Отметим, что множество возможных значений n , по которому берется супремум в (9), заведомо не может быть шире, чем полуось $n \geq 1/\ell^2$, поскольку $\beta_3 \geq 1$, и указанное условие является необходимым для того, чтобы класс распределений $F \in \mathcal{F}_3$ с фиксированным отношением Ляпунова $\beta_3(F)/\sqrt{n} = \ell$ не был пуст ни при каком $\ell > 0$. Подстановка

$C_* = C_{\text{ап}}$ в (5) превращает это неравенство в *асимптотическое равенство*

$$\sup_{n, F \in \mathcal{F}_3: L_n^3 = \ell} \Delta_n(F) = C_{\text{ап}} \ell + o(\ell), \quad \ell \rightarrow 0. \quad (10)$$

Таким образом, $C_{\text{ап}} \leq \bar{C}_{\text{ап}}$. При этом $\bar{C}_{\text{ап}}$ занимает промежуточное положение между $C_{\text{п}}$ и $C_{\text{ап}}$: $C_{\text{ап}} \leq \bar{C}_{\text{ап}} \leq C_{\text{п}}$. Величины $\bar{C}_{\text{ап}}$ и $C_{\text{ап}}$ будем называть соответственно *верхней асимптотически правильной* и *асимптотически правильной* константами. Кроме того, в силу равномерности остаточного члена $o(L_n^3)$ в (5) с $C_* = C_{\text{ап}}$ заключаем, что величины $C_{\text{ап}}$ и $C_{\text{ан}}$ связаны неравенством $C_{\text{ан}} \leq C_{\text{ап}}$, и, следовательно,

$$C_{\text{ан}} \leq C_{\text{ап}} \leq \bar{C}_{\text{ап}} \leq C_{\text{п}}. \quad (11)$$

Точное значение асимптотически правильной постоянной $C_{\text{ап}}$ найдено в фундаментальной работе Г. П. Чистякова [30], где построено новое асимптотическое разложение в центральной предельной теореме для независимых разнораспределенных случайных слагаемых. Из разложения Чистякова, в частности, вытекает оценка

$$\sup_{n, F \in \mathcal{F}_3: L_n^3 = \ell} \Delta_n(F) \leq \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} \ell + c' \ell^{40/39} |\ln \ell|^{7/6}, \quad (12)$$

где $c' \in (0, \infty)$ — некоторая абсолютная постоянная. Принимая во внимание результат Эссеена (6) и неравенства (11), из (12) несложно заключить, что

$$C_{\text{ап}} = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}}. \quad (13)$$

Таким образом, в цепочке неравенств (11) имеется как минимум одно равенство:

$$0.4097 \dots = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} = C_{\text{ан}} = C_{\text{ап}} \leq \bar{C}_{\text{ап}} \leq C_{\text{п}} \leq 0.4784.$$

В 1967 г. В. М. Золотарев [7] высказал предположение, что правильная постоянная в неравенстве Берри–Эссеена совпадает с асимптотически наилучшей:

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \frac{\Delta_n(F)}{L_n^3} : F \in \mathcal{F}_3, n \geq 1 \right\} &= \sup_{F \in \mathcal{F}_3} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^3} \\ &= \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} = 0.4097 \dots, \end{aligned}$$

т.е. в цепочке неравенств (11) на самом деле везде стоят знаки равенства. До настоящего времени эта гипотеза не доказана и не опровергнута. Наличие промежуточной постановки, связанной с вычислением $\bar{C}_{\text{ап}}$ и, по-видимому, пока серьезно никем не изучавшейся, могло бы дать почву

для сомнений в справедливости гипотезы В. М. Золотарева, если бы не оказалось, что соотношение (7), анонсированное И. А. Ибрагимовым и Ю. В. Линником, на самом деле верно. Доказательство этого утверждения приведено ниже. Указанный факт означает, что если гипотеза Золотарева неверна, то перебором лишь конечного числа значений n можно найти новую нижнюю оценку для константы C_{π} .

В связи с указанными выше двумя постановками задачи об отыскании наименьшего возможного значения постоянной C_* в асимптотическом неравенстве (5) В. М. Золотарев заметил в монографии [8, с. 231], что *«все известные к настоящему времени результаты об асимптотически правильных постоянных относятся к первому варианту постановки вопроса. Об этом можно только пожалеть, потому что второй вариант со всех точек зрения выглядит интереснее и содержательнее»*. Действительно, как сказано выше, та «постановка вопроса», которая Золотаревым названа второй, в свою очередь, допускает как минимум два возможных толкования: (8) и (9). Ниже будет показано, что есть еще и третье.

В 1975 г. Х. Правитц [57] анонсировал неравенство

$$\Delta_n(F) \leq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_3}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(n-1)} + \frac{c_1(\beta_3)^2 + c_2\beta_3 + c_3}{n-1} \quad \text{для } n \geq 2, F \in \mathcal{F}_3, \quad (14)$$

где c_1 , c_2 и c_3 — некоторые абсолютные постоянные, а также высказал предположение, что коэффициент $2/(3\sqrt{2\pi}) = 0.2659\dots$ при L_{n-1}^3 не может быть уменьшен. Доказательство неравенства (14) Правитц, по-видимому, предполагал опубликовать во второй части своей работы [57], которая по каким-то причинам опубликована не была: в названии упомянутой статьи есть римская цифра I, подразумевающая наличие продолжения, вслед за которой приводится конкретизация предмета исследований первой части — «One-dimensional independent variables with finite absolute moments of third order». Остается только догадываться, что Правитц предполагал посвятить вторую часть своей статьи одинаково распределенным случайным слагаемым, удовлетворяющим условиям, сформулированным в первой части.

По-видимому, неравенство Правитца (14) вызвало недоумение у некоторых специалистов в области теории вероятностей. Оно мало цитируется: в обзорах Mathematical Reviews [41] имеется лишь расплывчатое замечание о некоторых улучшениях для одинаково распределенных слагаемых, а в монографиях В. М. Золотарева [8] и В. В. Петрова [22], посвященных предельным теоремам теории вероятностей, ссылок на работы Правитца нет вообще. К тому же оценка (14), как может показаться на первый взгляд, противоречит хорошо известному результату Эссе-

ена (6), поскольку

$$\frac{2}{3\sqrt{2\pi}} < \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}}.$$

Тем не менее, внимательный анализ опубликованной работы позволяет убедиться в справедливости (14).

Неравенство Правитца интересно своей структурой: в нем из главного члена L_n^3 оценки точности нормальной аппроксимации выделено слагаемое вида $1/\sqrt{n}$, которое может быть значительно меньше ляпуновской дроби L_n^3 . Более того, в схеме серий может оказаться так, что даже при выполнении условия Ляпунова: $L_n^3 \rightarrow 0$, величина $\beta_3 = \beta_3(n)$ неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$ и слагаемое вида $n^{-1/2}$ является бесконечно малой величиной *более высокого порядка малости*, чем дробь Ляпунова $L_n^3 = \beta_3(n)/\sqrt{n}$. В связи с этим возникает задача вычисления наименьшей постоянной C , обеспечивающей справедливость асимптотического неравенства

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_3: \beta_3 = \beta} \Delta_n(F) \leq C \frac{\beta}{\sqrt{n}} + \frac{K(C)}{\sqrt{n}} + r_n(\beta) \frac{\beta}{\sqrt{n}}, \quad n, \beta \geq 1, \quad (15)$$

где $K(C) \in [0, \infty)$ зависит только от C , а остаточный член $r_n(\beta) \geq 0$ удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \sup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n(\ell\sqrt{n}) = 0, \quad \sup_{\beta \geq 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n(\beta) = 0. \quad (16)$$

Такое наименьшее значение C определяется выражением

$$\underline{C}_{\text{ап}} \equiv \lim_{\ell \rightarrow 0} \sup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3: L_n^3 = \ell} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^3}, \quad (17)$$

которое мы называем *нижней асимптотически правильной* постоянной. Использование нижней асимптотически правильной постоянной позволяет записать более точное для больших β_3 и малых L_n^3 по сравнению с (10) асимптотическое неравенство

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_3: \beta_3 = \beta} \Delta_n(F) \leq \underline{C}_{\text{ап}} \frac{\beta}{\sqrt{n}} + \frac{K}{\sqrt{n}} + r_n(\beta) \frac{\beta}{\sqrt{n}}, \quad n, \beta \geq 1,$$

где K — некоторая неотрицательная и конечная абсолютная постоянная.

Из опубликованной части работы Правитца [57] вытекает неравенство $\underline{C}_{\text{ап}} \leq 2/(3\sqrt{2\pi})$. Ниже будет продемонстрировано, что $\underline{C}_{\text{ап}} = 2/(3\sqrt{2\pi})$, и тем самым будет доказана гипотеза Правитца о неувлучшаемости коэффициента при L_{n-1}^3 в (14).

Интересно отметить, что разность между коэффициентами при ляпуновской дроби в неравенствах Чистякова (12) и Правитца (14) составляет

$$C_{\text{ап}} - \underline{C}_{\text{ап}} = \frac{\sqrt{10} - 1}{6\sqrt{2\pi}} = 0.14377 \dots,$$

а отношение —

$$C_{\text{ап}}(\underline{C}_{\text{ап}})^{-1} = \frac{\sqrt{10} + 3}{4} = 1.5405 \dots,$$

т.е. при $L_n^3 \rightarrow 0$ и достаточно больших β_3 правая часть (14) примерно в полтора раза меньше правой части (12). Как несложно убедиться, неравенство (14) асимптотически точнее, чем (12), уже при

$$\beta_3 \geq \frac{(2\sqrt{2\pi})^{-1}}{C_{\text{ап}} - \underline{C}_{\text{ап}}} = \frac{3}{\sqrt{10} - 1} = 1.3874 \dots$$

Кроме того, остаточный член в неравенстве Правитца убывает быстрее, чем в неравенстве Чистякова. Этот факт, по-видимому, объясняется тем, что в [30] рассматривается более общая задача нормальной аппроксимации для разнораспределенных случайных величин, тогда как (14) справедливо лишь для одинаково распределенных слагаемых.

Строгое доказательство аналога неравенства Правитца (14) для разнораспределенных слагаемых вытекает из работ В. Бенткуса [36], [37], в которых была получена неравномерная оценка

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{1}{2} \left(L_n^3 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \varphi(x) + \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} L_n^3 + c_B (L_n^3)^{4/3}, \quad (18)$$

справедливая для всех $x \in \mathbf{R}$, $F \in \mathcal{F}_3$, где c_B — некоторая конечная положительная постоянная. Поскольку $\sup_x \varphi(x) = \varphi(0) = (2\pi)^{-1/2}$, из (18) вытекает равномерная оценка

$$\Delta_n(F) \leq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} L_n^3 + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} + c_B (L_n^3)^{4/3}, \quad (19)$$

имеющая более «тяжелый» по сравнению с неравенством Правитца (14) остаточный член порядка $(L_n^3)^{4/3}$, против $(L_n^3)^2$ в (14). Это факт, по-видимому, также связан с тем, что в работах [36], [37] рассмотрен более общий случай разнораспределенных случайных слагаемых.

Сравнивая «асимптотические разложения» равномерных оценок нормальной аппроксимации (19) и (12), полученные Бенткусом и Чистяковым, заметим, что в силу условия $\beta_3 \geq 1$ из (19) вытекает неравенство

$$\Delta_n(F) \leq \frac{7}{6\sqrt{2\pi}} L_n^3 + c_B (L_n^3)^{4/3}, \quad (20)$$

в котором константа при главном члене — ляпуновской дроби — равна $0.4654 \dots$, что примерно на шесть сотых больше асимптотически правильной постоянной $0.4097 \dots$, фигурирующей в неравенстве Чистякова (12). В свою очередь, ценой за использование асимптотически правильной константы при ляпуновской дроби в (12) является ухудшение порядка остаточного члена по сравнению с (20).

Естественным развитием идей об уточнении асимптотических оценок точности нормальной аппроксимации стало получение абсолютных оценок с уточненной структурой. В 2010 г. В. Ю. Королев и И. Г. Шевцова [15], [55] доказали неравенства

$$\Delta_n \leq 0.33477 \frac{\beta_3 + 0.429}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \Delta_n \leq 0.3041 \frac{\beta_3 + 1}{\sqrt{n}}, \quad (21)$$

справедливые для всех $n \geq 1$ и $F \in \mathcal{F}_3$. Первое из этих неравенств является структурным уточнением классического неравенства Берри–Эссеена с наилучшей на сегодняшний день константой 0.4784, поскольку $0.33477(\beta_3 + 0.429) < 0.4784\beta_3$ в силу условия $\beta_3 \geq 1$; второе же — в рамках использованного численного метода — минимизирует константу при ляпуновской дроби и является абсолютным аналогом асимптотического неравенства Правитца (14). При этом полученное значение 0.3041 коэффициента при ляпуновской дроби отличается от минимально возможного 0.2659 менее чем на четыре сотых.

Возвращаясь к неравенству Правитца (14), которое, как отмечалось выше, является неуплучшаемым в отношении первого слагаемого, рассмотрим вопрос о точности коэффициента при втором слагаемом $n^{-1/2}$ в этом неравенстве. С этой целью рассмотрим задачу вычисления при каждом $C \in [C_{\text{ап}}, C_{\text{ап}}]$ минимально возможного коэффициента $K(C)$, обеспечивающего справедливость асимптотического неравенства (15). В силу условий (16) величину $K(C)$ можно записать в виде

$$K(C) = \sup_{\beta \geq 1} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3: \beta_3(F) = \beta} \Delta_n(F) \sqrt{n} - C\beta \right),$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \leq C \leq \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}}.$$

Меняя местами $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ и $\sup_F$ и учитывая асимптотическое разложение Эссеена, получаем оценку

$$K(C) \geq \sup_{F \in \mathcal{F}_3} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \Delta_n(F) \sqrt{n} - C\beta_3(F) \right)$$

$$= \sup_{h > 0} \sup_{F \in \mathcal{F}_3^h} \left(\frac{\alpha_3(F) + 3h}{6\sqrt{2\pi}} - C\beta_3(F) \right),$$

где $\mathcal{F}_3^h$ — класс решетчатых с шагом h распределений из $\mathcal{F}_3$, $\alpha_3(F)$ — третий момент распределения F . Указанный супремум достигается (см., например, [51], [8]) на двухточечных распределениях, имеющих скачки $q \in (0, 1)$ и $p = 1 - q$ в точках $-\sqrt{p/q}$ и $\sqrt{q/p}$ соответственно, для которых

$$\alpha_3 = \frac{q - p}{\sqrt{pq}}, \quad \beta_3 = \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{pq}}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{pq}}.$$

Это дает основание записать неравенство

$$K(C) \geq \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \sup_{0 < p \leq 1/2} \frac{2 - p - 3\sqrt{2\pi}(1 - 2p + 2p^2)C}{\sqrt{p(1-p)}} \equiv K_*(C).$$

Полученная оценка означает, что для любого $C \in (\underline{C}_{\text{ап}}, C_{\text{ап}}]$ найдется распределение $F \in \mathcal{F}_3$ такое, что

$$\Delta_n(F) = C \frac{\beta_3(F)}{\sqrt{n}} + \frac{K_*(C)}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Это распределение сосредоточено в двух точках со скачками величины p и $1-p$, где $p = p(C)$ — точка максимума в $K_*(C)$. Значения найденной миноранты $K_*(C)$ для некоторых $C \in [\underline{C}_{\text{ап}}, C_{\text{ап}}]$ приведены в таблице 1 в третьем столбце. Интересно проследить поведение экстремального распределения с изменением C . В последующих столбцах таблицы 1 приведены соответственно значения параметра $p = p(C)$ экстремального распределения, его третий абсолютный момент $\beta_3(C)$, коэффициент $C\beta_3(C) + K_*(C)$ при $n^{-1/2}$ в (22), а также сумма $C + K_*(C)$ — для удобства сравнения с классической оценкой типа неравенства Чистякова (12).

Таблица 1. Двусторонние оценки для $K(C)$ в (15) и параметры экстремального распределения, доставляющего максимум миноранте $K_*(C)$

C	$K(C) \leq$	$K(C) \geq$	$p(C)$	$\beta_3(C)$	$C\beta_3 + K_*$	$C + K_*$
$\underline{C}_{\text{ап}}$	0.1995	0.1569	0.3170	1.2185	0.4810	0.4229
0.27	0.1955	0.1520	0.3239	1.2010	0.4763	0.4220
0.28	0.1855	0.1401	0.3386	1.1667	0.4669	0.4202
0.29	0.1755	0.1286	0.3506	1.1413	0.4597	0.4187
0.30	0.1655	0.1173	0.3609	1.1218	0.4539	0.4174
0.31	0.1555	0.1062	0.3696	1.1062	0.4492	0.4162
0.32	0.1455	0.0952	0.3773	1.0937	0.4452	0.4152
0.33	0.1355	0.0843	0.3840	1.0834	0.4418	0.4143
0.34	0.1255	0.0735	0.3900	1.0747	0.4389	0.4135
0.35	0.1155	0.0628	0.3954	1.0674	0.4364	0.4128
0.36	0.1055	0.0521	0.4003	1.0611	0.4342	0.4122
0.37	0.0955	0.0416	0.4047	1.0557	0.4322	0.4116
0.38	0.0855	0.0310	0.4087	1.0510	0.4305	0.4111
0.39	0.0755	0.0205	0.4124	1.0469	0.4289	0.4106
0.40	0.0655	0.0101	0.4158	1.0433	0.4274	0.4101
$C_{\text{ап}}$	0	0	0.4189	1.0401	0.4262	0.4097

Отметим, что величины $K_*(C)$ и $\beta_3(C)$ монотонно убывают при $C \in [\underline{C}_{\text{ап}}, C_{\text{ап}}]$, изменяясь в пределах

$$0 = K(C_{\text{ап}}) = K_*(C_{\text{ап}}) \leq K_*(C) \leq K_*(\underline{C}_{\text{ап}}) = 0.1569 \dots, \\ \beta_3(C_{\text{ап}}) \leq \beta_3(C) \leq \beta_3(\underline{C}_{\text{ап}}) = 1.2185 \dots$$

Здесь $\beta_3(C_{\text{ап}})$ — третий момент распределения Эссеена (доставляющего супремум в $C_{\text{ап}}$ и $C_{\text{ан}}$):

$$\beta_3(C_{\text{ап}}) = \sqrt{\frac{20(\sqrt{10} - 3)}{3}} = 1.0401 \dots$$

Кроме того, $K_*(0.33477) = 0.0791 \dots$, $K_*(0.3041) = 0.1127 \dots$, что соответственно примерно на семь сотых и две десятых меньше аналогичных коэффициентов $0.33477 \cdot 0.429 \approx 0.1436$ и 0.3041 в неравенствах (21). В правой предельной точке $K_*(C_{\text{ап}}) = 0$, что полностью согласуется с неравенством Чистякова (12) и устанавливает точное значение $K(C_{\text{ап}}) = 0$, а в левой — $K_*(C_{\text{ан}}) = 0.1569 \dots$, откуда вытекает двусторонняя оценка

$$0.1569 \leq K(C_{\text{ан}}) \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} < 0.1995,$$

оставляя открытым вопрос о неухудшаемости второго слагаемого в неравенстве Правитца (14). Кроме того, из неравенств Правитца (14) и Бенткуса (19) с учетом соотношения $\beta_3(F) \geq 1$, $F \in \mathcal{F}_3$, можно получить следующую верхнюю оценку величины $K(C)$:

$$K(C) \leq \frac{7}{6\sqrt{2\pi}} - C, \quad C_{\text{ан}} \leq C \leq C_{\text{ап}}.$$

Значения этой мажоранты приведены в таблице 1 во втором столбце. Для случая $C = C_{\text{ап}}$ в таблице указана более точная верхняя оценка $K(C_{\text{ап}}) \leq 0$, вытекающая из неравенства Чистякова (12).

Отметим, что предельные значения C являются в определенном смысле оптимальными: пара $(C_{\text{ап}}, K(C_{\text{ап}}))$ минимизирует сумму коэффициентов $C + K(C)$ в (15), а величина $K(C_{\text{ан}})$ является максимумом:

$$K(C_{\text{ан}}) = \sup_{\beta' \geq 1} \limsup_{\beta'' \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sup_F \inf_G \left(\Delta_n(F) - \Delta_n(G) \frac{\beta_3(F)}{\beta_3(G)} \right), \quad (23)$$

где супремум берется по всем $F \in \mathcal{F}_3$ таким, что $\beta_3(F) = \beta'$, а инфимум — по всем $G \in \mathcal{F}_3$, для которых $\beta_3(G) = \beta''$. При этом

$$C_{\text{ап}} + K(C_{\text{ан}}) \geq 0.2659 + 0.1569 = 0.4228 > C_{\text{ап}}.$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства (23), достаточно заметить, что

$$\tilde{C} \equiv \limsup_{\beta \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{G \in \mathcal{F}_3: \beta_3(G) = \beta} \Delta_n(G) \frac{\sqrt{n}}{\beta_3(G)} = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} = C_{\text{ап}}, \quad (24)$$

и подставить полученное выражение для $C_{\text{ап}}$ в определение $K(C_{\text{ап}})$. Для доказательства соотношения (24) сначала заметим, что, как вытекает из

асимптотического разложения Эссеена для решетчатых распределений,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{G \in \mathcal{F}_3: \beta_3(G)=\beta} \Delta_n(G) \frac{\sqrt{n}}{\beta_3(G)} &\geq \sup_{G \in \mathcal{F}_3: \beta_3(G)=\beta} \frac{1}{\beta} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \Delta_n(G) \\ &\geq \frac{\alpha_3(\beta) + 3h(\beta)}{6\sqrt{2\pi}\beta}, \end{aligned}$$

где $\alpha_3(\beta)$, $h(\beta)$ — соответственно третий момент и шаг решетки двухточечного распределения со скачками величины $p = p(\beta) \in (0, 1/2]$ и $1-p$ такими, что $(p^2 + (1-p)^2)/\sqrt{p(1-p)} = \beta$, $\beta \geq 1$. Данное уравнение, как можно убедиться, при каждом $\beta \geq 1$ имеет единственное решение $p = p(\beta) \in (0, 1/2]$, причем $p(\beta) \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow \infty$. С учетом сказанного получаем

$$\tilde{C} \geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\alpha_3(\beta) + 3h(\beta)}{6\sqrt{2\pi}\beta} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{2-p}{1-2p+2p^2} = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}},$$

что в совокупности с верхней оценкой $\tilde{C} \leq 2/(3\sqrt{2\pi})$, вытекающей из неравенства Правитца (14), доказывает соотношение (24).

Наконец, отметим, что несложный анализ выражений (6), (9), (17), определяющих асимптотически наилучшие и асимптотически правильные постоянные, позволяет утверждать, что $\underline{C}_{\text{ап}} \leq C_{\text{ап}}$ и $C_{\text{ан}} \leq \underline{C}_{\text{ап}}$, однако ответить на вопрос о том, как связаны между собой величины $C_{\text{ан}}$ и $\underline{C}_{\text{ап}}$, не так-то просто. Только детальное изучение структуры оценок точности нормальной аппроксимации для $F \in \mathcal{F}_3$ позволяет заключить, что $C_{\text{ан}} > \underline{C}_{\text{ап}}$. Довольно неожиданным оказывается тот факт, что, как мы увидим ниже, для $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ с $0 < \delta < 1$ аналоги этих асимптотических постоянных связаны противоположным строгим неравенством.

1.2. Случай $0 < \delta < 1$. Работы М. Каца [54], В. В. Петрова [20] и А. Бикялиса [1] вызвали естественный вопрос о «правильности» оценки (3) скорости сходимости в центральной предельной теореме для распределений, не имеющих моментов третьего порядка. Одной из первых работ, посвященных этому вопросу, стала статья И. А. Ибрагимова [9], в которой доказана эквивалентность условий

$$\Delta_n(F) = O(n^{-\delta/2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) < \infty, \quad \int_{|x| \geq z} x^2 dF(x) = O(z^{-\delta}), \quad z \rightarrow \infty,$$

при всех $0 < \delta < 1$. Теорема Ибрагимова означает, что условие конечности момента $\mathbf{E}|X_1|^{2+\delta}$ является *достаточным*, но отнюдь не необходимым для того, чтобы обеспечить в центральной предельной теореме скорость сходимости $n^{-\delta/2}$. В частности, если случайная величина X_1

имеет плотность

$$p(x) = \frac{2+\delta}{2} \frac{1}{(|x|+1)^{3+\delta}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

то, очевидно, $\mathbf{E}|X_1|^{2+\delta} = +\infty$, но $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$, и для любого $z > 0$

$$\int_{|x| \geq z} x^2 dF(x) = \frac{2+\delta}{2} \int_{|x| \geq z} \frac{x^2 dx}{(|x|+1)^{3+\delta}} \leq \frac{2+\delta}{2} \int_{|x| \geq z} \frac{dx}{|x|^{1+\delta}} = \frac{2+\delta}{\delta} z^{-\delta},$$

т.е. условия Ибрагимова выполняются.

В 1967 г. К.-Ч. Хейди [49] показал, что условие $\mathbf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty$ равносильно сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\delta/2} \Delta_n(F).$$

Из теоремы Хейди вытекает, что либо $\rho(F_n, \Phi) = o(n^{-\delta/2})$ при $n \rightarrow \infty$, либо $\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho(F_n, \Phi) n^{\delta/2} > 0$, но порядок $n^{-\delta/2}$ характерен лишь для некоторой достаточно разреженной подпоследовательности значений индекса n (такой, чтобы соответствующий ряд сходился), в то время как для остальных значений n скорость сходимости выше. Вывод о том, что на самом деле имеет место первая ситуация, вытекает из результата работы Л. В. Осипова и В. В. Петрова [19], согласно которому если $\mathbf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta \in (0, 1)$, то существует функция $\psi(u)$, определенная в области $u > 0$, ограниченная и убывающая в этой области, такая, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0 \quad \text{и} \quad |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{\psi(\sqrt{n}(1+|x|))}{n^{\delta/2}(1+|x|)^{2+\delta}}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \geq 1.$$

Поскольку правая часть последнего неравенства достигает своего максимального значения при $x = 0$, из теоремы Осипова–Петрова получаем, что

$$\Delta_n(F) \leq \psi(\sqrt{n}) n^{-\delta/2} = o(n^{-\delta/2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

т.е. для каждого *фиксированного* распределения $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ с $0 < \delta < 1$ скорость сходимости к нормальному закону выше, чем устанавливаемая оценкой Берри–Эссена–Каца. Однако детальный анализ доказательства теоремы Осипова–Петрова позволяет заключить, что вид функции $\psi(u)$ и порядок её малости при $u \rightarrow \infty$ не являются «универсальными», а следовательно, конкретный порядок мажоранты $o(n^{-\delta/2})$ из неравенства Осипова–Петрова определяется видом распределения $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$. Нижние оценки, приводимые в настоящей работе, позволяют окончательно заключить, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \Delta_n(F) \frac{n^{\delta/2}}{\beta_{2+\delta}(F)} > 0.$$

В 70-е годы усилия исследователей были направлены на конкретизацию неравенства Осипова–Петрова и поиск правильных оценок для $\Delta_n(F)$ в терминах исходного распределения F . Так, в 1975 г. Хейди [50] получил оценку

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C_H}{1 + |x|^{2+\delta}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} x^3 dG(x) + \frac{1}{n^{\delta/2}} \int_{\sqrt{n}}^{\infty} x^{2+\delta} dG(x) \right), \quad x \in \mathbf{R},$$

где $G(x) = \mathbf{P}(|X_1| < x) = F(x) - F(-x + 0)$, C_H — абсолютная положительная постоянная. Отметим, что правая часть неравенства Хейди при каждом фиксированном $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ имеет более высокий порядок малости, чем $n^{-\delta/2}$.

В работах Л. В. Осипова [18], Л. В. Розовского [25], [26], П. Холла [46] была установлена двусторонняя асимптотическая оценка

$$\Delta_n(F) + \frac{1}{\sqrt{n}} \asymp \psi_n(F) + \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\psi_n(F) = \int_{|x| \geq \sqrt{n}} x^2 dF(x) + \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \int_{|x| < \sqrt{n}} x^3 dF(x) \right| + \frac{1}{n} \int_{|x| < \sqrt{n}} x^4 dF(x),$$

а запись $a_n \asymp b_n$ означает, что выполнены неравенства

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty.$$

Наконец, в 1984 г. П. Холл и А. Д. Барбур [48] доказали нижнюю оценку

$$\Delta_n(F) \geq \frac{\psi_n(F)}{392} - \frac{121}{392} \frac{1}{n}.$$

Кроме того, П. Холлу [45] и Л. де Хаану и Л. Пенгу [44] удалось найти некоторые асимптотические константы в оценках точности нормальной аппроксимации, выписанных в терминах хвостов исходного распределения F . Для распределений, имеющих правый $1 - F(x)$ и левый $F(-x)$ правильно меняющиеся хвосты при $x \rightarrow \infty$, в 1979 г. Холл [45] доказал двустороннюю асимптотическую оценку

$$a(\delta) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n(F)}{K(\sqrt{n})} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n(F)}{K(\sqrt{n})} \leq b(\delta), \quad 0 < \delta < 1, \quad (25)$$

где

$$K(x) = x^2(F(-x) + 1 - F(x)), \quad x > 0,$$

$$a(\delta) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma((3 + \delta)/2)}{4\sqrt{2} \Gamma(2 + \delta) \sin((\pi\delta)/2)}, \quad b(\delta) = \frac{2^{\delta/2} \Gamma((2 + \delta)/2)}{\Gamma(2 + \delta) \sin \pi\delta}, \quad 0 < \delta < 1.$$

Кроме того, если хвосты функции распределения F удовлетворяют дополнительному условию сбалансированности:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(x)}{F(-x) + 1 - F(x)} = p \in [0, 1], \quad (26)$$

то, как показано в [45], константу $b(\delta)$ в (25) можно заменить на

$$s(\delta) = \frac{\pi \Gamma((2 + \delta)/2)}{2^{2-\delta/2} (\Gamma(2 + \delta))^2 \sin((\pi \delta)/2)} \sqrt{1 + (2p - 1)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi \delta}{2}} \leq b(\delta),$$

$$0 < \delta < 1.$$

Для нерешетчатых распределений, имеющих правильно меняющийся хвост $1 - F(x) + F(-x)$ при $x \rightarrow \infty$ и удовлетворяющих условию сбалансированности (26), в [44] доказано, что равномерно по $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n(x a_n / \sqrt{n}) - \Phi(x)}{n(F(-a_n) + 1 - F(a_n))} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{-it} W_\delta(t) e^{-t^2/2} dt,$$

где

$$a_n = \sup \left\{ a > 0: \frac{2}{a^2} H(a) \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad (27)$$

$$H(a) = \int_0^a u(F(-u) + 1 - F(u)) du, \quad a > 0,$$

$$W_\delta(t) = \frac{\Gamma(1 - \delta)}{\delta(1 + \delta)} \left(\cos \frac{\pi \delta}{2} - (2p - 1) \sin \frac{\pi \delta}{2} \operatorname{sign} t \cdot i \right) |t|^{2+\delta} - \frac{t^2}{\delta},$$

$$0 < \delta < 1.$$

Резюмируя перечисленные результаты, заметим, что оценки в терминах хвостов, безусловно, точнее, чем неравенство Берри–Эссеена–Каца. Однако при этом естественно возникает вопрос о том, что считать оценкой. Самой точной и правильной оценкой равномерного расстояния является, очевидно, само равномерное расстояние: $\Delta_n(F) \leq \Delta_n(F)$, но по своему смыслу *оценка* должна иметь более простой вид по сравнению с оцениваемой величиной и эффективно вычисляться, требуя лишь *некоторую наиболее доступную* информацию об исходном распределении. Оценки типа Хейди–Осипова–Розовского–Холла используют полную информацию о хвосте распределения F , что зачастую эквивалентно знанию самого распределения F . В неравенстве же Берри–Эссеена–Каца вся необходимая информация об исходном распределении сосредоточена лишь в одной характеристике интегрального типа, которую, как правило, можно эффективно оценить по выборке. Таким образом, ценой за использование более тонких методов является доступ к более полной информации об исходном распределении, однако окончательный выбор

инструмента для оценивания точности нормальной аппроксимации на практике, безусловно, остается прерогативой самого исследователя.

В данной работе мы сосредоточимся на изучении оценок точности нормальной аппроксимации типа неравенства Берри–Эссеена–Каца. Аналогично случаю $\delta = 1$ введем определения *правильной* постоянной:

$$C_{\pi}(\delta) = \sup \left\{ \frac{\Delta_n(F)}{L_n^{2+\delta}} : n \geq 1, F \in \mathcal{F}_{2+\delta} \right\},$$

асимптотически наилучшей постоянной:

$$C_{\text{ан}}(\delta) = \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^{2+\delta}}, \quad (28)$$

верхней асимптотически правильной постоянной:

$$\overline{C}_{\text{ан}}(\delta) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^{2+\delta}},$$

асимптотически правильной постоянной:

$$C_{\text{ап}}(\delta) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n \geq \ell^{-2/\delta}} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: L_n^{2+\delta} = \ell} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^{2+\delta}}, \quad (29)$$

и нижней асимптотически правильной постоянной:

$$\underline{C}_{\text{ап}}(\delta) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: L_n^{2+\delta} = \ell} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^{2+\delta}}. \quad (30)$$

Определенные величины, очевидно, связаны следующей цепочкой неравенств:

$$\max\{C_{\text{ан}}(\delta), \underline{C}_{\text{ап}}(\delta)\} \leq C_{\text{ап}}(\delta) \leq \overline{C}_{\text{ан}}(\delta) \leq C_{\pi}(\delta), \quad 0 < \delta \leq 1.$$

Из работы [19] вытекает, что $C_{\text{ан}}(\delta) \equiv 0$, $0 < \delta < 1$. Ниже будет приведена положительная миноранта для нижней асимптотически правильной постоянной $\underline{C}_{\text{ап}}(\delta)$. Существование последней означает, что порядок оценки Берри–Эссеена–Каца не может быть улучшен равномерно по $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$. Указанный факт также придает смысл задаче уточнения константы в неравенстве (3) и вычисления ее наименьшего возможного значения — правильной постоянной $C_{\pi}(\delta)$. Верхние оценки последней впервые были найдены в 1983 г. В. Тысяаком [59] и последовательно улучшены в недавних работах [3], [5]. Наилучшие на сегодняшний день оценки, полученные в [5], приведены во втором столбце таблицы 2.

Таблица 2. Двусторонние оценки для $C_{\Pi}(\delta) \geq \overline{C}_{\text{ап}}(\delta) \geq C_{\text{ап}}(\delta) \geq \underline{C}_{\text{ап}}(\delta)$

δ	$C_{\Pi}(\delta) \leq$	$\overline{C}_{\text{ап}}(\delta) \geq$	$C_{\text{ап}}(\delta) \leq$	$\underline{C}_{\text{ап}}(\delta) \geq$
1–	0.5129	0.2344	0.0665	0.0295
0.9	0.5383	0.2133	0.0642	0.0323
0.8	0.5723	0.2245	0.0665	0.0356
0.7	0.6026	0.2376	0.0709	0.0396
0.6	0.6276	0.2530	0.0772	0.0444
0.5	0.6413	0.2715	0.0854	0.0503
0.4	0.6342	0.2939	0.0956	0.0575
0.3	0.6195	0.3220	0.1085	0.0665
0.2	0.6094	0.3585	0.1245	0.0780
0.1	0.6028	0.4092	0.1444	0.0939
0+	–	1/2	0.1692	0.1209

Несмотря на почти тридцатилетнюю историю уточнения верхних оценок константы в неравенстве Берри–Эссеена–Каца, ничего не известно о ее нижних оценках. В данной работе восполнен этот пробел, причем нижняя оценка для $C_{\Pi}(\delta)$ получена дважды: как миноранта *нижней* асимптотически правильной постоянной $\underline{C}_{\text{ап}}(\delta)$ (оказавшаяся положительной — см. выше) и как миноранта *верхней* асимптотически правильной постоянной $\overline{C}_{\text{ап}}(\delta)$, оказавшаяся строго большей полученной миноранты для $\underline{C}_{\text{ап}}(\delta)$. Тем не менее, нижняя оценка для $C_{\Pi}(\delta)$, устанавливаемая минорантой для $\underline{C}_{\text{ап}}(\delta)$, интересна тем, что она остается справедливой даже в случае, когда ляпуновская дробь $L_n^{2+\delta}$ в (3) сколь угодно мала. Значения обеих найденных минорант приведены в таблице 2 в третьем и пятом столбцах.

В работе [4] была получена мажоранта для асимптотически правильной постоянной $C_{\text{ап}}(\delta)$. Эта мажоранта оказалась строго меньше миноранты верхней асимптотической правильной постоянной $\overline{C}_{\text{ап}}(\delta)$ (см. таблицу 2), откуда вытекает строгое неравенство $C_{\text{ап}}(\delta) < \overline{C}_{\text{ап}}(\delta)$, $0 < \delta < 1$. Отметим, что в случае $\delta = 1$ аналогичные величины совпадают: $C_{\text{ап}}(1) = \overline{C}_{\text{ап}}(1) = (\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2\pi}) = 0.4097\dots$

Идеи уточнения структуры абсолютных оценок равномерного расстояния, изложенные в предыдущем пункте для $\delta = 1$, были недавно реализованы для $0 < \delta < 1$ в работе [5] в виде

$$\Delta_n(F) \leq C_1(\delta) \frac{\beta_{2+\delta}(F) + 1}{n^{\delta/2}}, \quad n \geq 1, \quad F \in \mathcal{F}_{2+\delta},$$

где для величины $C_1(\delta)$ при некоторых δ были получены следующие оценки:

δ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$C_1(\delta) \leq$	0.5451	0.4901	0.4450	0.4080	0.3775	0.3528	0.3334	0.3187	0.3089

При этом константа $C_1(\delta)$ не может быть меньше нижней асим-

птотически правильной постоянной $\underline{C}_{\text{ап}}(\delta)$ (см. последний столбец таблицы 2).

1.3. Случай $\delta = 0$. Для $\delta = 0$ полагаем $\beta_2 = 1$, $L_n^2 = 1$, в связи с чем сохраняют смысл лишь асимптотически наилучшая, верхняя асимптотически правильная и правильная постоянные:

$$\begin{aligned} C_{\text{ап}}(0) &= \sup_{F \in \mathcal{F}_2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \Delta_n(F), \quad \overline{C}_{\text{ап}}(0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_2} \Delta_n(F), \\ C_{\text{п}}(0) &= \sup_{n \geq 1, F \in \mathcal{F}_2} \Delta_n(F). \end{aligned}$$

Очевидно, что $0 = C_{\text{ап}}(0) \leq \overline{C}_{\text{ап}}(0) \leq C_{\text{п}}(0) \leq 1$. Как отмечалось выше, в случае $\delta = 0$ сходимость в центральной предельной теореме может быть сколь угодно медленной [16]. Мы дополним это утверждение, построив нетривиальную миноранту для верхней асимптотически правильной постоянной $\overline{C}_{\text{ап}}(0)$: $\overline{C}_{\text{ап}}(0) \geq 1/2$. С другой стороны, в случае существования вторых моментов скорость сходимости в центральной предельной теореме все же удастся оценить в терминах хвостов распределения F . В 1986 г. Л. Падитц [56] доказал неравенство

$$\begin{aligned} \Delta_n(F) &\leq 3.51 \left(\int_{|x| \leq \sqrt{n}} |x|^3 dF(x) + \int_{|x| > \sqrt{n}} |x|^2 dF(x) \right), \\ n &\geq 1, \quad F \in \mathcal{F}_2, \end{aligned}$$

откуда формально вытекает оценка $C_{\text{п}}(0) \leq 3.51$. Нетривиальные выводы о значении константы $C_{\text{п}}(0)$ можно сделать, принимая во внимание соотношение

$$\sup_{F \in \mathcal{F}_2} \sup_x |F(x) - \Phi(x)| = \sup_{b > 0} \left(\frac{1}{1 + b^2} - \Phi(-b) \right) = 0.5409 \dots$$

Это соотношение является следствием леммы 12.3 из монографии [2], устанавливающей верхнюю оценку равномерного расстояния между F и Φ , и работы [12], в которой было построено экстремальное (двухточечное) распределение. Поскольку $F_n \in \mathcal{F}_2$ для любого $F \in \mathcal{F}_2$ и $n \geq 1$, отсюда получаем

$$\begin{aligned} C_{\text{п}}(0) &= \sup_{n \geq 1} \sup_{F \in \mathcal{F}_2} \Delta_n(F) = \sup_{F \in \mathcal{F}_2} \sup_x |F(x) - \Phi(x)| \\ &= \sup_{b > 0} \left(\frac{1}{1 + b^2} - \Phi(-b) \right) = 0.5409 \dots \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$0 = C_{\text{ап}}(0) < \frac{1}{2} \leq \overline{C}_{\text{ап}}(0) \leq C_{\text{п}}(0) = 0.5409 \dots$$

Наконец, приведем еще два результата, связанных с задачей вычисления некоторых асимптотических констант в оценках точности нормальной аппроксимации для распределений с правильно меняющимися хвостами. В 1979 г. П. Холл [45] доказал двустороннюю асимптотическую оценку

$$0.0883 \dots = \frac{1}{8\sqrt{2}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n(F)}{K(\sqrt{n})} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n(F)}{K(\sqrt{n})} \leq \frac{\pi}{2} = 1.5707 \dots,$$

где

$$K(x) = \int_{|u|>x} u^2 dF(u), \quad x > 0,$$

справедливую для $F \in \mathcal{F}_2$ при условии, что обе функции $x^2(1 - F(x))$, $x^2F(-x)$ медленно меняются при $x \rightarrow \infty$.

В 1997 г. Л. де Хаан и Л. Пенг [44] дополнили результат Холла, показав, что для нерешетчатых распределений F с нулевым средним и медленно меняющимся хвостом $x^2(F(-x) + 1 - F(x))$ при $x \rightarrow +\infty$, удовлетворяющим условиям сбалансированности (26),

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n(xa_n/\sqrt{n}) - \Phi(x)}{n(F(-a_n) + 1 - F(a_n))} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (2(\ln t + \gamma - 1) \sin tx + \pi(2p - 1) \cos tx) t e^{-t^2/2} dt \end{aligned}$$

равномерно по $x \in \mathbf{R}$, где $\gamma = 0.5772 \dots$ — константа Эйлера, величина p определена в (26), a_n — в (27).

2. Новые результаты.

Теорема 1. Для нижней асимптотически правильной постоянной $\underline{C}_{\text{ап}}$ справедливо соотношение

$$\underline{C}_{\text{ап}} \equiv \lim_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3: L_n^3 = \ell} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^3} = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} = 0.2659 \dots$$

Доказательство. Из неравенства Правитца (14) вытекает верхняя оценка $\underline{C}_{\text{ап}} \leq 2/(3\sqrt{2\pi})$, докажем нижнюю. Пусть F_* — функция распределения Бернулли со скачками величины $p \in (0, 1/2]$ и $q = 1 - p$ в точках $\sqrt{q/p}$ и $-\sqrt{p/q}$ соответственно. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \dots, X_n$ с распределением F_* . Тогда

$$\mathbf{E} X_1 = 0, \quad \mathbf{E} X_1^2 = 1, \quad \alpha_3 = \mathbf{E} X_1^3 = \frac{q - p}{\sqrt{pq}}, \quad \beta_3 = \mathbf{E} |X_1|^3 = \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{pq}}.$$

Обозначим $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$, $F_n(x) = \mathbf{P}(S_n < x)$, $x \in \mathbf{R}$. Функция распределения F_n является решетчатой с шагом $h/\sqrt{n}$, где $h = 1/\sqrt{pq}$ —

максимальный шаг распределения F_* . Обозначим D_n решетку с шагом $h/\sqrt{n}$, на которой сосредоточено распределение F_n :

$$D_n = \left\{ -\sqrt{\frac{np}{q}} + k \frac{h}{\sqrt{n}}, k = 0, \pm 1, \dots \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{npq}}(k - np), k \in \mathbf{Z} \right\},$$

и $D_n + h/(2\sqrt{n})$ — сдвиг этой решетки на половину ее шага:

$$D_n + \frac{h}{2\sqrt{n}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{npq}} \left(k + \frac{1}{2} - np \right), k \in \mathbf{Z} \right\}. \quad (31)$$

Множество $D_n + h/(2\sqrt{n})$ включает центры всех интервалов постоянства решетчатой функции распределения $F_n(x)$, в которых $0 < F_n(x) < 1$.

В 1937 г. Дж. В. Успенский [61] (также см. [27, с. 95]) получил асимптотическое разложение для приращений рассматриваемой функции распределения F_n на интервалах, концы которых лежат в сдвинутой решетке $D_n + h/(2\sqrt{n})$: для любых $x, y \in D_n + h/(2\sqrt{n})$, $x < y$, при $n \geq 25/(pq)$ выполнено равенство

$$F_n(x) - F_n(y) = \Phi(x) - \Phi(y) - \frac{\alpha_3}{6}(\Phi'''(x) - \Phi'''(y)) + R_n,$$

где

$$R_n \leq \frac{0.13 + 0.18|p - q|}{npq} + \exp \left\{ -\frac{3}{2}\sqrt{npq} \right\} \leq \frac{0.31}{npq} + e^{-\sqrt{npq}}.$$

Поиск экстремума разности $F_n(x) - \Phi(x)$ естественно осуществлять на множестве точек разрыва функции распределения $F_n(x)$, имеющих вид $x - h/(2\sqrt{n})$, $x \in D_n + h/(2\sqrt{n})$. Для таких x имеем $F_n(x - h/(2\sqrt{n}) + 0) = F_n(x)$, и по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем

$$F_n\left(x - \frac{h}{2\sqrt{n}} + 0\right) - \Phi\left(x - \frac{h}{2\sqrt{n}}\right) = F_n(x) - \Phi(x) + \frac{h}{2\sqrt{n}} \Phi'(x) + \tilde{R}_n,$$

$$|\tilde{R}_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^2 \sup_x |\Phi''(x)| = \frac{h^2}{8n\sqrt{2\pi e}} < 0.04 \frac{h^2}{n}.$$

Таким образом, для всех $n \geq 25/(pq)$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta_n(F_*) &\geq \sup_{x \in D_n + h/(2\sqrt{n})} \left(F_n\left(x - \frac{h}{2\sqrt{n}} + 0\right) - \Phi\left(x - \frac{h}{2\sqrt{n}}\right) \right) \\ &= \sup_{x \in D_n + h/(2\sqrt{n})} \left(F_n(x) - \Phi(x) + \frac{h}{2\sqrt{n}} \varphi(x) + \tilde{R}_n \right) \\ &= \sup_{x, y \in D_n + h/(2\sqrt{n})} \left(F_n(y) - \Phi(y) + \frac{h}{2\sqrt{n}} \varphi(x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha_3}{6}(\varphi''(x) - \varphi''(y)) + R_n + \tilde{R}_n \Big) \\
\geq & \sup_{x, y \in D_n + h/(2\sqrt{n})} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \varphi(x) - \frac{\alpha_3}{6} \varphi''(x) - \Phi(y) \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_3}{6} \varphi''(y) - |R_n| - |\tilde{R}_n| \right).
\end{aligned}$$

Пусть $n > 100$ и γ — произвольное число из интервала $(100, n)$ такое, что $\gamma - 1/2 \in \mathbf{Z}$. Положим $p = \gamma/(n + \gamma)$, $q = n/(n + \gamma)$. Тогда условие $n \geq 25/(pq)$, эквивалентное неравенству $\gamma \geq 25(1 + \gamma/n)^2$, выполняется для всех рассматриваемых значений n и γ тривиальным образом, поскольку $25(1 + \gamma/n)^2 < 25 \cdot 2^2 = 100 < \gamma$. Точки $x, y \in D_n + h/(2\sqrt{n})$ выберем, положив в (31) соответственно $k = \gamma - 1/2$ и $k = 0$:

$$\begin{aligned}
x = x_n &= \frac{\gamma - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\gamma^{3/2}}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \\
y = y_n &= \frac{1/2 - np}{\sqrt{npq}} = -\sqrt{\gamma} + \frac{n + \gamma}{2n\sqrt{\gamma}} \rightarrow -\sqrt{\gamma} + \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} = \frac{1 - 2\gamma}{2\sqrt{\gamma}}, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Тогда с учетом асимптотических при $n \rightarrow \infty$ соотношений

$$\begin{aligned}
\frac{h}{\sqrt{n}} &= \frac{n + \gamma}{n\sqrt{\gamma}} \rightarrow \gamma^{-1/2}, \quad \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} = \frac{n - \gamma}{n\sqrt{\gamma}} \rightarrow \gamma^{-1/2}, \\
|R_n| &\leq \frac{0.31(n + \gamma)^2}{n^2\gamma} + \exp \left\{ -\frac{n\sqrt{\gamma}}{n + \gamma} \right\} \rightarrow \frac{0.31}{\gamma} + e^{-\sqrt{\gamma}}, \\
|\tilde{R}_n| &\leq \frac{0.04(n + \gamma)^2}{n^2\gamma} \rightarrow \frac{0.04}{\gamma}
\end{aligned}$$

и непрерывности функции $\Phi(x)$ и ее производных получаем

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n(F_*) &\geq \frac{\varphi(0)}{2\sqrt{\gamma}} - \frac{\varphi''(0)}{6\sqrt{\gamma}} - \Phi\left(\frac{1 - 2\gamma}{2\sqrt{\gamma}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{6\sqrt{\gamma}} \varphi''\left(\frac{1 - 2\gamma}{2\sqrt{\gamma}}\right) - \frac{0.35}{\gamma} - e^{-\sqrt{\gamma}}, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} L_n^3(F_*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_3(F_*)}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \gamma^2}{(n + \gamma)n\sqrt{\gamma}} = \gamma^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Для $n > 100$ обозначим $\Gamma_n = \{\gamma \in (100, n) : \gamma - 1/2 \in \mathbf{Z}\}$, $\Gamma = \{\gamma > 100 : \gamma - 1/2 \in \mathbf{Z}\}$. Тогда для всех $\ell > 0$, представимых в виде $\ell = (n^2 + \gamma^2)/((n + \gamma)n\sqrt{\gamma})$, где $\gamma \in \Gamma_n$, $n > 100$, имеем

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3 : L_n^3 = \ell} \frac{\Delta_n(F)}{\ell} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\gamma \in \Gamma_n : L_n^3(F_*) = \ell} \frac{\Delta_n(F_*)}{\ell} \\
&\geq \sup_{\gamma \in \Gamma : 1/\sqrt{\gamma} = \ell} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n(F_*)}{\ell},
\end{aligned}$$

откуда для нижней асимптотически правильной постоянной получаем

$$\begin{aligned} \underline{C}_{\text{ан}} &\geq \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{\gamma \in \Gamma: 1/\sqrt{\gamma} = \ell} \sqrt{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n(F_*) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\gamma \in \Gamma: 1/\sqrt{\gamma} < \varepsilon} \sqrt{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n(F_*) \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi(0)}{2} - \frac{\varphi''(0)}{6} - \sqrt{\gamma} \Phi\left(\frac{1-2\gamma}{2\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{1}{6} \varphi''\left(\frac{1-2\gamma}{2\sqrt{\gamma}}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{0.35}{\sqrt{\gamma}} - \sqrt{\gamma} e^{-\sqrt{\gamma}} \right) = \frac{\varphi(0)}{2} - \frac{\varphi''(0)}{6}, \end{aligned}$$

где предел при $\gamma \rightarrow \infty$ берется по $\gamma \in \Gamma$. Замечание о том, что

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi''(0) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. Для верхней асимптотически правильной постоянной $\overline{C}_{\text{ан}}$ справедливо соотношение

$$\overline{C}_{\text{ан}} \equiv \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_3} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^3} = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} = 0.4097 \dots$$

Доказательство. Для $n, \beta \geq 1$ обозначим

$$C(n, \beta) = \sup_{F \in \mathcal{F}_3: \beta_3 = \beta} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^3(F)}.$$

Тогда асимптотически правильную и верхнюю асимптотически правильную постоянные можно представить в виде

$$\begin{aligned} C_{\text{ан}} &\equiv \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n, \beta \geq 1: \beta = \ell\sqrt{n}} C(n, \beta) \equiv \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1/\ell^2} C(n, \ell\sqrt{n}), \\ \overline{C}_{\text{ан}} &\equiv \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\beta \geq 1} C(n, \beta). \end{aligned}$$

Из неравенства

$$\Delta_n(F) \leq 0.3041 \frac{\beta_3(F) + 1}{\sqrt{n}}, \quad F \in \mathcal{F}_3, \quad n \geq 1,$$

доказанного в [15], а также результата работы [30] вытекает, что

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\beta \geq 3} C(n, \beta) &\leq 0.3041 \sup_{\beta \geq 3} \frac{\beta + 1}{\beta} = 0.3041 \cdot \frac{4}{3} < 0.4055 \\ &< \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} = C_{\text{ан}}. \end{aligned}$$

Учитывая сказанное, получаем

$$\begin{aligned}
C_{\text{ап}} &\leq \overline{C}_{\text{ап}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\beta \geq 3} C(n, \beta) \vee \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq \beta < 3} C(n, \beta) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq \beta < 3} C(n, \beta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{n \geq 9/\varepsilon^2} \sup_{1 \leq \beta < 3} C(n, \beta) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{n, \beta: 1 \leq \beta < 3 \leq \varepsilon \sqrt{n}} C(n, \beta) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{n, \beta \geq 1: \beta < \varepsilon \sqrt{n}} C(n, \beta) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 < \ell < \varepsilon} \sup_{n, \beta \geq 1: \beta = \ell \sqrt{n}} C(n, \beta) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n, \beta \geq 1: \beta = \ell \sqrt{n}} C(n, \beta) \\
&= C_{\text{ап}},
\end{aligned}$$

что в совокупности с результатом работы [30] доказывает теорему.

Теорема 3. Для правильной $C_{\text{п}}(\delta)$ и верхней асимптотически правильной $\overline{C}_{\text{ап}}(\delta)$ постоянных при всех $0 \leq \delta < 1$ справедливы оценки

$$C_{\text{п}}(\delta) \geq \overline{C}_{\text{ап}}(\delta) \geq \sup_{\gamma > 0} \gamma^{\delta/2} e^{-\gamma} \frac{I_0(\gamma)}{2},$$

где $I_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, $\gamma^{\delta/2} \equiv 1$ при $\delta = 0$.

Значения миноранты $\overline{C}_{\text{ап}}(\delta)$, устанавливаемой теоремой 3, приведены в таблице 2 в третьем столбце. Во втором столбце указаны значения мажоранты для $C_{\text{п}}(\delta)$, полученной в работе [5]. Из этой таблицы видно, что найденные двусторонние оценки довольно близки друг к другу: их отношение колеблется в пределах 1.47–2.38 в зависимости от δ .

При $\delta = 0$ из теоремы 3 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Для верхней асимптотически правильной постоянной $\overline{C}_{\text{ап}}(0)$ справедлива оценка

$$\overline{C}_{\text{ап}}(0) \equiv \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_2} \Delta_n(F) \geq \frac{1}{2}.$$

Доказательство теоремы 3 и следствия 1. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots$ с симметричным распределением $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = p \in (0, 1/2]$, $\mathbf{P}(X_1 = 0) = 1 - 2p$. Имеем

$$\mathbf{E} X_1 = 0, \quad \mathbf{E} X_1^2 = \mathbf{E} |X_1|^{2+\delta} = 2p, \quad L_n^{2+\delta} = \frac{\mathbf{E} |X_1|^{2+\delta}}{(\mathbf{E} X_1^2)^{1+\delta/2} n^{\delta/2}} = (2np)^{-\delta/2}.$$

Обозначим $F_*(x) = \mathbf{P}(X_1 < x)$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. В силу симметрии $2\mathbf{P}(S_n < 0) + \mathbf{P}(S_n = 0) = 1$, значит, $\mathbf{P}(S_n < 0) = (1 - \mathbf{P}(S_n = 0))/2$, откуда для четных n получаем

$$\Delta_n(F_*) \geq \Phi(0) - \mathbf{P}(S_n < 0) = \frac{1}{2} \mathbf{P}(S_n = 0)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n/2} \frac{n!}{k! k! (n-2k)!} p^{2k} (1-2p)^{n-2k} \\
&\equiv \frac{1}{2} (1-2p)^n \sum_{k=0}^{n/2} u_{k,n}, \quad \text{где } u_{k,n} = \frac{n!}{(n-2k)! (k!)^2} \left(\frac{p}{1-2p} \right)^{2k}.
\end{aligned}$$

Выберем $p = \gamma/(2n)$, $0 < \gamma < n$. Тогда $L_n^{2+\delta}(F_*) = \gamma^{-\delta/2}$, и для любого фиксированного k

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-2k+1)}{(k!)^2} \left(\frac{\gamma/2}{n-\gamma} \right)^{2k} = \frac{(\gamma/2)^{2k}}{(k!)^2} \equiv u_k,$$

при этом модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка $I_0(\gamma)$ можно представить в виде

$$I_0(\gamma) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma/2)^{2k}}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

Для верхней асимптотически правильной константы справедлива оценка

$$\overline{C}_{\text{ап}}(\delta) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < \gamma < n} \frac{\Delta_n(F_*)}{L_n^{2+\delta}(F_*)} \geq \frac{1}{2} \sup_{\gamma > 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma^{\delta/2} \left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n/2} u_{k,n},$$

где верхний предел при $n \rightarrow \infty$ берется по четным n . Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех четных $n \geq N$ будет выполняться неравенство $\sum_{k=0}^{n/2} u_{k,n} \geq I_0(\gamma) - \varepsilon$.

Поскольку ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ сходится (к $I_0(\gamma)$), для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_1 = n_1(\varepsilon)$ такой, что $|\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{\infty} u_k| < \varepsilon/2$ для всех $n \geq n_1$, а следовательно, выполнено $\sum_{k=0}^{n_1} u_k > I_0(\gamma) - \varepsilon/2$. С другой стороны, поскольку $u_{k,n} \rightarrow u_k$ при $n \rightarrow \infty$, найдется номер $n_2 = n_2(\varepsilon, n_1)$ такой, что $|u_{k,n} - u_k| < \varepsilon/[2(n_1 + 1)]$ для всех $n \geq n_2$. Следовательно, для всех четных $n \geq N \equiv \max\{2n_1, n_2\}$ имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n/2} u_{k,n} &\geq \sum_{k=0}^{n_1} u_{k,n} \geq \sum_{k=0}^{n_1} u_k - \sum_{k=0}^{n_1} |u_{k,n} - u_k| \\
&> I_0(\gamma) - \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{k=0}^{n_1} \frac{\varepsilon}{2(n_1 + 1)} = I_0(\gamma) - \varepsilon
\end{aligned}$$

для любого $\varepsilon > 0$, откуда вытекает, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n/2} u_{k,n} \geq I_0(\gamma)$ и

$$\overline{C}_{\text{ап}}(\delta) \geq \frac{1}{2} \sup_{\gamma > 0} \gamma^{\delta/2} e^{-\gamma} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n/2} u_{k,n} \geq \frac{1}{2} \sup_{\gamma > 0} \gamma^{\delta/2} e^{-\gamma} I_0(\gamma).$$

При $\delta = 0$ по определению $L_n^{2+\delta} = \gamma^{-\delta/2} \equiv 1$, что приводит к оценке

$$\overline{C}_{\text{ап}}(0) \geq \frac{1}{2} \sup_{\gamma > 0} e^{-\gamma} I_0(\gamma) = \frac{1}{2} \lim_{\gamma \rightarrow 0} e^{-\gamma} I_0(\gamma) = \frac{1}{2}.$$

Теорема 4. Для нижней асимптотически правильной постоянной

$$\underline{C}_{\text{ап}}(\delta) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: L_n^{2+\delta} = \ell} \frac{\Delta_n(F)}{\ell}$$

и асимптотически правильной постоянной

$$C_{\text{ап}}(\delta) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1, F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: L_n^{2+\delta} = \ell} \frac{\Delta_n(F)}{\ell}$$

при всех $0 < \delta < 1$ справедливы двусторонние оценки

$$\begin{aligned} & \sup_{h \geq 0, s > 0, x \in \mathbf{R}} \left\{ \Phi\left(\frac{x+h}{\sqrt{1+s^2}}\right) + \Phi\left(\frac{x-h}{\sqrt{1+s^2}}\right) - 2\Phi(x) + (h^2 + s^2)x\varphi(x) \right\} \\ & \times \left\{ 2\kappa_{2+\delta} s^{2+\delta} e^{-h^2/(2s^2)} {}_1F_1\left(\frac{3+\delta}{2}, \frac{1}{2}, \frac{h^2}{2s^2}\right) \right\}^{-1} \\ & \leq \underline{C}_{\text{ап}}(\delta) \leq C_{\text{ап}}(\delta) \leq \frac{2^{\delta/2} \Gamma((2+\delta)/2)}{\pi} \\ & \times \sup_{b > 0} \sqrt{\left(\frac{\cos b - 1 + b^2/2}{b^{2+\delta}}\right)^2 + \left(\frac{\sin b - b}{b^{2+\delta}}\right)^2}, \end{aligned}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — эйлерова гамма-функция, ${}_1F_1$ — обобщенная гипергеометрическая функция (вырожденная функция Мейера):

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a, b, z) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} \frac{z^k}{k!}, \quad z > 0, \quad {}_1F_1(a, b, 0) = 1, \\ \kappa_{2+\delta} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+\delta} d\Phi(x) = (1+\delta)\Gamma\left(\frac{1+\delta}{2}\right) \frac{2^{\delta/2}}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Значения мажоранты $C_{\text{ап}}(\delta)$ и миноранты $\underline{C}_{\text{ап}}(\delta)$, устанавливаемых теоремой 4, приведены в таблице 2 соответственно в четвертом и пятом столбцах. Из этой таблицы видно, что полученные двусторонние оценки довольно близки друг к другу: их отношение колеблется в пределах 1.39–2.26 в зависимости от δ .

Можно убедиться, что мажоранта для $C_{\text{ап}}(\delta)$, устанавливаемая теоремой 4, строго меньше миноранты для $\bar{C}_{\text{ап}}(\delta)$ из теоремы 3, поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. Асимптотически правильная $C_{\text{ап}}(\delta)$ и верхняя асимптотически правильная $\bar{C}_{\text{ап}}(\delta)$ постоянные для всех $0 < \delta < 1$ связаны строгим неравенством

$$C_{\text{ап}}(\delta) < \bar{C}_{\text{ап}}(\delta).$$

З а м е ч а н и е 1. В отличие от случая $0 < \delta < 1$ при $\delta = 1$ имеет место знак равенства: $C_{\text{ап}}(1) = \bar{C}_{\text{ап}}(1) = (\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2}\pi) = 0.4097 \dots$

Верхняя оценка для асимптотически правильной постоянной $\bar{C}_{\text{ап}}(\delta)$ была получена в работе [4]. Основные идеи нашего доказательства нижней оценки для $\underline{C}_{\text{ап}}(\delta)$ восходят к методу Прохорова–Мацкявичюса, изложенного в работе [16].

Рассмотрим класс симметричных сдвиг-масштабных смесей нормальных законов вида

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\Phi\left(\frac{x - a_k}{\sigma_k}\right) + \Phi\left(\frac{x + a_k}{\sigma_k}\right) \right), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k &= 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (\sigma_k^2 + a_k^2) = 1, \\ a_k &\geq 0, \quad \gamma_k \geq 0, \quad \sigma_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (33)$$

Условия (33) обеспечивают принадлежность $F \in \mathcal{F}_2$, а для того, чтобы выполнялось включение $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$ с некоторым $0 < \delta \leq 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (\sigma_k^{2+\delta} + a_k^{2+\delta}) < \infty.$$

Расстояние между n -кратной сверткой распределений вида (32) и нормальным законом вычисляется в явном виде.

Лемма 1. Для распределений вида (32) при всех четных n справедливо неравенство

$$F_n(x) - \Phi(x) \geq \frac{n}{2} \left[\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{\infty} \gamma_i \gamma_j \sum_{k,m=0}^1 \Phi\left(\frac{x + ((-1)^k a_i + (-1)^m a_j)/\sqrt{n}}{\sqrt{1 + (\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2)/n}}\right) - \Phi(x) \right].$$

Доказательство. Характеристическая функция распределения (32) имеет вид

$$f(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(a_k t) e^{-\sigma_k^2 t^2 / 2}.$$

Плотность распределения $F_n(x) = F^{*n}(x\sqrt{n})$ обозначим $p_n(x)$, а характеристическую функцию обозначим $f_n(t)$:

$$f_n(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x) = \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^n.$$

Поскольку $f_n(t)$ абсолютно интегрируема и четна, по формуле обращения для плотностей получаем

$$\begin{aligned} R_n(x) &\equiv p_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(t) - e^{-t^2/2}) e^{-itx} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f_n(t) - e^{-t^2/2}) \cos(tx) dt. \end{aligned}$$

Для оценки подынтегральной функции при четных $n = 2m$ воспользуемся неравенством

$$a^m - b^m = \sum_{j=0}^{m-1} a^j b^{m-j-1} \geq m(a-b)b^{m-1} = m(ab^{m-1} - b^m),$$

справедливым для любых неотрицательных a и b , с $a = f^2(t/\sqrt{n})$, $b = e^{-t^2/n}$:

$$\begin{aligned} f_n(t) - e^{-t^2/2} &= \left(f^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^{n/2} - (e^{-t^2/n})^{n/2} \\ &\geq \frac{n}{2} \left(f^2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{-(1-2/n)t^2/2} - e^{-t^2/2} \right). \end{aligned}$$

Используя формулу $\cos x \cos y = (\cos(x+y) + \cos(x-y))/2$, получим

$$\begin{aligned} f^2(t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \gamma_i \gamma_j \cos(a_i t) \cos(a_j t) e^{-(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)t^2/2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \gamma_i \gamma_j \left(\cos((a_i + a_j)t) + \cos((a_i - a_j)t) \right) e^{-(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)t^2/2}, \\ R_n(x) &\geq \frac{n}{2\pi} \left(\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{\infty} \gamma_i \gamma_j \sum_{\pm} \int_0^{\infty} \cos\left(\left(\frac{a_i \pm a_j}{\sqrt{n}} \pm x\right)t\right) e^{-(1+(\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2)/n)t^2/2} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} \cos(tx) e^{-t^2/2} dt \right). \end{aligned}$$

Интегрируя полученную оценку и учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos(ty) e^{-b^2 t^2/2} dt &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{b} e^{-y^2/(2b^2)} = \frac{\pi}{b} \varphi\left(\frac{y}{b}\right), \quad y \in \mathbf{R}, \quad b > 0, \\ \int_{-\infty}^x dy \int_0^{\infty} \cos(ty) e^{-b^2 t^2/2} dt &= \pi \Phi\left(\frac{x}{b}\right), \quad x \in \mathbf{R}, \\ F_n(x) - \Phi(x) &= \int_{-\infty}^x R_n(y) dy, \end{aligned}$$

приходим к утверждению леммы.

Доказательство теоремы 4. Для двухкомпонентных ($\gamma_3 = \gamma_4 = \dots = 0$) смесей с $a_2 = 0$ при четных n по лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} F_n(x) - \Phi(x) &\geq \frac{n}{2} \left\{ \frac{\gamma_1^2}{4} \left[\sum_{k=1}^2 \Phi\left(\frac{x + (-1)^k \cdot 2a_1/\sqrt{n}}{\sqrt{1 + 2(\sigma_1^2 - 1)/n}}\right) + 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1 + 2(\sigma_1^2 - 1)/n}}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2^2 \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1 + 2(\sigma_2^2 - 1)/n}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_1 \gamma_2 \sum_{k=1}^2 \Phi\left(\frac{x + (-1)^k a_1/\sqrt{n}}{\sqrt{1 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2)/n}}\right) - \Phi(x) \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Положим $a_1 = h\sqrt{n}$, $\sigma_1 = s\sqrt{n}$, $\gamma_1 = \omega/n$, $n = 2, 4, 6, \dots$, где $h \geq 0$, $s > 0$ не зависят от n , $0 < \omega < (s^2 + h^2)^{-1}$. Тогда при достаточно больших $n > (s^2 + h^2)^{-1}$ из условий (33) найдем

$$\gamma_2 = 1 - \frac{\omega}{n}, \quad \sigma_2^2 = \frac{1 - \omega(s^2 + h^2)}{1 - \omega/n} = 1 - \omega(s^2 + h^2) + O(n^{-1}), \quad (35)$$

что ограничено при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ для любого фиксированного x

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + 2(\sigma_2^2 - 1)/n}} &= 1 - \frac{\sigma_2^2 - 1}{n} + O(n^{-2}) = 1 + \frac{\omega(s^2 + h^2)}{n} + O(n^{-2}), \\ \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1 + 2(\sigma_2^2 - 1)/n}}\right) &= \Phi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \Phi^{(k)}(x)}{k!} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2(\sigma_2^2 - 1)/n}} - 1\right)^k \\ &= \Phi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \Phi^{(k)}(x)}{k!} \left(\frac{\omega(s^2 + h^2)}{n} + O(n^{-2})\right)^k \\ &= \Phi(x) + x\varphi(x) \frac{\omega(s^2 + h^2)}{n} + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

откуда в правой части (34) для слагаемого с коэффициентом γ_2^2 получаем

$$\begin{aligned} \gamma_2^2 \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1 + 2(\sigma_2^2 - 1)/n}}\right) &= \left(1 - \frac{2\omega}{n} + \frac{\omega^2}{n^2}\right) \left(\Phi(x) + x\varphi(x) \frac{1 - \sigma_2^2}{n} + O(n^{-2})\right) \\ &= \Phi(x) + x\varphi(x) \frac{\omega(s^2 + h^2)}{n} - \frac{2\omega\Phi(x)}{n} + O(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для слагаемого с коэффициентом $\gamma_1\gamma_2$, рассуждая аналогичным образом, получаем

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{x \pm a_1/\sqrt{n}}{\sqrt{1 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2)/n}}\right) &= \Phi\left(\frac{x \pm h}{\sqrt{1 + s^2 + (\sigma_2^2 - 2)/n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x \pm h}{\sqrt{1 + s^2}} + O(n^{-1})\right) = \Phi\left(\frac{x \pm h}{\sqrt{1 + s^2}}\right) + O(n^{-1}), \\ \gamma_1\gamma_2 \sum_{k=1}^2 \Phi\left(\frac{x + (-1)^k a_1/\sqrt{n}}{\sqrt{1 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2)/n}}\right) &= \frac{\omega}{n} \left(1 - \frac{\omega}{n}\right)^2 \left(\Phi\left(\frac{x + h}{\sqrt{1 + s^2}}\right) + \Phi\left(\frac{x - h}{\sqrt{1 + s^2}}\right) + O(n^{-1})\right) \\ &= \frac{\omega}{n} \left(\Phi\left(\frac{x + h}{\sqrt{1 + s^2}}\right) + \Phi\left(\frac{x - h}{\sqrt{1 + s^2}}\right)\right) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Для слагаемого с $\gamma_1^2 = (\omega/n)^2$, очевидно, имеем

$$\frac{\gamma_1^2}{4} \left[\sum_{k=1}^2 \Phi\left(\frac{x + (-1)^k 2a_1/\sqrt{n}}{\sqrt{1 + 2(\sigma_1^2 - 1)/n}}\right) + 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1 + 2(\sigma_1^2 - 1)/n}}\right) \right] = O(n^{-2})$$

при $n \rightarrow \infty$. Суммируя найденные асимптотические соотношения, для разности $F_n(x) - \Phi(x)$ получаем оценку

$$\begin{aligned} F_n(x) - \Phi(x) &\geq \frac{n}{2} \left[\Phi(x) + x\varphi(x) \frac{\omega(s^2 + h^2)}{n} - \frac{2\omega\Phi(x)}{n} + O(n^{-2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{n} \left(\Phi\left(\frac{x+h}{\sqrt{1+s^2}}\right) + \Phi\left(\frac{x-h}{\sqrt{1+s^2}}\right) \right) - \Phi(x) \right] \\ &= \frac{\omega}{2} \left[\Phi\left(\frac{x+h}{\sqrt{1+s^2}}\right) + \Phi\left(\frac{x-h}{\sqrt{1+s^2}}\right) - 2\Phi(x) \right. \\ &\quad \left. + (s^2 + h^2)x\varphi(x) \right] + O(n^{-1}) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ для любых фиксированных $s > 0$, $h \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$ (не зависящих от n) и $0 < \omega < (s^2 + h^2)^{-1}$.

Вычислим теперь $\beta_{2+\delta}$. Используя свойства вырожденной функции Мейера ${}_1F_1$ (см., например, [23]), можно убедиться, что

$$\begin{aligned} \beta_{2+\delta} &= \gamma_2 \sigma_2^{2+\delta} \varkappa_{2+\delta} + \frac{\gamma_1 \sigma_1^{2+\delta}}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x + a_1|^{2+\delta} d\Phi(x) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} |x - a_1|^{2+\delta} d\Phi(x) \right) \\ &= \varkappa_{2+\delta} \left(\gamma_2 \sigma_2^{2+\delta} + \gamma_1 \sigma_1^{2+\delta} e^{-a_1^2/(2\sigma_1^2)} {}_1F_1\left(\frac{3+\delta}{2}, \frac{1}{2}, \frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\right) \right), \end{aligned}$$

где $\varkappa_{2+\delta}$ — абсолютный момент порядка $2+\delta$ стандартного нормального распределения. Учитывая асимптотику (35), получаем

$$\begin{aligned} \gamma_2 \sigma_2^{2+\delta} &= \left(1 - \frac{\omega}{n}\right) \left(1 - \omega(s^2 + h^2) + O(n^{-1})\right)^{1+\delta/2} \\ &= (1 - \omega(s^2 + h^2))^{1+\delta/2} + O(n^{-1}), \\ \beta_{2+\delta} &= \beta_{2+\delta}(\omega, n) = \varkappa_{2+\delta} \left(\omega n^{\delta/2} s^{2+\delta} e^{-h^2/(2s^2)} {}_1F_1\left(\frac{3+\delta}{2}, \frac{1}{2}, \frac{h^2}{2s^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \omega(s^2 + h^2))^{1+\delta/2} + O(n^{-1}) \right). \end{aligned}$$

Заметим, что для каждого $0 < \omega < (s^2 + h^2)^{-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n^{2+\delta}(\omega, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_{2+\delta}(\omega, n)}{n^{\delta/2}} = \omega \varkappa_{2+\delta} s^{2+\delta} e^{-h^2/(2s^2)} {}_1F_1\left(\frac{3+\delta}{2}, \frac{1}{2}, \frac{h^2}{2s^2}\right),$$

и уравнение $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n^{2+\delta}(\omega, n) = \ell$ имеет единственный корень $\omega = \omega(\ell)$, принадлежащий интервалу $(0, (s^2 + h^2)^{-1})$, для всех достаточно малых $\ell > 0$, причем $\omega(\ell) \rightarrow 0$ при $\ell \rightarrow 0$. Имеем

$$\limsup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega} \left\{ \frac{|F_n(x) - \Phi(x)|}{\ell} : 0 < \omega < (s^2 + h^2)^{-1}, L_n^{2+\delta}(\omega, n) = \ell \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \limsup_{\ell \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n, \omega} \left\{ \frac{|F_n(x) - \Phi(x)|}{\ell} : n \geq m, 0 < \omega < (s^2 + h^2)^{-1}, \right. \\
&\quad \left. L_n^{2+\delta}(\omega, n) = \ell \right\} \\
&\geq \limsup_{\ell \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\omega} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F_n(x) - \Phi(x)|}{\ell} : \omega = \omega(\ell) \right\} \\
&= \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F_n(x) - \Phi(x)|}{L_n^{2+\delta}(\omega, n)} \\
&= \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\omega}{2} \left[\Phi\left(\frac{x+h}{\sqrt{1+s^2}}\right) + \Phi\left(\frac{x-h}{\sqrt{1+s^2}}\right) - 2\Phi(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (s^2 + h^2)x\varphi(x) \right] + O(n^{-1}) \right\} \\
&\quad \times \left\{ \omega \varkappa_{2+\delta} s^{2+\delta} e^{-h^2/(2s^2)} {}_1F_1\left(\frac{3+\delta}{2}, \frac{1}{2}, \frac{h^2}{2s^2}\right) \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \Phi\left(\frac{x+h}{\sqrt{1+s^2}}\right) + \Phi\left(\frac{x-h}{\sqrt{1+s^2}}\right) - 2\Phi(x) + (s^2 + h^2)x\varphi(x) \right\} \\
&\quad \times \left\{ 2\varkappa_{2+\delta} s^{2+\delta} e^{-h^2/(2s^2)} {}_1F_1\left(\frac{3+\delta}{2}, \frac{1}{2}, \frac{h^2}{2s^2}\right) \right\}^{-1},
\end{aligned}$$

где предел при $n \rightarrow \infty$ берется по четным n . Замечание о произвольности $x \in \mathbf{R}$, $s > 0$ и $h \geq 0$ завершает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е 2. Можно убедиться, что добавление компонент в смесь не улучшает итоговую оценку (экстремальные значения весовых параметров γ_k оказываются равными нулю при $k \geq 3$).

З а м е ч а н и е 3. Как видно из доказательств теорем 3 и 4, экстремальные распределения, на которых были получены нижние оценки, обладают свойством симметричности. А это означает, что найденные миноранты останутся справедливыми и в случае симметричных распределений. Однако верхнюю оценку для асимптотически правильной постоянной

$$C_{\text{ап}}^{(s)}(\delta) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}^s} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^{2+\delta}},$$

где $\mathcal{F}_{2+\delta}^s$ — класс симметричных распределений из $\mathcal{F}_{2+\delta}$, можно уточнить. А именно, с помощью несложной модификации метода, использованного в работе [4], можно убедиться, что

$$C_{\text{ап}}^{(s)}(\delta) \leq \frac{2^{\delta/2} \Gamma((2+\delta)/2)}{\pi} \sup_{x>0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^{2+\delta}}.$$

Автор выражает искреннюю признательность Ю.В. Прохорову за поддержку, В.Ю. Королеву за постоянное внимание к работе и полезные советы, В.В. Сенатову и Г.П. Чистякову за плодотворные дискуссии, способствовавшие улучшению данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бикялис А. Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме. — Литов. матем. сб., 1966, т. 6, № 3, с. 323–346.
2. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением. М.: Наука, 1982, 286 с.
3. Гапонова М. О., Корчагин А. Ю., Шевцова И. Г. Об абсолютных константах в равномерной оценке точности нормальной аппроксимации для распределений, не имеющих третьего момента. — Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. Вып. 6. М.: Макс Пресс, 2009, с. 81–89.
4. Гапонова М. О., Шевцова И. Г. Асимптотические оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для распределений, не имеющих третьего момента. — Информатика и ее применения, 2009, т. 3, № 4, с. 41–56.
5. Григорьева М. Е., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Каца–Берри–Эссеена. — Информатика и ее применения, 2010, т. 4, № 2 (в печати).
6. Золотарев В. М. Абсолютная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 1, с. 108–119.
7. Золотарев В. М. Некоторые неравенства теории вероятностей и их применение к уточнению теоремы А. М. Ляпунова. — Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 3, с. 501–504.
8. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.
9. Ибрагимов И. А. О точности аппроксимации функций распределения сумм независимых величин нормальным распределением. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 4, с. 632–655.
10. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
11. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. — Вестник Моск. ун-та, сер. физ.-матем. и естеств. наук, 1953, в. 7, № 10, с. 29–38.
12. Кондрик А. С., Михайлов К. В., Чеботарев В. И. О равномерной оценке разности функций распределения. — Тез. докл. XXXI Дальневосточной школы-семинара им. акад. Е. В. Золотова, Владивосток, 2006, с. 16–17.
13. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. О верхней оценке абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 4, с. 671–695.
14. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена. — Докл. РАН, 2010, т. 430, № 6, с. 738–742.
15. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам. — Обзорные прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 1, с. 25–56.
16. Мацкявичюс В. К. О нижней оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 3, с. 565–569.
17. Нагаев С. В., Чеботарев В. И. Новый подход к оценке абсолютной константы в неравенстве Берри–Эссеена. — Тез. докл. XXXI Дальневосточной школы-семинара им. акад. Е. В. Золотова, Владивосток, 2006, с. 19.
18. Осипов Л. В. О точности приближения распределения суммы независимых случайных величин к нормальному распределению. — Докл. АН СССР, 1968, т. 178, № 5, с. 1013–1016.
19. Осипов Л. В., Петров В. В. Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, в. 2, с. 322–329.
20. Петров В. В. Одна оценка отклонения распределения суммы независимых случайных величин от нормального закона. — Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 5, с. 1013–1015.
21. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
22. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.

23. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981, 798 с.
24. Rogozin B. A. Одно замечание к работе Эссеена «Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме». — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 1, с. 125–128.
25. Розовский Л. В. Об оценке снизу остаточного члена в центральной предельной теореме. — Матем. заметки, 1978, т. 24, № 3, с. 403–410.
26. Розовский Л. В. О точности оценки остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, в. 4, с. 744–761.
27. Сенатов В. В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: УРСС, Книжный дом «Либроком», 2009, 352 с.
28. Тюрин И. С. Уточнение верхних оценок констант в теореме Ляпунова. — Успехи матем. наук, 2010, т. 65, № 3, с. 201–202.
29. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
30. Чистяков Г. П. Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I, II, III. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 326–344; в. 3, с. 573–579; 2002, т. 47, в. 3, с. 475–497.
31. Шевцова И. Г. Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 3, с. 622–626.
32. Шевцова И. Г. Уточнение абсолютной константы в классическом неравенстве Берри–Эссеена. — Статистические методы оценивания и проверки гипотез (Пермь, Изд-во Пермского гос. ун-та), 2008, в. 21, с. 159–168.
33. Шевцова И. Г. Нижняя асимптотически правильная постоянная в центральной предельной теореме. — Докл. РАН, 2010, т. 430, № 4, с. 466–469.
34. Шуганов И. С. Об уточнении верхней константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. — Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.
35. van Beek P. An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry–Esseen inequality. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1972, v. 23, p. 187–196.
36. Bentkus V. On the asymptotical behaviour of the constant in the Berry–Esseen inequality. Preprint 91-078. Bielefeld: Universität Bielefeld, 1991.
37. Bentkus V. On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality. — J. Theoret. Probab., 1994, v. 7, № 2, p. 211–224.
38. Bergström H. On the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1944, v. 27, p. 139–153.
39. Bergström H. On the central limit theorem in the case of not equally distributed random variables. — Skand. Aktuarietidskr., 1949, v. 32, p. 37–62.
40. Berry A. C. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, p. 122–136.
41. Dunnage J. E. A. Review of: Prawitz H. On the remainder in the central limit theorem. MR0397839 (53#1695), Mathematical Reviews on the Web, Amer. Math. Soc., 1977.
42. Esseen C.-G. On the Liapounoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. A28, № 9, p. 1–19.
43. Esseen C.-G. A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.
44. de Haan L., Peng L. Slow convergence to normality: an Edgeworth expansion without third moment. — Probab. Math. Statist., 1997, v. 17, № 2, p. 395–406.
45. Hall P. On the rate of convergence in the central limit theorem for distributions with regularly varying tails. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, v. 49, № 1, p. 1–11.
46. Hall P. Characterizing the rate of convergence in the central limit theorem. — Ann. Probab., 1980, v. 8, № 6, p. 1037–1048.
47. Hall P. Rates of Convergence in the Central Limit Theorem. Boston–London–Melbourne: Pitman, 1982, 251 p. (Res. Notes Math., v. 62.)

48. *Hall P., Barbour A. D.* Reversing the Berry–Esseen inequality. — Proc. Amer. Math. Soc., 1984, v. 90, № 1, p. 107–110.
49. *Heyde C. C.* On the influence of moments on the rate of convergence to the normal distribution. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1967, v. 8, № 1, p. 12–18.
50. *Heyde C. C.* A nonuniform bound on convergence to normality. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 5, p. 903–907.
51. *Hoeffding W.* The extrema of the expected value of a function of independent random variables. — Ann. Math. Statist., 1955, v. 26, № 2, p. 268–275.
52. *Hsu P. L.* The approximate distributions of the mean and variance of a sample of independent variables. — Ann. Math. Statist., 1945, v. 16, № 1, p. 1–29.
53. *Ikeda S.* A note on the normal approximation to the sum of independent random variables. — Ann. Inst. Statist. Math., 1959, v. 11, p. 121–130.
54. *Katz M. L.* Note on the Berry–Esseen theorem. — Ann. Math. Statist., 1963, v. 34, p. 1107–1108.
55. *Korolev V., Shevtsova I.* An improvement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums. — Scand. Actuar. J., 2010 (to appear).
56. *Paditz L.* Über eine Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. — Wiss. Z. Hochschule für Verkehrswesen «Friedrich List», Dresden, 1986, v. 33, № 2, p. 399–404.
57. *Prawitz H.* On the remainder in the central limit theorem. I: One-dimensional independent variables with finite absolute moments of third order. — Scand. Actuar. J., 1975, № 3, p. 145–156.
58. *Takano K. A.* Remark to a result of A. C. Berry. — Res. Mem. Inst. Math., 1951, v. 9, № 6, p. 4.08–4.15.
59. *Tysiak W.* Gleichmäßige und nicht-gleichmäßige Berry–Esseen–Abschätzungen. Dissertation. Wuppertal: Gesamthochschule Wuppertal, 1983.
60. *Tyurin I.* New estimates of the convergence rate in the Lyapunov theorem. arXiv: 0912.0726v1, 2009.
61. *Uspensky J. V.* Introduction to Mathematical Probability. New York: McGraw-Hill, 1937, 411 p.
62. *Wallace D. L.* Asymptotic approximations to distributions. — Ann. Math. Statist., 1958, v. 29, p. 635–654.
63. *Wallace D. L.* A corrected computation of Berry’s bound for the central limit theorem error. Chicago: Statist. Res. Center, University of Chicago, 1959.
64. *Zahl S.* Bounds for the central limit theorem error. — SIAM J. Appl. Math., 1966, v. 14, № 6, p. 1225–1245.
65. *Zolotarev V. M.* A sharpening of the inequality of Berry–Esseen. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1967, v. 8, p. 332–342.

Поступила в редакцию
15.IV.2010