Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Жуковский, Ослабленный закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 2, 344–350

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 07:47:07

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Asmussen S.* Applied Probability and Queues. New York: Springer-Verlag, 2003, 438 p.
2. *Боровков А. А.* Переходные явления для случайных блужданий с разнораспределенными скачками, имеющими бесконечные дисперсии. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 224–240.
3. *Boxma O. J., Cohen J. W.* Heavy-traffic analysis for the GI/G/1 queue with heavy-tailed distributions. — Queueing Syst., 1999, v. 33, № 1–3, p. 177–204.
4. *Cohen J. W.* Random walk with a heavy-tailed jump distribution. — Queueing Syst., 2002, v. 40, № 1, p. 35–73.
5. *Furrer H.* Risk theory and heavy-tailed Lévy processes. PhD Thesis. Zürich: ETH, 1997.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965, 655 с.
7. *Kingman J. F. C.* The single server queue in heavy traffic. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1961, v. 57, p. 902–904.
8. *Kingman J. F. C.* On queues in heavy traffic. — J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 1962, v. 24, p. 383–392.
9. *Kingman J. F. C.* The heavy traffic approximation in the theory of queues. — Proceedings of Symposium on Congestion Theory. Ed. by W. L. Smith and W. E. Wilkinson. University of North Carolina Press, 1965, p. 137–159.
10. *Прохоров Ю. В.* Переходные явления в ветвящихся процессах. I. — Литов. матем. сб., 1963, т. 3, с. 199–205.
11. *Pruitt W. E.* The growth of random walks and Lévy processes. — Ann. Probab., 1981, v. 9, № 6, p. 948–956.
12. *Resnick S., Samorodnitsky G.* A heavy traffic limit theorem for workload processes with heavy tailed service requirements. — Management Sci., 2000, v. 46, p. 1236–1248.
13. *Саханенко А. И.* О переходных явлениях в случайных блужданиях. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 2, с. 382–395.
14. *Sato K.-I.* Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
15. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
16. *Спицер Ф.* Принцип случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.

Поступила в редакцию
3.XII.2009

© 2010 г.

ЖУКОВСКИЙ М. Е.*

ОСЛАБЛЕННЫЙ ЗАКОН НУЛЯ ИЛИ ЕДИНИЦЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ДИСТАНЦИОННЫХ ГРАФОВ

Для широкого класса случайных дистанционных графов, возникающих во многих задачах комбинаторной геометрии, доказан новый вариант закона нуля или единицы. Показано, что классический закон нуля или единицы не имеет места для рассматриваемых графов. Однако справедлив ослабленный вариант этого закона.

Ключевые слова и фразы: закон нуля или единицы, дистанционные графы, игра Эренфойхта.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: zhukmax@gmail.com

1. Введение и история задачи. В данной работе устанавливается новый вариант закона нуля или единицы для случайных дистанционных графов. Этот класс графов характеризуется тем, что у каждого из его элементов вершины суть точки в евклидовом пространстве, а ребрами с ненулевой вероятностью соединяются только те вершины, которые отстоят друг от друга на наперед заданное расстояние. Впервые закон нуля или единицы для случайных графов в классической модели Эрдеша–Реньи был доказан в 1969 г. в [1] (см. также [2]). Более общий результат содержит работа [3]. Мы покажем, что для изучаемого класса случайных графов упомянутый закон нуля или единицы не выполняется. В этой связи нами предложен и доказан ослабленный вариант закона нуля или единицы для широкого класса дистанционных графов, изучаемого в комбинаторной геометрии (см. [4], [5]). Для описания этих законов напомним ряд определений.

Пусть N является натуральным числом, $0 \leq p \leq 1$. Рассмотрим множество $\Omega_N = \{G = (V, E)\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V = \{1, \dots, N\}$. Назовем *случайным графом* вероятностное пространство

$$G(N, p) = (\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathcal{P}_{N,p}),$$

где

$$\mathcal{F}_N = 2^{\Omega_N}, \quad \mathcal{P}_{N,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_N^2 - |E|}.$$

Иными словами, любые две различные вершины графа в пространстве $G(N, p)$ соединены ребром с вероятностью p независимо от всех остальных пар вершин (см. [6], [7]). В дальнейшем мы будем рассматривать модели, в которых вероятность p зависит от количества вершин N , причем нас будет интересовать асимптотическое поведение вероятностей свойств случайных графов при $N \rightarrow \infty$.

Перед тем как обратиться к закону нуля или единицы, напомним про свойства графов, описываемые на языке первого порядка. *Свойства графов первого порядка* (классы $\mathcal{C} \subseteq \Omega_N$) определяются формулами первого порядка, которые строятся с помощью (см. [8]–[10])

- (а) символа отношения $\sim$ (выражает свойство двух вершин быть связанными ребром), символа $=$;
- (б) логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$;
- (с) переменных $x, y, x_1, \dots$;
- (д) кванторов $\forall, \exists$.

Рассматриваются только замкнутые формулы. Будем говорить о событии «граф G обладает свойством L », понимая под этим элемент из $\mathcal{F}_N$, являющийся множеством всех графов из Ω_N , которые обладают свойством L . Будем обозначать это событие $G \models L$. Кроме того, если $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{N,p}(G \models L) = 1$, то будем говорить, что случайный граф *почти наверное* обладает свойством L .

Определим игру EHR(G, H, k) на двух графах G и H с двумя игроками, Новатором и Консерватором, и с фиксированным числом раундов k . Она носит название *игры Эренфойхта* (см. [8], [11], [12]). На ν -м ходу ($1 \leq \nu \leq k$) Новатор выбирает вершину в любом графе (он выбирает либо $c_{j_\nu} \in V(G)$, либо $c'_{j'_\nu} \in V(H)$). Затем Консерватор выбирает вершину из другого оставшегося графа. Если Новатор выбирает на μ -м ходу, скажем, вершину $c_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu = j_\nu$ ($\nu < \mu$), то Консерватор должен выбрать $c'_{j'_\mu} \in V(H)$. Если же на этом ходу Новатор выбирает, скажем, вершину $c_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu \notin \{j_1, \dots, j_{\mu-1}\}$, то и Консерватор должен выбрать такую вершину $c'_{j'_\mu} \in V(H)$, что $j'_\mu \notin \{j'_1, \dots, j'_{\mu-1}\}$. Если он не может этого сделать, то игру выигрывает Новатор. К концу игры выбраны вершины $c_{j_1}, \dots, c_{j_k}$ графа G , а также вершины $c'_{j'_1}, \dots, c'_{j'_k}$ графа H . Некоторые из этих вершин могут совпадать. Выберем из них только различные: $c_{h_1}, \dots, c_{h_l}; c'_{h'_1}, \dots, c'_{h'_l}$, $l \leq k$. Консерватор побеждает тогда и только тогда, когда подграфы, индуцированные на множества вершин $\{c_{h_1}, \dots, c_{h_l}\}$ и $\{c'_{h'_1}, \dots, c'_{h'_l}\}$,

изоморфны, т.е., в стандартных обозначениях,

$$G \downarrow \{c_{h_1}, \dots, c_{h_l}\} \cong H \downarrow \{c'_{h'_1}, \dots, c'_{h'_l}\}.$$

В 1960 г. А. Эренфойхт (см. [11]) сформулировал и доказал следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{C}$ — класс структур над некоторой сигнатурой S , определяемый замкнутой формулой φ первого порядка. Существует такое k , что если $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \notin \mathcal{C}$, то у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\text{EHR}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)$.

Случайный граф подчиняется закону нуля или единицы (см. [1]–[3], [12]), если для любого свойства L первого порядка выполняется одно из двух условий

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{N,p}(G \models L) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{N,p}(G \models L) = 1.$$

Сформулируем теперь два закона нуля или единицы, о которых мы уже упоминали выше.

Теорема 2. Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ и $(1-p)N^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ для любого $\alpha > 0$, тогда случайный граф подчиняется закону нуля или единицы.

Теорема 3. Пусть $p(N) = N^{-\alpha}$, где α — иррациональное, $0 < \alpha < 1$, тогда случайный граф подчиняется закону нуля или единицы.

2. Постановка новой задачи. В этом пункте содержится вспомогательный материал, относящийся к ослабленному закону нуля или единицы для случайных дистанционных графов. Мы дадим новые определения.

Зафиксируем произвольное натуральное j . Рассмотрим формулы, построенные с помощью

- (a) символов отношения $\sim, =$;
- (b) логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$;
- (c) переменных $x, y, x_1, \dots$;
- (d) кванторов $\forall, \exists$, причем если количество кванторов больше, чем j , то в формуле

не могут присутствовать различные кванторы (т.е. в записи формулы участвуют либо только кванторы $\exists$, либо только кванторы $\forall$); если количество кванторов не превосходит j , то среди них сколько угодно $\forall$ и $\exists$.

Будем обозначать любую такую формулу φ_j . Пусть X_j — множество свободных переменных этой формулы, Y_j — множество связанных переменных. Пусть также $|X_j| = \alpha_j$, $|Y_j| = \beta_j$.

Рассмотрим два графа G и H . Определим *ослабленную j -игру Эренфойхта* $\text{EHR}_j(G, H, k)$ с двумя игроками, Новатором и Консерватором, и фиксированным числом раундов k . Она будет отличаться от игры $\text{EHR}(G, H, k)$ только тем, что если $k > j$, то Новатор не имеет права в каждом раунде выбирать граф, из которого затем он будет выбирать вершину. Он волен выбирать граф, из которого впоследствии будет выбирать вершины, только в первом раунде. Во всех последующих раундах он обязан выбирать вершину только из выбранного в первом раунде графа. Если $k \leq j$, то правила игры остаются прежними.

Если при определении случайного графа считать, что разные пары вершин соединены независимо друг от друга с различными вероятностями, т.е. ребро $\{x_i, x_j\}$, $1 \leq i, j \leq N$, проведено с вероятностью $p_{ij} \in [0, 1]$, то будем обозначать такое вероятностное пространство $G(N, p_{ij})$. Одним из важнейших примеров такого случайного графа является случайный граф $G(\mathcal{G}_N, p)$, где $\mathcal{G}_N = (\mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N)$ — неориентированный граф на N вершинах без петель и кратных ребер. А именно, $G(\mathcal{G}_N, p) = G(N, p_{ij})$, коль скоро

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \{x_i, x_j\} \in \mathcal{E}_N; \\ 0, & \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{E}_N. \end{cases}$$

Иными словами, $G(\mathcal{G}_N, p)$ — это вероятностное пространство

$$G(\mathcal{G}_N, p) = (\Omega_{\mathcal{G}_N}, \mathcal{F}_{\mathcal{G}_N}, \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N, p}),$$

где

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathcal{G}_N} &= \{\mathcal{G}_N^0 = (\mathcal{V}_N^0, \mathcal{E}_N^0): \mathcal{V}_N^0 = \mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N^0 \subseteq \mathcal{E}_N\}, \\ \mathcal{F}_{\mathcal{G}_N} &= 2^{\Omega_{\mathcal{G}_N}}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N, p}(\mathcal{G}_N^0) = p^{|\mathcal{E}_N^0|} (1-p)^{|\mathcal{E}_N| - |\mathcal{E}_N^0|}.\end{aligned}$$

Пусть $k \in \mathbf{N}$, $n = 4k$. Положим $N = C_n^{n/2}$. Рассмотрим граф $G_N^{\text{dist}} = (V_N^{\text{dist}}, E_N^{\text{dist}})$, в котором

$$\begin{aligned}V_N^{\text{dist}} &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n): x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = n/2\}, \\ E_N^{\text{dist}} &= \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in V_N^{\text{dist}} \times V_N^{\text{dist}}: \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = k\},\end{aligned}$$

где $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ — евклидово скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Заметим, что $|V_N^{\text{dist}}| = N$. Назовем G_N^{dist} *полным дистанционным графом*.

Рассматриваемые графы называются *дистанционными*, поскольку их ребра отвечают тем парам их вершин, которые отстоят друг от друга на некоторое наперед заданное расстояние в $\mathbf{R}^n$. Рассмотрение такого рода графов мотивировано классической задачей комбинаторной геометрии о хроматическом числе пространства (см. [4], [5]).

В настоящей работе мы рассматриваем *случайные дистанционные графы* $G(G_N^{\text{dist}}, p)$. Мы покажем, что аналог теоремы 2 для них не выполнен. Однако мы получили и положительные результаты. Для их формулировки нам потребуется определение *ослабленного закона нуля или единицы*.

Скажем, что *случайный граф* $G(G_N^{\text{dist}}, p)$ *подчиняется ослабленному j -закону нуля или единицы*, если для любого свойства L_j , определенного замкнутой формулой φ_j , выполняется одно из двух условий

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_N^{\text{dist}}, p}(G \models L_j) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_N^{\text{dist}}, p}(G \models L_j) = 1.$$

Вообще, пусть $\{\mathcal{G}_{N_i}\}_{i \in \mathbf{N}}$ — последовательность неориентированных графов без петель и кратных ребер, $|V(\mathcal{G}_{N_i})| = N_i$. Будем говорить, что *последовательность случайных графов* $\{G(\mathcal{G}_{N_i}, p(N_i))\}_{i \in \mathbf{N}}$ *подчиняется ослабленному j -закону нуля или единицы*, если для любого свойства L_j , определенного замкнутой формулой φ_j , выполняется одно из двух условий

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{\mathcal{G}_{N_i}, p}(\mathcal{G} \models L_j) = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{\mathcal{G}_{N_i}, p}(\mathcal{G} \models L_j) = 1.$$

3. Основные результаты. Прежде всего приведем аналог теоремы 1.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{C}$ — класс графов, определяемый замкнутой формулой φ_j из п. 2. Пусть также j — некоторое натуральное число. Существует такое k , что если $G \in \mathcal{C}$ и $H \notin \mathcal{C}$, то у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\text{ENR}_j(G, H, k)$.

Теорема является обобщением теоремы Эренфойхта и доказывается аналогично индукцией по количеству кванторов.

Сформулируем теперь основной результат, касающийся случайных дистанционных графов.

Теорема 5. Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ и $(1-p)N^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ для любого $\alpha > 0$. Тогда для случайных дистанционных графов выполнен ослабленный 3-закон нуля или единицы.

Будем говорить, что граф обладает свойством *полного расширения уровня s* , если для любых $a, b \in \mathbf{Z}_+$ таких, что $a + b \leq s$, и любых вершин $v_1, \dots, v_a, u_1, \dots, u_b$ существует вершина x , соединенная с вершинами $v_1, \dots, v_a$ и не соединенная с вершинами $u_1, \dots, u_b$. Для доказательства теоремы в случае, когда количество кванторов

больше 3, достаточно найти в полном дистанционном графе подграф $H(N)$, количество вершин которого не меньше N^α для некоторого $\alpha > 0$ и который обладает следующим свойством:

$$\forall x_1, \dots, x_l \in V(H(N)) \exists y_1, \dots, y_s \in V(H(N)) ((x_1 \sim y_1) \wedge \dots \wedge (x_l \sim y_s)),$$

где $l \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, $s \geq N^\beta$, $\beta > 0$. Такой подграф будет почти наверное обладать свойством полного расширения любого уровня. Несложно показать, что такой подграф существует. Осталось заметить, что если Новатор может выбирать граф только в первом раунде, то Консерватор сможет во всех раундах использовать вершины из выбранного подграфа одного из графов.

Если же количество кванторов не больше 3, то для доказательства нужно лишь убедиться в том, что случайный дистанционный граф почти наверное обладает свойством полного расширения уровня 1 и уровня 2.

Сформулируем теперь результат, из которого, как следствие, можно заключить, что аналог теоремы 2 для случайных дистанционных графов не выполнен.

Теорема 6. Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ и $(1-p)N^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ для любого $\alpha > 0$. Пусть также фиксировано $k \in \{1, 2, 3\}$ и последовательность $\{n_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ определена следующим образом:

$$n_i = 4k!i.$$

Пусть для последовательности натуральных чисел $\{m_i\}_{i \in \mathbf{N}}$, в свою очередь, выполнено: $\forall i \in \mathbf{N} (4|m_i) m_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Пусть, кроме того, она удовлетворяет следующему свойству:

$$\forall i \in \mathbf{N} \exists j_1, j_2 \in \mathbf{N} ((j_1, j_2 > i) \wedge (\neg(4k!|m_{j_1})) \wedge (4k!|m_{j_2})).$$

Для любого натурального i определим $N_i = C_{n_i}^{n_i/2}$, $M_i = C_{m_i}^{m_i/2}$. Тогда для последовательности случайных дистанционных графов $\{G(G_{N_i}^{\text{dist}}, p)\}_{i \in \mathbf{N}}$ выполняется ослабленный $(k+2)$ -закон нуля или единицы, а для последовательности случайных дистанционных графов $\{G(G_{M_i}^{\text{dist}}, p)\}_{i \in \mathbf{N}}$ ослабленный $(k+2)$ -закон нуля или единицы не выполняется.

Заметим, что теорема 5 является частным случаем теоремы 6. Для доказательства теоремы 6 рассмотрим $k+1$ вершину графа G_N^{dist} . Перенумеруем координаты этих вершин следующим образом. У вершины $\mathbf{x}_1$ перенесем все единицы в начало, все нули в конец. Таким образом, координаты разобьются на две части — одну, содержащую только единицы, и вторую, содержащую только нули. Теперь разобьем на те же части координаты вершины $\mathbf{x}_2$, т.е. в первой части будут стоять координаты, номера которых совпадают с номерами координат из первой части вершины $\mathbf{x}_1$. Перенесем в каждой из этих двух частей единицы в начало, нули в конец. Координаты вершины $\mathbf{x}_2$ разбились на четыре части. Прделаем то же самое с вершинами $\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$. Тогда координаты вершины $\mathbf{x}_{k+1}$ разобьются на 2^{k+1} частей. Пусть в j -й части количество координат равно x_j . Такая перенумерация позволит нам найти $\omega_{k+2} \geq N^{\gamma_{k+2}}$ вершин, соединенных с каждой из $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$, для некоторого $\gamma_{k+2} > 0$. Чтобы осуществить построение этих вершин, рассмотрим систему линейных уравнений $A^{k+2} \mathbf{x}^{k+2} = \mathbf{a}^{k+2}$, где

$$A^{k+2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{k+2} = (x_1^{k+2}, \dots, x_{2^{k+1}}^{k+2})^T, \quad \mathbf{a}^{k+2} = (\underbrace{n/2, \dots, n/2}_{k+2})^T, \quad x_i^{k+2} \in \mathbf{Z}_+.$$

Можно показать, что при $n = 4k!i$ для любого решения $\mathbf{x}^{k+2}$ этой системы существует решение $\tilde{\mathbf{x}}^{k+2}$ системы $2A^{k+2}\mathbf{x}^{k+2} = \mathbf{a}^{k+2}$, не большее $\mathbf{x}^{k+2}$, т.е. $\tilde{x}_i^{k+2} \leq x_i^{k+2}$ для любого i . При этом для решения $\mathbf{y}^{k+2}$, $y_i^{k+2} \leq 2k!$, существует решение $\tilde{\mathbf{y}}^{k+2}$, удовлетворяющее тому же самому условию. Пусть $x_i^{k+2} \equiv y_i^{k+2} \pmod{2k!}$, $x_i^{k+2} = \xi_i^{k+2} \cdot 2k! + y_i^{k+2}$. Следовательно, искомое решение $\tilde{\mathbf{x}}^{k+2}$ можно определить равенством

$$\tilde{x}_i^{k+2} = \xi_i^{k+2}k! + \tilde{y}_i^{k+2}. \quad (1)$$

Легко заметить, что вершина, содержащая в j -й ($j \in \{1, \dots, 2^{k+1}\}$) части $\tilde{x}_j^{k+2}$ единиц, соединена ребрами с каждой из вершин $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$ в полном дистанционном графе, причем количество ω_{k+2} таких вершин не меньше $N^{\gamma_{k+2}}$, $\gamma_{k+2} > 0$, в силу равенства (1). Поэтому последовательность случайных дистанционных графов $\{G(G_{N_i}^{\text{dist}}, p)\}_{i \in \mathbf{N}}$ будет почти наверное обладать свойством полного расширения уровня $k+1$.

Для того чтобы показать, что для последовательности случайных дистанционных графов $\{G(G_{M_i}^{\text{dist}}, p)\}_{i \in \mathbf{N}}$ ослабленный $(k+2)$ -закон нуля или единицы не выполняется, достаточно найти $k+1$ вершин, для которых не найдется $(k+2)$ -й вершины, соединенной с ними в полном дистанционном графе, если $4k! \nmid m_i$. Эти вершины можно представить в явном виде для различных значений остатков при делении m_i на $4k!$.

Сформулируем для ослабленного 3-закона нуля или единицы результат, позволяющий отойти от условия замкнутости формулы, с которой мы работаем. Положим $M = \lfloor N^{2-(\alpha_3 + \beta_3 + 4)} / (2(\alpha_3 + \beta_3)) \rfloor$.

Теорема 7. Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ и $(1-p)N^\alpha \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$ для любого $\alpha > 0$. Пусть φ_3 — некоторая незамкнутая формула из п. 2., определяющая свойство L_3 . Тогда граф $G(G_N^{\text{dist}}, p)$ обладает одним из двух следующих свойств.

1) Почти наверное существует M индуцированных подграфов графа $G(G_N^{\text{dist}}, p)$ на α_3 вершинах, которые (вершины) можно занумеровать так, что если подставить их вместо свободных переменных в формулу φ_3 , то полученные замкнутые формулы $\tilde{\varphi}_3$ будут выражать свойства графов $\tilde{L}_3$, для которых будет выполнено $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_N^{\text{dist}}, p}(G \models \tilde{L}_3) = 1$.

2) Почти наверное существует M индуцированных подграфов на α_3 вершинах, которые (вершины) можно занумеровать так, что если подставить их вместо свободных переменных в формулу φ_3 , то полученные замкнутые формулы $\tilde{\varphi}_3$ будут выражать свойства графов $\tilde{L}_3$, для которых будет выполнено $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{G_N^{\text{dist}}, p}(G \models \tilde{L}_3) = 0$.

Наиболее значимым в теореме является тот факт, что упомянутые в ней индуцированные подграфы не просто существуют, но что количество их стремится к бесконечности с ростом N .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глебский Ю. В., Коган Д. И., Легонький М. И., Таланов В. А. Область и степень реализуемости формул ограниченного исчисления предикатов. — Кибернетика, 2003, т. 5, с. 142–154.
2. Fagin R. Probabilities in finite models. — J. Symbolic Logic, 1976, v. 41, № 1, p. 50–58.
3. Shelah S., Spencer J. H. Zero-one laws for sparse random graphs. — J. Amer. Math. Soc., 1988, v. 1, № 1, p. 97–115.
4. Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств. — Успехи матем. наук, 2001, т. 56, № 1, с. 107–146.

5. Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2007, 136 с.
6. Bollobás B. Random Graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001, 498 p.
7. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2004, 255 с.
8. Верещагин Н. К., Шень А. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2000, 286 с.
9. Schwentick T. On winning Ehrenfeucht games and monadic NP. — Ann. Pure Appl. Logic, 1996, v. 79, № 1, p. 61–92.
10. Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2007, 125 с.
11. Ehrenfeucht A. An application of games to the completeness problem for formalized theories. — Fund. Math., 1960, v. 49, p. 129–141.
12. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2007, 320 с.

Поступила в редакцию
5.VIII.2009

© 2010 г.

КЛЕБАНЕР Ф.*, ЛИПЦЕР Р. Ш.**

ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ РАЗОРЕНИЯ. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Изучается вероятность поглощения $\mathbf{P}(\tau_0 \leq T)$ на интервале $[0, T]$, где $\tau_0 = \inf\{t: X_t = 0\}$ и X_t — неотрицательный диффузионный процесс относительно броуновского движения B_t :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t^\gamma dB_t, \quad X_0 = K > 0.$$

Диффузионный коэффициент σx^γ , $\gamma \in [1/2, 1)$, не удовлетворяет условию Липшица и тем самым обеспечивает выполнение неравенства $\mathbf{P}(\tau_0 \leq T) > 0$. Наш основной результат:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P}(\tau_0 \leq T) = -\frac{1}{2\mathbf{E} M_T^2},$$

где $M_t = \int_0^t \sigma(1-\gamma)e^{-(1-\gamma)\mu s} dB_s$. Кроме того, мы даем описание наиболее вероятной траектории поглощения нормированного процесса X_t/K при $K \rightarrow \infty$.

Ключевые слова и фразы: диффузионный процесс, вероятность поглощения, принцип больших уклонений.

1. Введение. В данной статье мы рассматриваем известную модель:

Constant Elasticity of Variance Model,

введенную в [1] и нашедшую применение в моделировании цены опционов (см., например, [2] и [9]).

Эта модель задается уравнением Ито со стандартным броуновским движением B_t и положительным начальным условием $X_0 = K > 0$:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t^\gamma dB_t, \tag{1.1}$$

где μ, σ — произвольные отличные от нуля константы и $\gamma \in [1/2, 1)$. В частном случае $\gamma = 1/2$ эта модель известна как модель Кокса–Ингерсола–Росса. Несмотря на то что

* School of Mathematical Sciences, Building 28M, Monash University, Clayton Campus, Victoria 3800, Australia; e-mail: fima.klebaner@sci.monash.edu.au

** Department of Electrical Engineering Systems, Tel Aviv University, 69978 Tel Aviv, Israel; e-mail: liptser@eng.tau.ac.il; rliptser@gmail.com