Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. К. Клебанер, Р. Ш. Липцер, Диффузионная модель разорения. Асимптотический анализ, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 2, 350–357

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4205>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:51:39

5. Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2007, 136 с.
6. Bollobás B. Random Graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001, 498 p.
7. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2004, 255 с.
8. Верещагин Н. К., Шень А. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2000, 286 с.
9. Schwentick T. On winning Ehrenfeucht games and monadic NP. — Ann. Pure Appl. Logic, 1996, v. 79, № 1, p. 61–92.
10. Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2007, 125 с.
11. Ehrenfeucht A. An application of games to the completeness problem for formalized theories. — Fund. Math., 1960, v. 49, p. 129–141.
12. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2007, 320 с.

Поступила в редакцию
5.VIII.2009

© 2010 г.

КЛЕБАНЕР Ф.*, ЛИПЦЕР Р. Ш.**

ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ РАЗОРЕНИЯ. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Изучается вероятность поглощения $\mathbf{P}(\tau_0 \leq T)$ на интервале $[0, T]$, где $\tau_0 = \inf\{t: X_t = 0\}$ и X_t — неотрицательный диффузионный процесс относительно броуновского движения B_t :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t^\gamma dB_t, \quad X_0 = K > 0.$$

Диффузионный коэффициент σx^γ , $\gamma \in [1/2, 1)$, не удовлетворяет условию Липшица и тем самым обеспечивает выполнение неравенства $\mathbf{P}(\tau_0 \leq T) > 0$. Наш основной результат:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P}(\tau_0 \leq T) = -\frac{1}{2\mathbf{E} M_T^2},$$

где $M_t = \int_0^t \sigma(1-\gamma)e^{-(1-\gamma)\mu s} dB_s$. Кроме того, мы даем описание наиболее вероятной траектории поглощения нормированного процесса X_t/K при $K \rightarrow \infty$.

Ключевые слова и фразы: диффузионный процесс, вероятность поглощения, принцип больших уклонений.

1. Введение. В данной статье мы рассматриваем известную модель:

Constant Elasticity of Variance Model,

введенную в [1] и нашедшую применение в моделировании цены опционов (см., например, [2] и [9]).

Эта модель задается уравнением Ито со стандартным броуновским движением B_t и положительным начальным условием $X_0 = K > 0$:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t^\gamma dB_t, \tag{1.1}$$

где μ, σ — произвольные отличные от нуля константы и $\gamma \in [1/2, 1)$. В частном случае $\gamma = 1/2$ эта модель известна как модель Кокса–Ингерсола–Росса. Несмотря на то что

* School of Mathematical Sciences, Building 28M, Monash University, Clayton Campus, Victoria 3800, Australia; e-mail: fima.klebaner@sci.monash.edu.au

** Department of Electrical Engineering Systems, Tel Aviv University, 69978 Tel Aviv, Israel; e-mail: liptser@eng.tau.ac.il; rliptser@gmail.com

коэффициент диффузии σx^γ удовлетворяет только условию Гёльдера, уравнение (1.1) имеет единственное сильное неотрицательное решение (существование доказано Делбаэном и Ширакавой [2], единственность установлена Ямадой и Ватанабэ — см., например, [10, с. 265] или [6, с. 17 и теорема 13.1]). В отличие от модели с $\gamma = 1$ (модель Блэка–Шоулса), где процесс X_t остается положительным при любом $t > 0$, в рассматриваемой модели X_t может обращаться в нуль в момент времени $\tau_0 = \inf\{t: X_t = 0\}$ с $\mathbf{P}(\tau_0 < \infty) > 0$, который можно трактовать как момент *разорения*.

Центральную роль в предлагаемом асимптотическом анализе ($K \rightarrow \infty$) играет нормированный процесс $x_t^K = X_t/K$, определяемый уравнением Ито

$$dx_t^K = \mu x_t^K dt + \frac{\sigma}{K^{1-\gamma}} (x_t^K)^\gamma dB_t \quad (1.2)$$

с начальным условием $x_0^K = 1$ и малым диффузионным параметром $\sigma x^\gamma / K^{1-\gamma}$, для которого момент разорения τ_0 сохраняется.

При $K \rightarrow \infty$ мы привлекаем результаты из теории больших уклонений для двух семейств:

$$\{(x_t^K)_{t \in [0, T]}\}_{K \rightarrow \infty} \quad \text{и} \quad \left\{ \left(\frac{1}{K^{1-\gamma}} M_t \right)_{t \in [0, T]} \right\}_{K \rightarrow \infty},$$

где

$$M_t = \int_0^t \sigma(1-\gamma) e^{-(1-\gamma)\mu s} dB_s. \quad (1.3)$$

Для второго семейства принцип больших уклонений (ПБУ) хорошо известен. Для первого семейства ПБУ Вентцеля–Фрейдлина [5] ожидаем, несмотря на то, что его диффузионный параметр вырождается в нуль и удовлетворяет лишь условию Гёльдера. В частности, для $\gamma = 1/2$ ПБУ известен (см. [3]) с параметром $1/K$ и функционалом действия Вентцеля–Фрейдлина с некоторой коррекцией: $J_T(u) = 1/2 \int_0^T ((\dot{u}_t - \mu u_t)/\sqrt{u_t})^2 I_{\{u_t > 0\}} dt$ (по поводу $\gamma = 1/2$ см. также [7] и [11]).

Мы показываем, что в случае $\gamma \in (1/2, 1)$ ПБУ также имеет место с коэффициентом и функционалом действия, зависящими от γ . Комбинируя оба ПБУ, мы получаем следующий асимптотический результат: существует гладкая функция u_t^* с $u_0^* = 1$, поглощаемая в момент времени T , такая, что для любой другой гладкой неотрицательной функции u_t с $u_0 = 1$, поглощаемой на интервале $[0, T]$, выполнено

$$\begin{aligned} & \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P}(\tau_0 \leq T) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t^*| \leq \delta \right) \\ &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t| \leq \delta \right). \end{aligned}$$

Последнее неравенство позволяет нам рассматривать u_t^* как наиболее правдоподобную траекторию поглощения нормированного процесса x_t^K .

Отметим, что вычисление вероятности $\mathbf{P}(\tau_0 \leq T)$ в логарифмической шкале требует применения нестандартной техники.

Имеем $\{\tau_0 \leq T\} = \{(x_t^K)_{t \in [0, T]} \in \mathbf{D}\}$, где

$$\mathbf{D} = \left\{ u \in \mathbf{C}_{[0, T]}: u_0 = 1; u_t = u_{\theta(u) \wedge t}, \text{ где } \theta(u) = \inf\{t: u_t = 0\} \leq T \right\}.$$

Множество $\mathbf{D}$ замкнуто в равномерной метрике ϱ пространства $\mathbf{C}_{[0, T]}$ непрерывных функций на отрезке $[0, T]$. Поэтому верхний предел

$$\overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P}(\tau_0 \leq T)$$

вычисляется в соответствии с ПБУ. Однако внутренняя часть $\mathbf{D}^\circ$ множества $\mathbf{D}$ есть пустое множество, $\mathbf{D}^\circ = \emptyset$. Этот факт исключает применение ПБУ для вычисления нижней границы

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P}(\tau_0 \leq T).$$

Этой проблемы можно избежать, используя включение

$$\{\tau_0 \leq T\} \supseteq \left\{ \frac{1}{K^{1-\gamma}} M_T < -1 \right\}$$

(M_T определено в (1.3)) и удивительный результат

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \left\{ \frac{1}{K^{1-\gamma}} M_T < -1 \right\} = \overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P}(\tau_0 \leq T),$$

который вместе с очевидным неравенством

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \left\{ \frac{1}{K^{1-\gamma}} M_T < -1 \right\} \leq \overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P}(\tau_0 \leq T)$$

позволяет установить требуемый результат для $\mathbf{P}(\tau_0 \leq T)$ в логарифмической шкале.

Этот подход интересен сам по себе и может оказаться полезным для анализа ПБУ и в других моделях.

2. Асимптотика при $K \rightarrow \infty$ для семейства $\mathbf{P}(\tau_0 \leq T)$ в логарифмической шкале. Случайный процесс M_t , определенный в (1.3), является гауссовским мартингалом с квадратической характеристикой $\langle M \rangle_t$, совпадающей с $\mathbf{E} M_t^2$:

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \sigma^2 (1-\gamma)^2 e^{-2(1-\gamma)\mu s} ds. \quad (2.1)$$

Теорема 2.1. Для любого $T > 0$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P}(\tau_0 \leq T) = -\frac{1}{2\mathbf{E} M_T^2}.$$

Доказательство. Для того чтобы пользоваться формулой Ито в окрестности τ_0 , зададим момент останова $\tau_\varepsilon = \inf\{t \leq T: x_t^K = \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Теперь, применяя формулу Ито к $(x_t^K)^{1-\gamma}$, $t \leq \tau_\varepsilon \wedge T$, получаем

$$\begin{aligned} (x_t^K)^{1-\gamma} &= 1 + \int_0^t (1-\gamma)\mu(x_s^K)^{1-\gamma} ds + \int_0^t (1-\gamma)\sigma \frac{dB_s}{K^{1-\gamma}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma(1-\gamma) \frac{\sigma^2}{K^{2(1-\gamma)}} \frac{1}{(x_s^K)^{1-\gamma}} ds \end{aligned} \quad (2.2)$$

и затем

$$\begin{aligned} &(x_{\tau_\varepsilon \wedge T}^K)^{1-\gamma} e^{-(1-\gamma)\mu(\tau_\varepsilon \wedge T)} \\ &+ \int_0^{\tau_\varepsilon \wedge T} \frac{\sigma^2}{2K^{2(1-\gamma)}} \gamma(1-\gamma) \frac{e^{(1-\gamma)\mu s}}{(x_s^K)^{1-\gamma}} ds = 1 + \frac{1}{K^{1-\gamma}} M_{\tau_\varepsilon \wedge T}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Поскольку $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_{\tau_\varepsilon \wedge T} = M_{\tau_0 \wedge T}$ п.н., то по теореме о монотонной сходимости

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\tau_\varepsilon \wedge T} \frac{\sigma^2}{2K^{2(1-\gamma)}} \gamma(1-\gamma) \frac{e^{(1-\gamma)\mu s}}{(x_s^K)^{1-\gamma}} ds \\ &= \int_{[0, \tau_0 \wedge T)} \frac{\sigma^2}{2K^{2(1-\gamma)}} \gamma(1-\gamma) \frac{e^{(1-\gamma)\mu s}}{(x_s^K)^{1-\gamma}} ds \quad \text{п.н.}; \end{aligned}$$

следовательно, переходя в обеих частях равенства (2.3) к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$0 \leq (x_{\tau_0 \wedge T}^K)^{1-\gamma} e^{-(1-\gamma)\mu(\tau_0 \wedge T)} + \int_{[0, \tau_0 \wedge T)} \frac{\sigma^2}{2K^{2(1-\gamma)}} \gamma(1-\gamma) \frac{e^{(1-\gamma)\mu s}}{(x^K)_s^{1-\gamma}} ds = 1 + \frac{1}{K^{1-\gamma}} M_{\tau_0 \wedge T}. \quad (2.4)$$

Из (2.4) вытекает неравенство $1 + M_{\tau_0 \wedge T}/K^{1-\gamma} \geq 0$. Другими словами, $\omega \in \{\tau_0 > T\}$ означает, что $1 + M_T(\omega)/K^{1-\gamma} \geq 0$. Следовательно, имеет место включение $\{\tau_0 > T\} \subset \{1 + M_T/K^{1-\gamma} \geq 0\}$ и, значит,

$$\{\tau_0 \leq T\} \supseteq \left\{ \frac{1}{K^{1-\gamma}} M_T + 1 < 0 \right\}. \quad (2.5)$$

Хорошо известно, что семейство $\{M_T/K^{1-\gamma}\}_{K \rightarrow \infty}$ удовлетворяет ПБУ в метрическом пространстве $(\mathbf{R}, \rho)$ (здесь ρ — евклидова метрика) с параметром $1/K^{2(1-\gamma)}$ и функционалом действия $I(v) = v^2/(2\mathbf{E} M_T^2)$. В соответствии с теорией больших уклонений,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P}(\tau \leq T_0) \geq - \inf_{v: v+1 \leq 0} I(v) = -\frac{1}{2\mathbf{E} M_T^2}. \quad (2.6)$$

Проверка справедливости верхней оценки

$$\overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P}(\tau \leq T_0) \leq -\frac{1}{2\mathbf{E} M_T^2} \quad (2.7)$$

намного сложнее. Выберем множество

$$\mathbf{D} = \left\{ u \in \mathbf{C}_{[0, T]}: u_0 = 1; u_t = u_{\theta(u) \wedge t}, \text{ где } \theta(u) = \inf\{t: u_t = 0\} \leq T \right\}$$

и заметим, что оно замкнуто в равномерной метрике (ϱ) пространства $\mathbf{C}_{[0, T]}$ непрерывных функций на отрезке $[0, T]$. Поскольку $\{\tau_0 \leq T\} \subseteq \{(x_t^K)_{t \in [0, T]} \in \mathbf{D}\}$, то естественно вычислить значение

$$\overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P}((x_t^K)_{t \in [0, T]} \in \mathbf{D}). \quad (2.8)$$

Для этого применим ПБУ для семейства $\{(x_t^K)_{t \in [0, T]}\}_{K \rightarrow \infty}$ с параметром $1/K^{2(1-\gamma)}$ (!) и функционалом действия:

$$J_T(u) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^{\theta(u) \wedge T} \left(\frac{\dot{u}_t - \mu u_t}{u_t^\gamma} \right)^2 dt, \quad (2.9)$$

если $u_0 = 1, \quad du_t = \dot{u}_t dt, \quad \int_{[0, \theta(u) \wedge T]} \left[\frac{\dot{u}_t - \mu u_t}{u^\gamma} \right]^2 dt < \infty,$

$J_T(u) = \infty$ в противном случае

(см. теорему 4.1). В соответствии с теорией больших уклонений,

$$\overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P}((x_t^K)_{t \in [0, T]} \in \mathbf{D}) \leq - \inf_{u \in \mathbf{D}} J_T(u),$$

так что осталось показать, что

$$\inf_{u \in \mathbf{D}} J_T(u) = \frac{1}{2\mathbf{E} M_T^2}.$$

Процедура минимизации $J_T(u)$ по $u \in \mathbf{D}$ автоматически исключает из рассмотрения функции u_t такие, что $du_t \not\ll dt$ и $\int_0^{\theta(u) \wedge T} (u_t^\gamma)^{-1} (\dot{u}_t - \mu u_t) dt = \infty$. Такая процедура минимизации может быть реализована с помощью некоторой детерминированной задачи оптимального управления с управлением w_t и управляемым процессом u_t , являющимся решением дифференциального уравнения

$$\dot{u}_t = \mu u_t + \sigma u_t^\gamma w_t, \quad t \leq \theta(u) \wedge T, \quad (2.10)$$

с начальным условием $u_0 = 1$. Функция u_t принадлежит множеству **D**. Пара $(w_t^*, \theta(u^*))$ с $u^*(t)$, соответствующим w_t^* , оптимальна, если

$$\int_0^{\theta(u^*) \wedge T} (w_t^*)^2 dt \leq \int_0^{\theta(u) \wedge T} w_t^2 dt$$

для любой другой пары (w_t, u_t) с $\int_0^{\theta(u) \wedge T} w_t^2 dt < \infty$. Технически удобно воспользоваться заменой переменных $v_t = u_t^{1-\gamma}$, которая позволяет использовать линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{v}_t = \mu(1-\gamma)v_t + \sigma(1-\gamma)w_t \quad (2.11)$$

с начальным условием $v_0 = 1$ вместо нелинейного уравнения (2.10). Мы также будем использовать тот факт, что $v_{\theta(u)} = 0$, если $u_{\theta(u)} = 0$, и $v_{\theta(u)} > 0$, если $u_{\theta(u)} > 0$. Явное решение уравнения (2.11) с условием $\theta(u) \leq T$ влечет за собой равенство

$$0 = v_{\theta(u)} e^{-\mu(1-\gamma)t} = \left[1 + \sigma(1-\gamma) \int_{[0, \theta(u) \wedge T)} e^{-\mu(1-\gamma)s} w_s ds \right],$$

эквивалентное равенству

$$-\frac{1}{\sigma(1-\gamma)} = \int_{[0, \theta(u) \wedge T)} e^{-\mu(1-\gamma)s} w_s ds, \quad (2.12)$$

откуда с помощью неравенства Коши–Шварца–Буняковского получаем

$$\int_{[0, \theta(u) \wedge T)} w_t^2 dt \geq \frac{2\mu}{\sigma^2(1-\gamma)[1 - e^{-2\mu(1-\gamma)\theta(u)}]} \geq \frac{2\mu}{\sigma^2(1-\gamma)[1 - e^{-2\mu(1-\gamma)T}]}.$$

Выбор w_t^* обусловлен двумя требованиями:

- 1) равенство (2.12) остается справедливым при замене w_t на w_t^* ;
- 2) $\int_{[0, \theta(u^*) \wedge T)} (w_t^*)^2 dt = 2\mu/(\sigma^2(1-\gamma)[1 - e^{-2\mu(1-\gamma)T}])$.

Эти требования выполнены для

$$w_t^* = -\frac{1}{\sigma} \frac{2\mu}{1 - e^{-2\mu(1-\gamma)T}} e^{-\mu(1-\gamma)t}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \int_0^T (w_t^*)^2 dt = \frac{1}{2\langle M \rangle_T}.$$

3. Наиболее правдоподобная траектория разорения нормированного процесса x_t^K . Поскольку $u_t^* \equiv (v_t^*)^{1/\gamma}$, где v_t^* есть решение уравнения

$$\dot{v}_t^* = \mu(1-\gamma)v_t^* + \sigma(1-\gamma)w_t^*$$

с $v_0^* = 1$, то

$$u_t^* = e^{\mu t} \left[1 - \frac{1 - 2\mu\langle M \rangle_t / (\sigma^2(1-\gamma))}{1 - 2\mu\langle M \rangle_T / (\sigma^2(1-\gamma))} \right]^{1/(1-\gamma)} \equiv e^{\mu t} \left[1 - \frac{e^{-2(1-\gamma)\mu t}}{e^{-2(1-\gamma)\mu T}} \right]^{1/(1-\gamma)}.$$

С другой стороны, по теореме 4.1 с u_t^* имеет место соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t^*| \leq \delta \right) = -J_T(u^*).$$

В то же время, по теореме 4.1 с $u \in \mathbf{D}$ получаем аналогичное соотношение:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t| \leq \delta \right) \\ = -J_T(u) \leq -\inf_{u \in \mathbf{D}} J_T(u) = -J_T(u^*). \end{aligned}$$

Следовательно, функция u_t^* может рассматриваться как наиболее вероятная асимптотическая оценка траектории x_t^K , поглощенной на отрезке времени $[0, T]$.

4. Принцип больших уклонений для семейства $\{(x_t^K)_{t \in [0, T]}\}_{K \rightarrow \infty}$. Семейство процессов находится в рамках постановки Вентцеля–Фрейдлина [5]. В нашей постановке мы принимаем во внимание, что случайный процесс x_t^K поглощается в марковский момент τ_0 , т.е. его траектории принадлежат пространству $\mathbf{C}_{[0, T]}^{\text{abc}}(\mathbf{R}_+)$ непрерывных неотрицательных функций $u_t = u_{t \wedge \theta(u)}$, где $\theta(u) = \inf\{t \leq T: u_t = 0\}$, из $\mathbf{C}_{[0, T]}(\mathbf{R})$. Подпространство $\mathbf{C}_{[0, T]}^{\text{abc}}(\mathbf{R}_+)$ замкнуто в равномерной метрике ϱ , и, следовательно, достаточно проверять ПБУ в $(\mathbf{C}_{[0, T]}^{\text{abc}}(\mathbf{R}_+), \varrho)$. В то же время, использование $(\mathbf{C}_{[0, T]}^{\text{abc}}(\mathbf{R}_+), \varrho)$ вместо $\mathbf{C}_{[0, T]}(\mathbf{R})$ позволяет применять стандартный подход с несложными дополнительными деталями.

Теорема 4.1. Семейство $\{(x_t^K)_{t \geq 0}\}_{K \rightarrow \infty}$ удовлетворяет ПБУ в метрическом пространстве $(\mathbf{C}_{[0, T]}^{\text{abc}}(\mathbf{R}_+), \varrho)$ с параметром $1/K^{2(1-\gamma)}$ и функционалом действия

$$J_T(u) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^{\theta(u) \wedge T} \left(\frac{\dot{u}_t - \mu u_t}{u_t^\gamma} \right)^2 dt,$$

$$\text{если } u_0 = 1, \quad du_t = \dot{u}_t dt, \quad \int_{[0, \theta(u) \wedge T]} \left[\frac{\dot{u}_t - \mu u_t}{u^\gamma} \right]^2 dt < \infty,$$

$$J_T(u) = \infty \text{ в противном случае.}$$

Доказательство. Семейство процессов $\{(x_t^K)_{t \geq 0}\}_{K \rightarrow \infty}$ экспоненциально плотно (см., например, [8, теоремы 1.3 и 3.1]), т.е.

