Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Кузнецова, Уточнение предельной теоремы для максимумов независимых случайных сумм в случае нулевой асимметрии, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 2, 357–362

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:40:31

4. *Dupuis P., Ellis R. S.* A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations. New York: Wiley, 1997, 479 p.
5. *Freidlin M. I., Wentzell A. D.* Random Perturbations of Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag, 1984, 326 p.
6. *Klebaner F. C.* Introduction to Stochastic Calculus with Applications. London: Imperial College Press, 2005, 416 p.
7. *Klebaner F. C., Liptser R.* Likely path to extinction in simple branching models with large initial population. — J. Appl. Math. Stoch. Anal., 2006, Art. ID 60376, 23 p.
8. *Liptser R. Sh., Pukhalskii A. A.* Limit theorems on large deviations for semimartingales. — Stochastics Stochastics Rep., 1992, v. 38, № 4, p. 201–249.
9. *Lu R., Hsu Y.-H.* Valuation of standard options under the constant elasticity of variance model. — Internat. J. Business Econom., 2005, v. 4, № 2, p. 157–165.
10. *Rogers L. C. G., Williams D.* Diffusions, Markov Processes, and Martingales. V. 2. Itô Calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000, 480 p.
11. *Rouault A.* Large deviations and branching processes. — Pliska Stud. Math. Bulgar., 2000, v. 13, p. 15–38.

Поступила в редакцию
15.IV.2010

© 2010 г.

КУЗНЕЦОВА Т. В.*

УТОЧНЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МАКСИМУМОВ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ СУММ В СЛУЧАЕ НУЛЕВОЙ АСИММЕТРИИ

Рассматривается семейство экстремумов вида

$$Y_{mn} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad m, n \geq 1,$$

где $\{X_{ij}\}$, $i \geq 1$, $j \geq 1$, — независимые одинаково распределенные случайные величины. Исследуется асимптотика Y_{mn} при $m, n \rightarrow \infty$. Проводится уточнение предельной теоремы для случая, когда случайные величины $\{X_{ij}\}$, $i \geq 1$, $j \geq 1$, имеют нулевую асимметрию и, возможно, отличный от нуля эксцесс.

Ключевые слова и фразы: максимумы, случайные суммы, линейная нормировка, семиинвариант распределения порядка k , коэффициент эксцесса, коэффициент асимметрии.

1. Введение. В теории вероятностей и математической статистике широко используются следующие числовые характеристики распределений: коэффициент асимметрии (skewness) $S = \mu_3/\sigma^3$ и коэффициент эксцесса (kurtosis) $K = \mu_4/\sigma^4 - 3$, где $\mu_k = (\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X))^k$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X$.

Для нормального распределения $S = 0$ и $K = 0$. Однако, как отмечено в [6, гл. 6], для реальных финансовых данных характерны большие положительные значения эксцесса (порядка единиц или десятков). Поэтому мы исследуем распределения, для которых $S = 0$ и $K \neq 0$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: stv.msu@gmail.com

В дальнейшем нам понадобится понятие семиинварианта. Рассмотрим функцию

$$f(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\zeta x} F\{dx\},$$

где F — функция распределения случайной величины ζ . Предположим, что интеграл конечен при всех ζ из некоторого интервала $|\zeta| < \zeta_0$. Это равносильно тому, что характеристическая функция $\varphi(\zeta) = f(i\zeta)$ аналитична в некоторой окрестности нуля. Затем перейдем от функции f к ее логарифму. Равенство

$$\psi(\zeta) = \ln f(\zeta) = \sum \frac{\psi_k}{k!} \zeta^k$$

определяет функцию, также аналитическую в некоторой окрестности нуля. Коэффициент ψ_k зависит только от моментов распределения F и носит название семиинварианта порядка k распределения F . В общем случае $\psi_1 = \mu_1$, $\psi_2 = \sigma^2$.

Используем формулы для семиинвариантов, приведенные в [5, гл. II, § 12, формулы (49), с. 402]:

$$\psi_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3, \quad \psi_4 = m_4 - 3m_2^2 - 4m_1m_3 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4,$$

где $m_k = \mathbf{E} \xi^k$. В случае $m_1 = 0$ получаем:

$$\psi_3 = m_3, \quad \psi_4 = m_4 - 3m_2^2,$$

или (с учетом того, что при $m_1 = 0$ верно $m_k = \mu_k = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E} M \xi)^k$)

$$\psi_3 = \mu_3, \quad \psi_4 = \mu_4 - 3\sigma^4.$$

При $m_1 = 0$ и $\sigma^2 = 1$ наблюдается равенство: $\psi_3 = S$, $\psi_4 = K$.

Рассмотрим семейство экстремумов вида

$$Y_{mn} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad m, n \geq 1, \quad (1)$$

где $\{X_{ij}\}$, $i \geq 1$, $j \geq 1$, — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения F . Нас интересует асимптотика Y_{mn} при $m, n \rightarrow \infty$.

Основные результаты работы [1] (приводимые далее теоремы 1–3) получены при условии, что F обладает конечным средним и дисперсией (которые для простоты полагаются равными нулю и единице соответственно).

Теорема 1. Если существуют $m_3, \dots, m_r$, $r \geq 3$, и $m = O(n^{r/2-1})$, $m, n \rightarrow \infty$, то существуют константы a_m и b_m такие, что

$$\mathbf{P}\{a_m(n^{-1/2}Y_{mn} - b_m) \leq x\} \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}. \quad (2)$$

Если же предположить аналитичность функции $f(z)$ в некоторой окрестности нуля, то это предположение существенно ослабит условия, налагаемые на рост m по сравнению с n .

Теорема 2. Если $\ln m = o(n^{1/3})$, $m, n \rightarrow \infty$, то утверждение (2) верно.

Теорема 3. Если $\ln m = o(n)$, $m, n \rightarrow \infty$, то существуют $\alpha_m \sim \beta_m \sim (2 \ln m)^{1/2}$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\alpha_m(n^{-1/2}Y_{mn} - \beta_m) \leq x\} \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}.$$

Суммы в (1) оказываются асимптотически нормальными, а для максимумов независимых нормальных случайных величин имеет место предельный закон Гумбеля. Таким образом, при $\mathbf{E} X_{ij} = 0$, $\mathbf{D} X_{ij} = 1$ и некоторых ограничениях на относительный рост $m, n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\mathbf{P}\{\alpha_m(n^{-1/2}Y_{mn} - \beta_m) \leq x\} \rightarrow \exp\{-e^{-x}\},$$

где $\alpha_m = (2 \ln m)^{1/2}$, $\beta_m = (2 \ln m)^{1/2} - (2 \ln m)^{-1/2} \ln(4\pi \ln m)^{1/2}$.

Далее рассмотрим $Y_{mn} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n X_{ij}$, $m, n \geq 1$, для случая, когда $\{X_{ij}\}$, $i \geq 1$, $j \geq 1$, — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения F , имеющие нулевую асимметрию и, возможно, отличный от нуля эксцесс. Будем также предполагать, что $\mathbf{E} X_{ij} = 0$, $\mathbf{D} X_{ij} = 1$, а характеристическая функция f аналитична в окрестности нуля. Для этого случая получим более точное выражение для констант $\alpha_{mn} \sim \beta_{mn} \sim (2 \ln m)^{1/2}$ таких, что $\mathbf{P}\{\alpha_m(n^{-1/2}Y_{mn} - \beta_m) \leq x\} \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}$.

2. Основной результат.

Теорема 4. Пусть $Y_{mn} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n X_{ij}$, $m, n \geq 1$, X_{ij} — независимые случайные величины с распределением F , $\ln m = o(n^{6/10})$, $m, n \rightarrow \infty$. Тогда существуют константы $\alpha_{mn} \sim \beta_{mn} \sim (2 \ln m)^{1/2}$ такие, что $\mathbf{P}\{\alpha_m(n^{-1/2}Y_{mn} - \beta_m) \leq x\} \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}$, и они выражаются следующими формулами:

$$\beta_{mn} = \sqrt{2 \ln m} - \frac{\psi_4}{12n} \ln m \cdot \sqrt{2 \ln m} - \frac{\ln 4\pi + \ln \ln m}{2\sqrt{2 \ln m}}, \quad \alpha_{mn} = \sqrt{2 \ln m}.$$

Доказательство. Существование констант следует из теоремы 3.

Обозначим $F_n(x) = \mathbf{P}\{S_{in}n^{-1/2} \leq x\}$, где $S_{in} = \sum_{j=1}^n X_{ij}$.

Если $u = o(n^{1/2})$, $m, n \rightarrow \infty$, то верно соотношение [2, гл. XVI, § 7, теорема 2, с. 619]:

$$\frac{1 - F_n(u)}{1 - \Phi(u)} = \exp \left\{ u^2 \lambda \left(\frac{u}{\sqrt{n}} \right) \right\} \left(1 + O \left(\frac{u}{\sqrt{n}} \right) \right),$$

где $\lambda(z)$ — функция, аналитическая в окрестности нуля, $\lambda(0) = 0$. С учетом асимптотики хвоста нормального распределения получаем:

$$1 - F_n(u) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \gamma \left(\frac{u}{\sqrt{n}} \right) \right\}, \quad (3)$$

где функция $\gamma(z) = 1 - 2\lambda(z)$ аналитична в некоторой ε -окрестности нуля, $\gamma(0) = 1$. Обозначим правую часть (3) через $h(u)$. Имеем $h(u) \rightarrow +\infty$ при $u \rightarrow 0$ и

$$h(\varepsilon n^{1/2}) = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2\pi}n} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2} \gamma(\varepsilon)n \right\} = o \left(\frac{1}{m} \right), \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Поскольку $h(u)$ непрерывна на $(0, \varepsilon n^{1/2})$, то для любого числа x при достаточно больших m, n существуют $u_{mn} \in (0, \varepsilon n^{1/2})$ такие, что $h(u_{mn}) = e^{-x}/m$.

По условию $\alpha_{mn} \sim \beta_{mn} \sim (2 \ln m)^{1/2}$, значит, $u_{mn} = \beta_{mn} + x/\alpha_{mn} \sim (2 \ln m)^{1/2} \sim o(n^{3/10})$.

Воспользуемся утверждением (см. [2, гл. XVI, § 7, формула (7.29), с. 619]) о том, что если u возрастает как $o(n^{3/10})$, то достаточно ограничиться членами разложения функции $\lambda(z)$ в степенной ряд до второй степени:

$$\lambda(z) = \lambda_1 z + \lambda_2 z^2.$$

В рассматриваемом случае $\lambda_1 = \mu_3/(6\sigma^3) = 0$, $\lambda_2 = (\sigma^2\psi_4 - 3\psi_3^2)/(24\sigma^6) = \psi_4/24$.

Таким образом, найдены функции $\lambda(z)$ и $\gamma(z)$:

$$\lambda(z) = \frac{\psi_4}{24} z^2, \quad \gamma(z) = 1 - \frac{\psi_4}{12} z^2.$$

Подставив последнее выражение для $\gamma(z)$ в (3), получим уравнение:

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} + \frac{\psi_4 u^4}{24n} \right\} \sim \frac{e^{-x}}{m}, \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Прологарифмируем это выражение и получим:

$$-\ln \sqrt{2\pi} - \ln u - \frac{u^2}{2} + \frac{\psi_4 u^4}{24n} = -x - \ln m + o(1), \quad m, n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Поскольку $u^2/2 = o(n^{6/10})$, а $\psi_4 u^4/(24n) = o(n^{2/10})$, то в левой части уравнения (4) главный член есть $u^2/2$. Кроме того, так как $\ln m = o(n^{6/10})$, то справедливо соотношение

$$\frac{u^2}{2} \sim \ln m, \quad m \rightarrow \infty.$$

Прологарифмировав его, получим выражение для $\ln u$:

$$2 \ln u - \ln 2 = \ln \ln m + o(1), \quad \ln u = \frac{\ln \ln m + \ln 2}{2} + o(1).$$

Подставим это выражение в (4) и решим (4) как квадратное уравнение относительно u^2 :

$$-\ln \sqrt{2\pi} - \frac{\ln \ln m + \ln 2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{\psi_4 u^4}{24n} = -x - \ln m,$$

$$\frac{\psi_4 u^4}{24n} - \frac{u^2}{2} - \ln \sqrt{2\pi} - \frac{\ln \ln m + \ln 2}{2} + x + \ln m = 0,$$

$$\frac{\psi_4}{12n} u^4 - u^2 - \ln \sqrt{2\pi} - \ln \ln m + 2x + 2 \ln m = 0,$$

$$D = 1 + \frac{\psi_4}{3n} (\ln 4\pi + \ln \ln m - 2x - 2 \ln m).$$

Учитывая порядки роста $\ln m$ и $\ln \ln m$, получаем, что

$$\frac{\psi_4}{3n} (\ln 4\pi + \ln \ln m - 2x - 2 \ln m) = o(n^{-4/10}), \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Поэтому, воспользовавшись формулой $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + O(x^3)$, $x \rightarrow 0$, корень из дискриминанта можно разложить в ряд Тейлора с точностью до первых трех членов:

$$\begin{aligned} \sqrt{D} &= 1 + \frac{\psi_4}{6n} (\ln(4\pi) + \ln \ln m - 2x - 2 \ln m) \\ &\quad - \frac{\psi_4^2}{72n^2} (\ln(4\pi) + \ln \ln m - 2x - 2 \ln m)^2 \\ &\quad + o(n^{-12/10}), \quad n, m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Итак, рассмотрим корни уравнения (4): $u_{1,2}^2 = ((1 \pm \sqrt{D})/\psi_4) \cdot 6n$. Первый корень $u_1^2 = ((1 + \sqrt{D})/\psi_4)6n$ не подходит, так как $u^2 = o(n^{6/10})$, и в то же время, учитывая разложение (5), получаем, что $u_1^2 \sim (6/\psi_4)n$. Таким образом, рассматриваем только второй корень:

$$u_2^2 = \frac{1 - \sqrt{D}}{\psi_4} 6n.$$

Подставим полученное в (5) выражение для $\sqrt{D}$:

$$u^2 = (2x + 2 \ln m - \ln(4\pi) - \ln \ln m) - \frac{\psi_4}{12n} (2x + 2 \ln m - \ln(4\pi) - \ln \ln m)^2 + o(n^{-2/10}),$$

и раскроем скобки:

$$\begin{aligned} u^2 &= (2x + 2 \ln m - \ln(4\pi) - \ln \ln m) \\ &\quad - \frac{\psi_4}{12n} \left(4x^2 + 4 \ln^2 m + 8x \ln m + (\ln \ln m)^2 + \ln^2(4\pi) + 2 \ln(4\pi) \ln \ln m \right. \\ &\quad \left. - 4x \ln \ln m - 4x \ln(4\pi) - 4 \ln m \ln \ln m - 4 \ln m \ln(4\pi) \right) + o(n^{-2/10}). \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие слагаемые в правой части равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_4}{12n} \cdot 4x^2 &\sim o(n^{-1}), \quad \frac{\psi_4}{12n} \cdot 4 \ln^2 m \sim o(n^{2/10}), \quad \frac{\psi_4}{12n} \cdot 8x \ln m \sim o(n^{-4/10}), \\ \frac{\psi_4}{12n} (\ln \ln m)^2 &\sim \frac{O(\ln^2 n)}{n}, \quad \frac{\psi_4}{12n} \ln^2(4\pi) \sim o(n^{-1}), \\ \frac{\psi_4}{12n} 2 \ln(4\pi) \ln \ln m &\sim \frac{O(\ln n)}{n}, \quad \frac{\psi_4}{12n} \cdot 4x \ln \ln m \sim \frac{O(\ln n)}{n}, \\ \frac{\psi_4}{12n} \cdot 4x \ln(4\pi) &\sim o(n^{-1}), \quad \frac{\psi_4}{12n} 4 \ln m \ln \ln m \sim O(\ln n) o(n^{-4/10}), \\ \frac{\psi_4}{12n} \cdot 4 \ln m \ln(4\pi) &\sim o(n^{-1}). \end{aligned}$$

Как видим, всеми слагаемыми, кроме $\psi_4(12n)^{-1} 4 \ln^2 m$, можно пренебречь, так как они стремятся к нулю при $m, n \rightarrow \infty$.

Таким образом, получим следующее выражение для u^2 :

$$\begin{aligned} u^2 &= 2x + 2 \ln m - \ln(4\pi) - \ln \ln m - \frac{\psi_4}{3n} \ln^2 m + o(n^{-2/10}) \\ &= 2 \ln m \cdot \left(1 + \frac{2x - \ln(4\pi) - \ln \ln m - (\psi_4/(3n)) \ln^2 m}{2 \ln m} \right) + o(n^{-2/10}), \end{aligned}$$

и, значит,

$$u = \sqrt{2 \ln m} \sqrt{\left(1 + \frac{2x - \ln(4\pi) - \ln \ln m - (\psi_4/(3n)) \ln^2 m}{2 \ln m} \right) + \frac{o(n^{-2/10})}{2 \ln m}}. \quad (6)$$

Заметим, что

$$\frac{2x - \ln(4\pi) - \ln \ln m - (\psi_4/(3n)) \ln^2 m}{2 \ln m} = o(1), \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Поэтому второй корень в (6) можно разложить в ряд Тейлора (используем точность разложения до первых двух членов, $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$):

$$u = \sqrt{2 \ln m} \left(1 + \frac{2x - \ln(4\pi) - \ln \ln m - (\psi_4/(3n)) \ln^2 m}{4 \ln m} + \frac{o(n^{-2/10})}{2 \ln m} \right)$$

при $m, n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$u = \frac{x + o(1)}{\sqrt{2 \ln m}} - \frac{\ln(4\pi) + \ln \ln m}{2\sqrt{2 \ln m}} + \sqrt{2 \ln m} \left(1 - \frac{\psi_4}{12n} \ln m \right).$$

Вспоминая, что $u = u_{mn} = \beta_{mn} + (x + o(1))/\alpha_{mn}$, находим выражения для констант β_{mn} и α_{mn} :

$$\beta_{mn} = \sqrt{2 \ln m} - \frac{\psi_4}{12n} \ln m \cdot \sqrt{2 \ln m} - \frac{\ln(4\pi) + \ln \ln m}{2\sqrt{2 \ln m}}, \quad \alpha_{mn} = \sqrt{2 \ln m}.$$

Теорема доказана.

Автор выражает признательность своему научному руководителю доценту А. В. Лебедеву за поставленные задачи и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев А. В. Предельные теоремы для максимумов независимых случайных сумм. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 3, с. 631–634.

2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 752 с.
3. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 391 с.
4. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984, 303 с.
5. Ширяев А. Н. Вероятность-1. М.: МЦНМО, 2007, 551 с.
6. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. М.: Фазис, 1998, 489 с.

Поступила в редакцию
21.X.2009

© 2010 г.

МУРАВЛЁВ А. А.*

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ СО СНОСОМ И ЕГО МАКСИМУМА

Рассматривается задача максимизации математического ожидания функционала $P_t / \max_{0 \leq s \leq T} P_s$ на отрезке $[0, T]$, где $P_t = \exp\{\mu t + \sigma B_t\}$ — геометрическое броуновское движение. Показано, что в зависимости от сноса μ максимум достигается на одном из концов отрезка $[0, T]$.

Ключевые слова и фразы: броуновское движение, модель Блэка–Шоулса, правило «Buy and Hold».

1. Введение. Рассмотрим модель Блэка–Шоулса, полагая, что относительные цены $P = (P_t)_{t \geq 0}$ подчиняются геометрическому броуновскому движению:

$$dP_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) P_t dt + \sigma P_t dB_t, \quad P_0 = 1,$$

на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$, где $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение по мере $\mathbf{P}$, а $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ — естественная фильтрация. Из формулы Ито следует, что

$$P_t = \exp\{\mu t + \sigma B_t\}.$$

В работе [1] рассматривается задача

$$\sup_{\tau \in \mathfrak{M}^T} \mathbf{E} \left(\frac{P_\tau}{\max_{0 \leq s \leq T} P_s} \right), \quad (1)$$

где $\mathfrak{M}^T$ — множество моментов остановки относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, принимающих значения в $[0, T]$. В статье [2] рассматривается аналогичная «детерминистическая» задача исследования на максимум на отрезке $[0, T]$ функции

$$F(t) = \mathbf{E} \left(\frac{P_t}{\max_{0 \leq s \leq T} P_s} \right). \quad (2)$$

Исходя из графиков $F(t)$ при некоторых значениях параметров, в [2] делается предположение о том, что максимум достигается на одном из концов отрезка. Далее нами будет приведено аналитическое доказательство этого факта. В отличие от указанной статьи, для нахождения исследуемой функции $F(t)$ вместо потраекторного интегрирования используются теорема Гирсанова и принцип отражения.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: almurav@gmail.com