Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Муравлёв, Об одном свойстве распределения броуновского движения со сносом и его максимума, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 2, 362–369

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4207>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 03:01:37

2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 752 с.
3. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 391 с.
4. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984, 303 с.
5. Ширяев А. Н. Вероятность-1. М.: МЦНМО, 2007, 551 с.
6. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. М.: Фазис, 1998, 489 с.

Поступила в редакцию
21.X.2009

© 2010 г.

МУРАВЛЁВ А. А.*

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ СО СНОСОМ И ЕГО МАКСИМУМА

Рассматривается задача максимизации математического ожидания функционала $P_t / \max_{0 \leq s \leq T} P_s$ на отрезке $[0, T]$, где $P_t = \exp\{\mu t + \sigma B_t\}$ — геометрическое броуновское движение. Показано, что в зависимости от сноса μ максимум достигается на одном из концов отрезка $[0, T]$.

Ключевые слова и фразы: броуновское движение, модель Блэка–Шоулса, правило «Buy and Hold».

1. Введение. Рассмотрим модель Блэка–Шоулса, полагая, что относительные цены $P = (P_t)_{t \geq 0}$ подчиняются геометрическому броуновскому движению:

$$dP_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) P_t dt + \sigma P_t dB_t, \quad P_0 = 1,$$

на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$, где $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение по мере $\mathbf{P}$, а $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ — естественная фильтрация. Из формулы Ито следует, что

$$P_t = \exp\{\mu t + \sigma B_t\}.$$

В работе [1] рассматривается задача

$$\sup_{\tau \in \mathfrak{M}^T} \mathbf{E} \left(\frac{P_\tau}{\max_{0 \leq s \leq T} P_s} \right), \quad (1)$$

где $\mathfrak{M}^T$ — множество моментов остановки относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, принимающих значения в $[0, T]$. В статье [2] рассматривается аналогичная «детерминистическая» задача исследования на максимум на отрезке $[0, T]$ функции

$$F(t) = \mathbf{E} \left(\frac{P_t}{\max_{0 \leq s \leq T} P_s} \right). \quad (2)$$

Исходя из графиков $F(t)$ при некоторых значениях параметров, в [2] делается предположение о том, что максимум достигается на одном из концов отрезка. Далее нами будет приведено аналитическое доказательство этого факта. В отличие от указанной статьи, для нахождения исследуемой функции $F(t)$ вместо потраекторного интегрирования используются теорема Гирсанова и принцип отражения.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: almurav@gmail.com

2. Вычисление $F(t)$. Рассмотрим процессы

$$X_t = \sigma B_t + \mu t, \quad M_t = \max_{s \leq t} X_s.$$

Легко видеть, что $P_t / \max_{0 \leq s \leq T} P_s = \exp\{-(M_T - X_t)\}$, и поэтому

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-z} \mathbf{P}(M_T - X_t \in dz).$$

Теорема 1. *Плотность распределения случайной величины $M_T - X_t$ имеет вид*

$$\mathbf{P}(M_T - X_t \in dz) = P_\mu(t, T - t, z) dz, \quad z \geq 0,$$

где

$$P_\mu(u, v, z) = 2[f_\mu(u, z)g_\mu(v, z) + f_{-\mu}(v, z)g_{-\mu}(u, z)], \quad (3)$$

$$f_\mu(u, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 u}} e^{-(z+\mu u)^2/(2\sigma^2 u)} + \frac{\mu}{\sigma^2} e^{-2\mu z/\sigma^2} \Phi\left(-\frac{z-\mu u}{\sigma\sqrt{u}}\right),$$

$$g_\mu(v, z) = \Phi\left(\frac{z-\mu v}{\sigma\sqrt{v}}\right) - e^{2\mu z/\sigma^2} \Phi\left(-\frac{z+\mu v}{\sigma\sqrt{v}}\right).$$

Доказательство. Пусть $p(x, y)$ обозначает плотность совместного распределения (X_t, M_T) : $\mathbf{P}(X_t \in dx, M_T \in dy) = p(x, y) dx dy$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_t \in dx, M_T \leq y) &= \mathbf{P}\left(X_t \in dx, \max_{s \leq T} X_s \leq y\right) \\ &= \mathbf{P}\left(X_t \in dx, \max_{s \leq t} X_s \leq y, \max_{t \leq s \leq T} X_s \leq y\right) \\ &= \mathbf{P}\left(X_t \in dx, \max_{s \leq t} X_s \leq y\right) \mathbf{P}\left(\max_{s \leq T-t} X_s \leq y - x\right), \end{aligned}$$

где мы воспользовались независимостью приращений процесса X_t . В [3, гл. VIII, § 2а, лемма 1, с. 935–936] с помощью теоремы Гирсанова и принципа отражения получено соотношение

$$\mathbf{P}\left(\max_{s \leq t} X_s \leq y\right) = \Phi\left(\frac{y - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y/\sigma^2} \Phi\left(\frac{-y - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right). \quad (4)$$

Аналогично доказывается, что

$$\mathbf{P}\left(X_t \leq x, \max_{s \leq t} X_s \leq y\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y/\sigma^2} \Phi\left(\frac{x - 2y - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right). \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_t \in dx, M_T \leq y) &= \mathbf{P}\left(X_t \in dx, \max_{s \leq T} X_s \leq y\right) \\ &= \left[\Phi\left(\frac{(y-x) - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - e^{2\mu(y-x)/\sigma^2} \Phi\left(-\frac{(y-x) + \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right] \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-(x-\mu t)^2/(2\sigma^2 t)} (1 - e^{2(x-y)y/(\sigma^2 t)}) dx. \end{aligned}$$

Дифференцированием по y находим $p(x, y)$. В итоге получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_T - X_t \in dz) &= \frac{d}{dz} \mathbf{P}(M_T - X_t \leq z) dz \\ &= \frac{d}{dz} \int_0^\infty \int_{y-z}^\infty p(x, y) dx dy \cdot dz = \int_0^\infty p(y - z, y) dy \cdot dz. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Для функции $F(t)$ справедливо представление

$$F(t) = S_\mu(t, T - t),$$

где

$$S_\mu(u, v) = \int_0^\infty e^{-z} P_\mu(u, v, z) dz. \quad (6)$$

Из формул (3) и (6) видно, что

$$P_\mu(u, v, z) = P_{-\mu}(v, u, z), \quad S_\mu(u, v) = S_{-\mu}(v, u).$$

Отметим, что в [2] аналогичное выражение для $F(t)$ было получено с помощью по-траекторного интегрирования в терминах дополнительной функции ошибок $\operatorname{erfc}(x)$, связанной с $\Phi(x)$ соотношением

$$\operatorname{erfc}(x) = 2\Phi(-x\sqrt{2}).$$

3. Исследование $S_\mu(u, v)$. Итак, нашей задачей является исследование функции $S_\mu(t, T - t)$ на максимум на отрезке $[0, T]$.

Теорема 2. Функция $S_\mu(t, T - t)$ выпукла вниз на отрезке $[0, T]$ для любого $T > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{A}$ обозначает оператор в частных производных $\mathcal{A} = \partial/\partial u - \partial/\partial v$, тогда

$$\frac{d}{dt} S_\mu(t, T - t) = \mathcal{A} S_\mu(t, T - t), \quad \frac{d^2}{dt^2} S_\mu(t, T - t) = \mathcal{A}^2 S_\mu(t, T - t).$$

Выпуклость функции $S_\mu(t, T - t)$ на отрезке $[0, T]$ для любого $T > 0$ равносильна выполнению условия

$$\mathcal{A}^2 S_\mu(u, v) > 0 \quad \forall u, v > 0.$$

Вторая смешанная производная функции $S_\mu(u, v)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} S_\mu(u, v) = R_\mu(u, v),$$

где

$$R_\mu(u, v) = \frac{\sigma}{2\pi(u+v)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}(u+v)\right\} \times \left[-\frac{\sigma\sqrt{uv}}{\sqrt{u+v}} + \left(\frac{\sigma^2 uv}{u+v} + 1\right) \sqrt{2\pi} \exp\left\{\frac{\sigma^2 uv}{2(u+v)}\right\} \Phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{uv}}{\sqrt{u+v}}\right)\right]. \quad (7)$$

Для любой функции $H(u, v)$, у которой существует вторая смешанная производная, справедливо

$$\int_u^A \int_v^B \frac{\partial^2}{\partial s \partial w} H(s, w) dw ds = H(A, B) - H(u, B) - H(A, v) + H(u, v).$$

Взяв $H(u, v) = \mathcal{A}^2 S_\mu(u, v)$ и устремив A и B к $+\infty$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 S_\mu(u, v) &= \int_u^{+\infty} \int_v^{+\infty} \mathcal{A}^2 R_\mu(s, w) dw ds \\ &+ \lim_{B \rightarrow +\infty} \mathcal{A}^2 S_\mu(u, B) + \lim_{A \rightarrow +\infty} \mathcal{A}^2 S_\mu(A, v) - \lim_{A \rightarrow +\infty} \lim_{B \rightarrow +\infty} \mathcal{A}^2 S_\mu(A, B). \end{aligned} \quad (8)$$

Вычисления показывают, что

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \mathcal{A}^2 S_\mu(u, B) = q_\mu(u),$$

где

$$q_{\mu}(u) = \begin{cases} \frac{d^2}{du^2}[h_{\mu}(u) - h_{-\mu}(u)], & \mu < 0, \\ 0, & \mu \geq 0, \end{cases}$$

а $h_{\mu}(u)$ представляет собой функцию

$$h_{\mu}(u) = \frac{2\mu}{2\mu + \sigma^2} \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{u}}{\sigma}\right) + 2 \frac{\mu + \sigma^2}{2\mu + \sigma^2} \exp\left\{\frac{u}{2}(2\mu + \sigma^2)\right\} \Phi\left(-\frac{\sqrt{u}}{\sigma}(\mu + \sigma^2)\right). \quad (9)$$

Формула (8) переписывается в виде

$$\mathcal{A}^2 S_{\mu}(u, v) = \int_u^{+\infty} \int_v^{+\infty} \mathcal{A}^2 R_{\mu}(s, w) dw ds + q_{\mu}(u) + q_{-\mu}(v) - \lim_{A \rightarrow +\infty} q_{\mu}(A). \quad (10)$$

Для доказательства выпуклости $S_{\mu}(u, v)$ достаточно показать, что (а) функция $R_{\mu}(t, T - t)$ выпукла на любом отрезке $[0, T]$; (б) функция $q_{\mu}(u)$ неотрицательна при $u > 0$; (с) $\lim_{u \rightarrow +\infty} q_{\mu}(u) = 0$.

Действительно, первое утверждение в точности означает, что подынтегральная функция в (10) положительна:

$$\mathcal{A}^2 R_{\mu}(s, w) > 0 \Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} R_{\mu}(t, T - t) \quad \text{для } T = s + w, \quad t = s.$$

Поэтому из первого утверждения следует, что интеграл в (10) положителен, а из второго и третьего утверждения следует, что остальные слагаемые неотрицательны. Доказательство утверждений (а)–(с) будет дано далее в леммах 1 и 2. Теорема 2 доказана.

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 3. Максимум $\mathbf{E}(P_t / \max_{0 \leq s \leq T} P_s)$ на отрезке $[0, T]$ достигается в точке $t = T$ при $\mu > 0$, в точке $t = 0$ при $\mu < 0$, в точках $t = 0$ и $t = T$ при $\mu = 0$. При этом

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E}\left(\frac{P_t}{\max_{0 \leq s \leq T} P_s}\right) = \frac{2|\mu|}{2|\mu| + \sigma^2} \Phi\left(\frac{|\mu|\sqrt{T}}{\sigma}\right) + 2 \frac{|\mu| + \sigma^2}{2|\mu| + \sigma^2} \exp\left\{\frac{T}{2}(2|\mu| + \sigma^2)\right\} \Phi\left(-\frac{\sqrt{T}}{\sigma}(|\mu| + \sigma^2)\right).$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что максимум достигается на одном из концов отрезка $[0, T]$, и нам лишь остается определить, на каком именно. Несложные вычисления показывают, что

$$F(T) = S_{\mu}(T, 0) = h_{\mu}(T), \quad F(0) = S_{\mu}(0, T) = h_{-\mu}(T),$$

где $h_{\mu}(u)$ определена в (9). