Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Вахтель, В. В. Шнеер, Общий подход к анализу максимума случайного блуждания в условиях тяжелой нагрузки, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 2, 335–344

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:41:22

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2010 г.

ВАХТЕЛЬ В. И.^{*}, ШНЕЕР В. В.^{**}

ОБЩИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ТЯЖЕЛОЙ НАГРУЗКИ

Для семейства случайных блужданий $\{S_k^{(a)}\}$ со сносом $\mathbf{E} S_k^{(a)} = -ka < 0$ рассматривается глобальный максимум $M^{(a)} = \sup_{k \geq 0} S_k^{(a)}$. Изучается асимптотическое поведение максимума $M^{(a)}$ в условиях тяжелой нагрузки, т.е. при $a \rightarrow 0$, при условии, что приращения случайных блужданий принадлежат области притяжения устойчивого закона. Эта задача была впервые рассмотрена в 60-х годах в контексте одноканальной системы массового обслуживания. Дж. Кингман и Ю. В. Прохоров предложили два разных подхода к решению этой задачи в случае, когда дисперсия приращений конечна. Впоследствии оба подхода были использованы многими авторами в других частных случаях. В данной работе предлагается обобщение обоих методов на случай притяжения к произвольному устойчивому закону. Оказывается, что основные технические трудности, возникающие при использовании этих подходов, имеют похожую природу и могут быть преодолены с помощью обобщения классического неравенства Колмогорова. Такое обобщение также получено в работе.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, глобальный максимум, устойчивый закон, обобщение неравенства Колмогорова.

Пусть $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним, т.е. $\mathbf{E} X_1 = 0$. Определим случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^k X_i \quad \text{при } k \geq 1.$$

С помощью случайного блуждания $\{S_k\}$ при любом $a > 0$ определим новое случайное блуждание $\{S_k^{(a)}\}$:

$$S_k^{(a)} = S_k - ka.$$

Рассмотрим

$$M^{(a)} = \sup_{k \geq 0} S_k^{(a)}.$$

^{*} Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstr., 39, Berlin; Technische Universität München, Boltzmann str., 3, München, Germany; e-mail: wachtel@ma.tum.de; vakhtel@wais-berlin.de

^{**} Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр-т Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: sevasneer@ngs.ru

Поскольку случайное блуждание $S_k^{(a)}$ имеет отрицательный снос, максимум $M^{(a)}$ является собственной случайной величиной при любом $a > 0$. Однако $M^{(a)} \rightarrow +\infty$ по вероятности при $a \rightarrow 0$. Это наблюдение приводит к естественному вопросу о том, с какой скоростью растет $M^{(a)}$.

Хорошо известно, что стационарное распределение времени ожидания в одноканальной системе обслуживания совпадает с распределением максимума соответствующего случайного блуждания. Условие $a \rightarrow 0$ означает, что нагрузка системы стремится к 1. Таким образом, рассматриваемая задача эквивалентна задаче о поведении стационарного распределения времени ожидания в условиях большой нагрузки. Вопрос о поведении этого распределения был впервые рассмотрен Дж. Кингманом [7], [8] (см. также развернутое обсуждение этой задачи в [9]). Он рассмотрел случай, когда $|X_1|$ имеет экспоненциальный момент, и доказал, что

$$\mathbf{P}(aM^{(a)} \leq x) \rightarrow 1 - e^{-2x/\sigma^2}$$

для всех $x \geq 0$ при $a \rightarrow 0$, где $\sigma^2 = \mathbf{D}X_1$. В своем доказательстве Кингман использовал аналитический подход, основанный на представлении для преобразования Лапласа величины $M^{(a)}$, следующего из факторизации Винера–Хопфа.

Ю. В. Прохоров [10] обобщил последний результат на случай, когда $\mathbf{D}X_1 \in (0, \infty)$. Его подход основан на использовании функциональной центральной предельной теоремы.

Эти подходы были позднее использованы многими авторами при доказательстве различных результатов о поведении максимума в условиях тяжелой нагрузки. Аналитический подход был использован в [3] (см. также [4]) при изучении асимптотического поведения $M^{(a)}$ в случае бесконечной дисперсии. В этих работах доказано, что если $\mathbf{P}(X_1 > x)$ является правильно меняющейся функцией с показателем $1 < \alpha < 2$, то (при некоторых дополнительных предположениях) существует функция $\Delta(a)$ такая, что $\Delta(a)M^{(a)}$ сходится по распределению к некоторой собственной случайной величине. В работах [5] и [12] доказаны аналогичные результаты в предположении, что случайное блуждание $\{S_n\}$ принадлежит области притяжения спектрально положительного устойчивого распределения. Доказательства работ [5] и [12] использовали функциональные предельные теоремы. Стоит отметить также, что получено явное выражение для предельного распределения. В статье [2] установлена сходимость $\Delta(a)M^{(a)}$ для произвольного случайного блуждания из области притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha \in (1, 2)$. Доказательство в этой работе также основано на функциональных предельных теоремах.

Основной целью настоящей заметки является получение метода изучения асимптотического поведения $M^{(a)}$, который работает для случайного блуждания из области притяжения произвольного устойчивого закона.

Прежде чем формулировать основной результат данной работы, мы введем необходимые обозначения и определения. Будем говорить, что случайное блуждание $\{S_n\}$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha \in (0, 2]$, если найдутся последовательности $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ такие, что

$$\frac{S_n - b_n}{c_n} \rightarrow \xi \quad \text{по распределению,}$$

где ξ имеет соответствующее устойчивое распределение.

Известно, что случайное блуждание $\{S_n\}$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha \in (0, 2]$ тогда и только тогда, когда функция

$$V(x) := \mathbf{E}(X_1^2; |X_1| \leq x), \quad x > 0,$$

правильно меняется с показателем $2 - \alpha$. Отсюда следует, что последовательность

$\{c_n\}$ можно выбрать следующим образом:

$$c_n := \inf \left\{ u > 0: \frac{V(u)}{u^2} \leq \frac{1}{n} \right\}, \quad n \geq 1.$$

В этом случае $\{c_n\}$ правильно меняется с показателем $1/\alpha$ и, кроме того,

$$\frac{V(c_n)}{c_n^2} \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

В настоящей заметке мы рассматриваем случай, когда $\mathbf{E} X_1 = 0$ и случайное блуждание $\{S_n\}$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha \in (1, 2]$. Известно, что при этих предположениях можно взять $b_n \equiv 0$. Таким образом,

$$\frac{S_n}{c_n} \rightarrow \xi \quad \text{по распределению.}$$

Пусть $\{\xi_t, t \geq 0\}$ обозначает устойчивый процесс Леви, где ξ_1 совпадает по распределению с ξ . Определим также супремум процесса $\{\xi_t - t\}_{t \geq 0}$:

$$M^* = \sup_{t \geq 0} \{\xi_t - t\},$$

который является собственной случайной величиной, поскольку $\xi_t - t$ уходит на $-\infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Для каждого $\alpha \in (1, 2]$ можно подобрать положительную целозначную функцию $n(a)$ так, что

$$an(a) \sim c_{n(a)} \quad \text{при } a \rightarrow 0. \quad (2)$$

Из правильного изменения $\{c_n\}$ вытекает, что $n(a)$ правильно меняется в нуле с показателем $-\alpha/(\alpha - 1)$. Это, в свою очередь, влечет правильное изменение $c_{n(a)}$ с показателем $-1/(\alpha - 1)$.

Теорема. *Предположим, что $\{S_n\}$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha \in (1, 2]$. Тогда при $a \rightarrow 0$*

$$\frac{M^{(a)}}{c_{n(a)}} \rightarrow M^* \quad \text{по распределению.} \quad (3)$$

Утверждение теоремы означает, что $M^{(a)}$ растет как функция, правильно меняющаяся в нуле с показателем $-1/(\alpha - 1)$. Явная форма предельного распределения известна только в двух частных случаях. Во-первых, если процесс $\{\xi_t\}$ не имеет положительных скачков, то предельное распределение является экспоненциальным. Во-вторых, если нет отрицательных скачков, то предельное распределение совпадает с распределением Миттага-Леффлера (см., например, [5]). Во всех остальных случаях явный вид остается неизвестным. Однако, нетрудно получить асимптотику его хвоста: $\mathbf{P}(M^* > x) \sim Cx^{1-\alpha}$ при $x \rightarrow \infty$.

Утверждение теоремы является новым только в случае, когда $\alpha = 2$ и $\mathbf{E} X_1^2 = \infty$. Все остальные случаи были рассмотрены авторами указанных выше работ. Как уже было отмечено, основной мотивацией авторов служило получение единого доказательства для всех асимптотически устойчивых случайных блужданий. Мы приведем два таких доказательства, которые обобщают классические методы Кингмана и Прохорова.

Начнем с того, что опишем эти методы более детально и сравним их между собой.

Первый, аналитический, метод основывается на изучении преобразования Лапласа нормированного максимума случайного блуждания. Основная идея заключается в использовании факторизации Винера-Хопфа:

$$\mathbf{E} e^{-\mu M^{(a)}/c_{n(a)}} = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{E} (1 - e^{-\mu S_k^{(a)}/c_{n(a)}}; S_k^{(a)} > 0) \right\}, \quad \mu \geq 0.$$

В [9] приводятся эвристические рассуждения, показывающие, что основной вклад в бесконечную сумму в показателе экспоненты дают значения k порядка $n(a)$. Однако точное доказательство не приводится. Вместо этого автор использует представление экспоненты в виде комплексного интеграла и приводит доказательство утверждения с помощью решения граничной задачи Винера–Хопфа (этот же метод был использован в [3] в случае бесконечной дисперсии).

Мы приведем доказательство, которое обосновывает справедливость эвристических рассуждений Кингмана. При этом основная трудность заключается в том, чтобы показать, что вклад слагаемых с $k \gg n(a)$ пренебрежимо мал. Мы покажем, что это следует из соотношения

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k \geq Tn(a)} \frac{1}{k} \mathbf{P}(S_k^{(a)} > 0) = 0 \quad \text{равномерно по } a > 0. \quad (4)$$

Таким образом, вывод (4) является ключевым моментом нашего доказательства.

Рассмотрим теперь метод, который использует функциональные предельные теоремы. Рассмотрим максимум блуждания $\{S_n^{(a)}\}$ на конечном временном интервале:

$$M_T^{(a)} = \sup_{k \leq Tn(a)} S_k^{(a)}.$$

Из функциональных предельных теорем для асимптотически устойчивых случайных блужданий легко следует, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathbf{P}\left(\frac{M_T^{(a)}}{c_{n(a)}} \geq x\right) = \mathbf{P}(M_T^* \geq x)$$

для всех $x \geq 0$, где $M_T^* = \sup_{t \leq T} \{\xi_t - t\}$. Эта сходимость влечет

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow 0} \mathbf{P}\left(\frac{M_T^{(a)}}{c_{n(a)}} \geq x\right) = \mathbf{P}(M^* \geq x).$$

Однако для доказательства теоремы необходимо показать, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_T^{(a)}}{c_{n(a)}} \geq x\right) = \mathbf{P}(M^* \geq x).$$

Таким образом, мы должны обосновать правомерность перестановки пределов. Легко видеть, что для этого достаточно выполнения следующего условия:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\sup_{k \geq n(a)T} S_k^{(a)} \geq 0\right) = 0 \quad (5)$$

равномерно по $a > 0$. В случае конечной дисперсии это соотношение было доказано Ю. В. Прохоровым в [10] с помощью классического неравенства Колмогорова. Позже С. Асмуссен [1, с. 289] доказал (5), используя то, что последовательность $\{S_n/n\}$ является обратным мартингалом. Этот факт также использовался в [5] и [12] для случая бесконечной дисперсии.

Следует также отметить, что условия (4) и (5) эквивалентны в предположениях нашей теоремы. Доказательство этой эквивалентности будет приведено в конце работы.

Теперь мы сформулируем и докажем обобщение неравенства Колмогорова на случай, когда дисперсия не обязательно конечна. Это неравенство позволит нам преодолеть технические трудности, возникающие в обоих подходах, а именно доказать (4) и (5).

Лемма. *Найдется $C > 0$ такое, что неравенство*

$$\mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} S_k \geq x\right) \leq C \frac{nV(x)}{x^2} \quad (6)$$

верно для всех $x > 0$ и $n \geq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с неравенством (1.2) из работы [11]

$$\mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} S_k \geq x\right) \leq Cn(\mathbf{P}(|X_1| > x) + x^{-1}|\mathbf{E}(X_1; |X_1| \leq x)| + x^{-2}V(x)) \quad (7)$$

(здесь и далее C обозначает произвольную положительную конечную постоянную).

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X_1| > x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(|X_1| \in (2^j x, 2^{j+1} x]) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{V(2^{j+1} x)}{2^{2j} x^2} \\ &\leq \frac{V(x)}{x^2} \cdot 4C(\gamma) \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(\alpha-\gamma)j}, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве мы использовали соотношение

$$\frac{V(y)}{V(x)} \leq C(\gamma) \left(\frac{y}{x}\right)^{2-\alpha+\gamma}, \quad y \geq x, \quad (8)$$

которое следует из представления Карамата, см. [15, теорема 1.2] (напомним, что $V(x)$ правильно меняется с показателем $2 - \alpha$). Выбирая теперь $\gamma < \alpha$, мы получаем

$$\mathbf{P}(|X_1| > x) \leq C \frac{V(x)}{x^2}. \quad (9)$$

С помощью аналогичных рассуждений мы можем получить также следующую оценку:

$$|\mathbf{E}(X_1; |X_1| \leq x)| = |\mathbf{E}(X_1; |X_1| > x)| \leq C \frac{V(x)}{x}. \quad (10)$$

Комбинируя (7), (9) и (10), получаем неравенство (6). Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы с п о м о щ ь ю ф а к т о р и з а ц и и В и н е р а-Х о п ф а. Из факторизации Винера-Хопфа следует, что

$$\mathbf{E} e^{-\lambda M^{(a)}} = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{E}(e^{-\lambda S_k^{(a)}} - 1; S_k^{(a)} > 0) \right\}$$

для всех $\lambda > 0$ (см., например, [16, предложение 19.2]). Положим $\lambda = \mu/c_{n(a)}$ с некоторым $\mu > 0$. В этих обозначениях имеем:

$$\mathbf{E} e^{-\mu M^{(a)}/c_{n(a)}} = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{E}(1 - e^{-\mu S_k^{(a)}/c_{n(a)}}; S_k^{(a)} > 0) \right\}. \quad (11)$$

Покажем, что поточечный предел при $a \rightarrow 0$ этого преобразования Лапласа равен преобразованию Лапласа величины M^* .

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$ и $T > 1$ и разобьем сумму в (11) на три части:

$$\sum_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\varepsilon n(a)} + \sum_{k=\varepsilon n(a)}^{Tn(a)} + \sum_{k=Tn(a)}^{\infty} =: \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

Рассмотрим каждое слагаемое по отдельности.

Из неравенств $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$ для всех положительных t следует, что

$$0 \leq \mathbf{E}(1 - e^{-\mu S_k^{(a)}/c_{n(a)}}; S_k^{(a)} > 0) \leq \frac{\mu}{c_{n(a)}} \mathbf{E}(S_k^{(a)}; S_k^{(a)} > 0).$$

Заметим, что $\mathbf{E}(S_k^{(a)}; S_k^{(a)} > 0) = \mathbf{E}(S_k - ka; S_k > ka) \leq \mathbf{E}(S_k; S_k > 0)$. Так как $\{S_n\}$ асимптотически устойчиво с показателем $\alpha > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{-1} \mathbf{E}(S_n; S_n > 0) = \mathbf{E}(\xi_1; \xi_1 > 0).$$

Из этого следует, что $\mathbf{E}(S_k; S_k > 0) \leq Cc_k$ для всех $k \geq 1$. В результате получаем оценку

$$0 \leq \mathbf{E}(1 - e^{-\mu S_k^{(a)}/c_{n(a)}}; S_k^{(a)} > 0) \leq C\mu \frac{c_k}{c_{n(a)}}.$$

Следовательно,

$$0 \leq \Sigma_1 \leq \frac{C\mu}{c_{n(a)}} \sum_{k=1}^{\varepsilon n(a)} \frac{c_k}{k}. \quad (12)$$

Поскольку последовательность $\{c_k\}$ является правильно меняющейся с показателем $1/\alpha \in (0, 1)$, то $\sum_{k=1}^n c_k/k \sim c_n/\alpha$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\varepsilon n(a)} \frac{c_k}{k} \leq Cc_{\varepsilon n(a)} \leq C\varepsilon^{1/\alpha} c_{n(a)}. \quad (13)$$

Оценки (12) и (13) влекут

$$0 \leq \Sigma_1 \leq C\varepsilon^{1/\alpha} \mu. \quad (14)$$

Чтобы оценить Σ_3 , заметим, что

$$0 \leq \mathbf{E}(1 - e^{-\mu S_k^{(a)}/c_{n(a)}}; S_k^{(a)} > 0) \leq \mathbf{P}(S_k^{(a)} > 0) = \mathbf{P}(S_k > ka).$$

Используя лемму, получим

$$0 \leq \Sigma_3 \leq \sum_{k=Tn(a)}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{P}(S_k > ka) \leq C \sum_{k=Tn(a)}^{\infty} \frac{V(ka)}{(ka)^2} \leq C \frac{1}{a} \int_{Tan(a)}^{\infty} \frac{V(x)}{x^2} dx.$$

Учитывая, что $V(x)$ правильно меняется с показателем $2 - \alpha$, мы имеем

$$\Sigma_3 \leq C \frac{V(Tan(a))}{Ta^2n(a)} \leq CT^{1-\alpha} \frac{V(an(a))}{a^2n(a)} \leq CT^{1-\alpha}. \quad (15)$$

В последнем неравенстве мы использовали соотношения

$$\frac{V(an(a))}{a^2n(a)} \sim \frac{V(c_{n(a)})}{(c_{n(a)})^2} n(a) \sim 1, \quad a \rightarrow 0, \quad (16)$$

которые следуют из (1).

Осталось рассмотреть Σ_2 . Используя предположение о том, что S_k/c_k сходится по распределению к ξ_1 , мы имеем

$$\frac{S_k^{(a)}}{c_{n(a)}} = \frac{S_k}{c_{n(a)}} - \frac{ka}{c_{n(a)}} = \frac{S_k}{c_k} \frac{c_k}{c_{n(a)}} - \frac{ka}{c_{n(a)}} \rightarrow v^{1/\alpha} \xi_1 - v \quad (17)$$

по распределению при $a \rightarrow 0$ и $k/n(a) \rightarrow v \in (0, \infty)$. На последнем шаге мы использовали (2) и регулярное изменение $\{c_k\}$. Из свойств устойчивого процесса $\{\xi_t\}$ следует, что распределения $v^{1/\alpha} \xi_1$ и ξ_v совпадают. Отсюда и из (17) заключаем, что

$$\mathbf{E}(1 - e^{-\mu S_k^{(a)}/c_{n(a)}}; S_k^{(a)} > 0) \rightarrow \mathbf{E}(1 - e^{-\mu(\xi_v - v)}; \xi_v - v > 0)$$

при $a \rightarrow 0$ и $k/n(a) \rightarrow v \in (0, \infty)$. Используя теперь теорему о мажорируемой сходимости, мы видим, что при $a \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{k=\varepsilon n(a)}^{Tn(a)} \frac{n(a)}{k} \mathbf{E}(1 - e^{-\mu S_k^{(a)}/c_{n(a)}}; S_k^{(a)} > 0) \frac{1}{n(a)} \\ &\rightarrow \int_{\varepsilon}^T \frac{1}{v} \mathbf{E}(1 - e^{-\mu(\xi_v - v)}; \xi_v - v > 0) dv. \end{aligned} \quad (18)$$

Ясно, что процесс $\xi_t - t$ уходит на $-\infty$. Используя [14, теорема 48.1], получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, T \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^T \frac{1}{v} \mathbf{E}(1 - e^{-\mu(\xi_v - v)}; \xi_v - v > 0) dv \\ = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} \mathbf{E}(1 - e^{-\mu(\xi_v - v)}; \xi_v - v > 0) dv < \infty. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, комбинируя (11), (14), (15) и (18) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$, получаем

$$\mathbf{E} e^{-\mu M^{(a)}/c_{n(a)}} \longrightarrow \exp \left\{ - \int_0^{\infty} \frac{1}{v} \mathbf{E}(1 - e^{-\mu(\xi_v - v)}; \xi_v - v > 0) dv \right\}$$

при $a \rightarrow 0$. Известно, что правая часть предыдущего соотношения является преобразованием Лапласа величины M^* (см. [14, теорема 48.1]).

Доказательство теоремы с помощью функциональных предельных теорем. В соответствии с функциональной предельной теоремой для асимптотически устойчивых случайных блужданий (см., например, [6, теорема 9.6.2])

$$\left\{ \frac{S_{[nt]}}{c_n}; t \in [0; T] \right\} \longrightarrow \{\xi_t; t \in [0; T]\}$$

по распределению. Следовательно, при $a \downarrow 0$

$$\left\{ \frac{S_{[n(a)t]} - [an(a)t]}{c_{n(a)}}; t \in [0; T] \right\} \longrightarrow \{\xi_t - t; t \in [0; T]\}.$$

Из этой сходимости следует, что

$$\lim_{a \downarrow 0} \mathbf{P} \left(\max_{k \leq n(a)T} S_k^{(a)} \geq xc_{n(a)} \right) = \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} (\xi_t - t) \geq x \right), \quad x \geq 0.$$

Так как $\sup_{t \leq T} (\xi_t - t)$ сходится к M^* , то для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\max_{k \geq n(a)T} S_k^{(a)} \geq 0 \right) = 0 \quad (20)$$

равномерно по $a > 0$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left\{ \max_{k \geq n(a)T} S_k^{(a)} \geq 0 \right\} &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \left\{ \max_{k \in [2^j n(a)T, 2^{j+1} n(a)T)} (S_k - ka) \geq 0 \right\} \\ &\subset \bigcup_{j=0}^{\infty} \left\{ \max_{k \leq 2^{j+1} n(a)T} S_k \geq 2^j an(a)T \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы вытекает

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\max_{k \geq n(a)T} S_k^{(a)} \geq 0 \right) &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P} \left(\max_{k \leq 2^{j+1} n(a)T} S_k \geq 2^j an(a)T \right) \\ &\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{j+1} n(a)TV(2^j an(a)T)}{(2^j an(a)T)^2} = \frac{2C}{a} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{V(2^j an(a)T)}{2^j an(a)T}. \end{aligned}$$

Используя неравенство (8) с $\gamma < \alpha - 1$, видим, что последнее выражение не превосходит $CV(an(a)T)/(a^2 n(a)T)$. Правильное изменение $V(x)$ и (16) влекут $V(an(a)T)/(a^2 n(a)T) \leq CT^{1-\alpha}$, что, в свою очередь, влечет (20). Тем самым, доказательство завершено.

Приведем несколько замечаний, касающихся условий теоремы. Во-первых, заметим, что предположение на семейство случайных величин может быть ослаблено. Мы предполагали, что $S_k^{(a)} = S_k - ka$ для простоты доказательств. Однако все аргументы остаются верными, если предположить, например, что

$$S_k^{(a)} = S_k - ka + \sum_{i=1}^k Y_i^{(a)},$$

где $\{Y_i^{(a)}\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих условиям $\mathbf{E} Y_1^{(a)} = 0$ и $\mathbf{E} |Y_1^{(a)}|^\gamma < \infty$ равномерно по a при некотором $\gamma > \alpha$. Действительно, нетрудно видеть, что

$$\frac{S_n^{(a)} + na}{c_n} \rightarrow \xi \quad \text{по распределению}$$

равномерно по a . Кроме того,

$$\mathbf{E}((S_1^{(a)} + a)^2; |S_1^{(a)} + a| \leq x) \leq CV(x).$$

Эта оценка позволяет применять лемму к случайному блужданию $\{S_n^{(a)} + na\}$.

Более того, в случае конечной дисперсии наши аргументы останутся в силе при выполнении следующего условия Линдберга:

$$S_k^{(a)} = \sum_{i=1}^k X_i^{(a)},$$

где $\{X_i^{(a)}\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что $\mathbf{E} X_1^{(a)} = -a$, $\lim_{a \rightarrow 0} \mathbf{D} X_1^{(a)} = \sigma^2 \in (0, \infty)$ и

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathbf{E} \left((X_1^{(a)})^2; |X_1^{(a)}| > \frac{\varepsilon}{a} \right) = 0 \quad \text{для всех } \varepsilon > 0. \quad (21)$$

Последнее условие, по-видимому, является минимальным. С одной стороны, оно необходимо для нормального приближения $aS_{1/a^2}^{(a)}$. С другой стороны, в [13] приведен пример семейства $S^{(a)}$ такого, что (21) не выполняется и $M^{(a)} = 0$ для всех a .

Доказательство эквивалентности (4) и (5). Покажем сначала, что (5) эквивалентно соотношению

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M^{(a)} > Tc_{n(a)}) = 0 \quad \text{равномерно по } a > 0. \quad (22)$$

Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sup_{k \geq n(a)T} S_k^{(a)} \geq 0 \right) &\leq \mathbf{P}(S_{Tn(a)}^{(a)} \geq -Tan(a)/2) + \mathbf{P}(M^{(a)} > Tc_{n(a)}/2), \\ \mathbf{P} \left(\sup_{k \geq n(a)T} S_k^{(a)} \geq 0 \right) &\geq \mathbf{P}(M^{(a)} > 2Tc_{n(a)}) - \mathbf{P}(S_{Tn(a)}^{(a)} \geq -2Tan(a)). \end{aligned}$$

Лемма влечет, что вероятности $\mathbf{P}(S_{Tn(a)}^{(a)} \geq -Tan(a)/2)$ и $\mathbf{P}(S_{Tn(a)}^{(a)} \geq -2Tan(a))$ сходятся к нулю при $T \rightarrow \infty$ равномерно по a . Следовательно, учитывая соотношение $an(a) \sim c_{n(a)}$, получаем, что (5) и (22) эквивалентны.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M^{(a)} \leq Tc_{n(a)}) &\geq \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\mu \frac{M^{(a)}}{c_{n(a)}} \right\}; M^{(a)} \leq Tc_{n(a)} \right] \\ &\geq \mathbf{E} \exp \left\{ -\mu \frac{M^{(a)}}{c_{n(a)}} \right\} - e^{-\mu T} \mathbf{P}(M^{(a)} > Tc_{n(a)}). \end{aligned}$$

Полагая $\mu = T^{-1}$, приходим к неравенству

$$\mathbf{P}(M^{(a)} > Tc_{n(a)}) \leq \frac{1 - \mathbf{E} \exp\{-M^{(a)}/(Tc_{n(a)})\}}{1 - e^{-1}}. \quad (23)$$

Используя (13) с $\varepsilon = T$ и $\mu = T^{-1}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{E}(1 - e^{-S_k^{(a)}/(Tc_{n(a)})}; S_k^{(a)} > 0) \leq CT^{1/\alpha-1} + \sum_{k=Tn(a)}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{P}(S_k^{(a)} > 0).$$

Из этой оценки следует, что (4) влечет

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{E}(1 - e^{-S_k^{(a)}/(Tc_{n(a)})}; S_k^{(a)} > 0) = 0 \quad \text{равномерно по } a > 0.$$

Таким образом, из (23) и (11) заключаем, что (4) влечет (22).

Для доказательства обратной импликации используем простое неравенство

$$\mathbf{P}(M^{(a)} \leq Tc_{n(a)}) \leq e^{\mu T} \mathbf{E} \exp \left\{ -\mu \frac{M^{(a)}}{c_{n(a)}} \right\}.$$

Полагая $\mu = T^{-2}$ и устремляя T к бесконечности, видим, что (22) влечет соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \ln \mathbf{E} \exp \left\{ -\frac{M^{(a)}}{T^2 c_{n(a)}} \right\} = 0 \quad \text{равномерно по } a > 0.$$

Снова используя (13), имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=T^6 n(a)}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{E}(1 - e^{-S_k^{(a)}/(T^2 c_{n(a)})}; S_k^{(a)} > 0) = 0 \quad \text{равномерно по } a > 0.$$

Замечая, что

$$\mathbf{E}(1 - e^{-S_k^{(a)}/(T^2 c_{n(a)})}; S_k^{(a)} > 0) \geq (1 - e^{-1}) \mathbf{P}(S_k^{(a)} > T^2 c_{n(a)}),$$

получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=T^6 n(a)}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{P}(S_k^{(a)} > T^2 c_{n(a)}) = 0 \quad \text{равномерно по } a > 0. \quad (24)$$

Поскольку плотность любого устойчивого распределения ограничена, из локальной предельной теоремы для S_n вытекает неравенство $\mathbf{P}(S_n \in [0, z]) \leq C(z+1)/c_n$ для всех $z > 0$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_k^{(a)} > T^2 c_{n(a)}) \geq \mathbf{P}(S_k^{(a)} > 0) - C \frac{T^2 c_{n(a)}}{c_k}.$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=T^6 n(a)}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{P}(S_k^{(a)} > T^2 c_{n(a)}) &\geq \sum_{k=T^6 n(a)}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{P}(S_k^{(a)} > 0) - CT^2 c_{n(a)} \sum_{k=T^6 n(a)}^{\infty} \frac{1}{kc_k} \\ &\geq \sum_{k=T^6 n(a)}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{P}(S_k^{(a)} > 0) - CT^{2-6/\alpha}, \end{aligned}$$

на последнем шаге мы использовали то, что $\{c_n\}$ правильно меняется с показателем $1/\alpha$. Используя это неравенство, убеждаемся, что (24) влечет

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=T^6 n(a)}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbf{P}(S_k^{(a)} > 0) = 0 \quad \text{равномерно по } a > 0,$$

что, в свою очередь, эквивалентно (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Asmussen S.* Applied Probability and Queues. New York: Springer-Verlag, 2003, 438 p.
2. *Боровков А. А.* Переходные явления для случайных блужданий с разнораспределенными скачками, имеющими бесконечные дисперсии. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 224–240.
3. *Boxma O. J., Cohen J. W.* Heavy-traffic analysis for the GI/G/1 queue with heavy-tailed distributions. — Queueing Syst., 1999, v. 33, № 1–3, p. 177–204.
4. *Cohen J. W.* Random walk with a heavy-tailed jump distribution. — Queueing Syst., 2002, v. 40, № 1, p. 35–73.
5. *Furrer H.* Risk theory and heavy-tailed Lévy processes. PhD Thesis. Zürich: ETH, 1997.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965, 655 с.
7. *Kingman J. F. C.* The single server queue in heavy traffic. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1961, v. 57, p. 902–904.
8. *Kingman J. F. C.* On queues in heavy traffic. — J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 1962, v. 24, p. 383–392.
9. *Kingman J. F. C.* The heavy traffic approximation in the theory of queues. — Proceedings of Symposium on Congestion Theory. Ed. by W. L. Smith and W. E. Wilkinson. University of North Carolina Press, 1965, p. 137–159.
10. *Прохоров Ю. В.* Переходные явления в ветвящихся процессах. I. — Литов. матем. сб., 1963, т. 3, с. 199–205.
11. *Pruitt W. E.* The growth of random walks and Lévy processes. — Ann. Probab., 1981, v. 9, № 6, p. 948–956.
12. *Resnick S., Samorodnitsky G.* A heavy traffic limit theorem for workload processes with heavy tailed service requirements. — Management Sci., 2000, v. 46, p. 1236–1248.
13. *Саханенко А. И.* О переходных явлениях в случайных блужданиях. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 2, с. 382–395.
14. *Sato K.-I.* Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
15. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
16. *Спицер Ф.* Принцип случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.

Поступила в редакцию
3.XII.2009

© 2010 г.

ЖУКОВСКИЙ М. Е.*

ОСЛАБЛЕННЫЙ ЗАКОН НУЛЯ ИЛИ ЕДИНИЦЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ДИСТАНЦИОННЫХ ГРАФОВ

Для широкого класса случайных дистанционных графов, возникающих во многих задачах комбинаторной геометрии, доказан новый вариант закона нуля или единицы. Показано, что классический закон нуля или единицы не имеет места для рассматриваемых графов. Однако справедлив ослабленный вариант этого закона.

Ключевые слова и фразы: закон нуля или единицы, дистанционные графы, игра Эренфойхта.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: zhukmax@gmail.com