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{K \rightarrow 0} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} x_t^K \geq C \right) = -\infty, \quad (4.1)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{K \rightarrow 0} \sup_{\vartheta \leq T} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, \Delta]} |x_{\vartheta+t}^K - x_\vartheta^K| \geq \eta \right) = -\infty, \quad (4.2)$$

где η — произвольное число и ϑ — марковский момент. При проверке (4.1) величину x_t^K можно заменить на $(x_t^K)^{1-\gamma}$ и, учитывая (2.2), воспользоваться неравенством $(x_t^K)^{1-\gamma} \leq e^{(1-\gamma)\mu t} [1 + \int_0^t e^{-(1-\gamma)\mu s} (1-\gamma)\sigma K^{-(1-\gamma)} dB_s]$ для заключительного вычисления. В силу (4.1) условие (4.2) можно заменить легко проверяемым условием (здесь $\mathfrak{A}_C = \{\sup_{t \leq T} x_t^\varepsilon \leq C\}$):

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{K \rightarrow 0} \sup_{\vartheta \leq T} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{[0, \Delta]} |x_{\vartheta+t}^K - x_\vartheta^K| \geq \eta, \mathfrak{A}_C \right) = -\infty \quad \forall C > 0.$$

Для $\theta(u) > T$ доказательство локального ПБУ

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t| \leq \delta \right) = -J_T(u)$$

не отличается от стандартного и поэтому не приводится. Случай $J_T(u) = -\infty$, включающий в себя $u_0 \neq 1$, $du_t \not\leq dt$, также проверяется стандартным способом и здесь не приводится.

Асимптотический анализ для случая $u_0 = 1$, $du_t = \dot{u}_t dt$, $\int_0^{\theta(u) \wedge T} ((\dot{u}_s - \mu u_s)/u_s^\gamma)^2 ds < \infty$, $\theta(u) \leq T$, использует следующий результат.

Предложение 4.1 ([4, теорема А.6.3]). Для любой абсолютно непрерывной функции $u = (u_t)_{t \in [0, T]}$, отображающей $[0, T]$ в $\mathbf{R}$, и любой константы $a \in \mathbf{R}$

$$\int_0^T I_{\{u_t=a, \dot{u}_t \neq 0\}} dt = 0.$$

Локальный ПБУ. Верхняя граница. Положим $u_t^n = 1/n \vee u_t$ и заметим, что $\theta(u^n) > T$. Более того, $u_0^n = 1$, $du_t^n = \dot{u}_t^n dt$ и, в силу предложения 4.1, $\dot{u}_t^n =$

$\dot{u}_t I_{\{u_t > \frac{1}{n}\}} ds$, а также $\int_0^{\theta(u^n) \wedge T} ((\dot{u}_s^n - \mu u_s^n)/(u_s^n)^\gamma)^2 ds < \infty$. Поскольку $\tau^n = \inf\{t: u_t \leq 1/n\} \rightarrow \theta(u)$, $n \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t| \leq \delta \right) \\ & \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, \tau^n \wedge T]} |x_t^K - u_t| \leq \delta \right) \\ & \leq -\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^{\tau^n \wedge T} \left(\frac{\dot{u}_t^n - \mu u_t^n}{(u_t^n)^\gamma} \right)^2 dt = -\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^{\tau^n \wedge T} \left(\frac{\dot{u}_t - \mu u_t}{u_t^\gamma} \right)^2 dt \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \int_0^{\theta(u) \wedge T} \left(\frac{\dot{u}_t - \mu u_t}{u_t^\gamma} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Локальный ПБУ. Нижняя оценка. При $\phi > \delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t^n| \leq \delta \right\} &= \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t^n| \leq \delta \right\} \cap \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |u_t^n - u_t| \leq \phi \right\} \\ &\cup \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t^n| \leq \delta \right\} \cap \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |u_t^n - u_t| > \phi \right\} \\ &\subseteq \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t| \leq \phi + \delta \right\} \cap \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |u_t^n - u_t| > \phi \right\} \\ &\subseteq \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t| \leq 2\phi \right\} \cup \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |u_t^n - u_t| > \phi \right\}. \end{aligned}$$

Для фиксированного ϕ найдется номер $n_\phi > 1/\phi$ такой, что для любого $n \geq n_\phi$ множество $\{\sup_{t \in [0, T]} |u_t^n - u_t| > \phi\}$ пусто. Следовательно, для достаточно большого номера n

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t| \leq 2\phi \right) \geq \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t^n| \leq \delta \right).$$

Это неравенство и предложение 4.1 обеспечивают нижнюю границу

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t| \leq 2\phi \right) \\ & \geq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{2(1-\gamma)}} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |x_t^K - u_t^n| \leq \delta \right) \\ & \geq -\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^{\tau^n \wedge T} \left(\frac{\dot{u}_s - \mu u_s}{u_s^\gamma} \right)^2 ds - \frac{1}{2\sigma^2} \int_{\tau^n \wedge T}^T \frac{\mu^2}{n^{2(1-\gamma)}} \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^{\theta(u) \wedge T} \left(\frac{\dot{u}_s - \mu u_s}{u_s^\gamma} \right)^2 ds. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cox J. C. The constant elasticity of variance option. Pricing model. — J. Portfolio Management, 1997, v. 23, № 2, p. 15–17.
2. Delbaen F., Shirakawa H. A note of option pricing for constant elasticity of variance model. Preprint № 96-03. Zürich: ETH, 1996.
3. Donati-Martin C., Rouault A., Yor M., Zani M. Large deviations for squares of Bessel and Ornstein–Uhlenbeck processes. — Probab. Theory Related Fields, 2004, v. 129, № 2 p. 261–289.

4. *Dupuis P., Ellis R. S.* A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations. New York: Wiley, 1997, 479 p.
5. *Freidlin M. I., Wentzell A. D.* Random Perturbations of Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag, 1984, 326 p.
6. *Klebaner F. C.* Introduction to Stochastic Calculus with Applications. London: Imperial College Press, 2005, 416 p.
7. *Klebaner F. C., Liptser R.* Likely path to extinction in simple branching models with large initial population. — J. Appl. Math. Stoch. Anal., 2006, Art. ID 60376, 23 p.
8. *Liptser R. Sh., Pukhalskii A. A.* Limit theorems on large deviations for semimartingales. — Stochastics Stochastics Rep., 1992, v. 38, № 4, p. 201–249.
9. *Lu R., Hsu Y.-H.* Valuation of standard options under the constant elasticity of variance model. — Internat. J. Business Econom., 2005, v. 4, № 2, p. 157–165.
10. *Rogers L. C. G., Williams D.* Diffusions, Markov Processes, and Martingales. V. 2. Itô Calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000, 480 p.
11. *Rouault A.* Large deviations and branching processes. — Pliska Stud. Math. Bulgar., 2000, v. 13, p. 15–38.

Поступила в редакцию
15.IV.2010

© 2010 г.

КУЗНЕЦОВА Т. В.*

УТОЧНЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МАКСИМУМОВ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ СУММ В СЛУЧАЕ НУЛЕВОЙ АСИММЕТРИИ

Рассматривается семейство экстремумов вида

$$Y_{mn} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad m, n \geq 1,$$

где $\{X_{ij}\}$, $i \geq 1$, $j \geq 1$, — независимые одинаково распределенные случайные величины. Исследуется асимптотика Y_{mn} при $m, n \rightarrow \infty$. Проводится уточнение предельной теоремы для случая, когда случайные величины $\{X_{ij}\}$, $i \geq 1$, $j \geq 1$, имеют нулевую асимметрию и, возможно, отличный от нуля эксцесс.

Ключевые слова и фразы: максимумы, случайные суммы, линейная нормировка, семиинвариант распределения порядка k , коэффициент эксцесса, коэффициент асимметрии.

1. Введение. В теории вероятностей и математической статистике широко используются следующие числовые характеристики распределений: коэффициент асимметрии (skewness) $S = \mu_3/\sigma^3$ и коэффициент эксцесса (kurtosis) $K = \mu_4/\sigma^4 - 3$, где $\mu_k = (\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X))^k$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X$.

Для нормального распределения $S = 0$ и $K = 0$. Однако, как отмечено в [6, гл. 6], для реальных финансовых данных характерны большие положительные значения эксцесса (порядка единиц или десятков). Поэтому мы исследуем распределения, для которых $S = 0$ и $K \neq 0$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: stv.msu@gmail.com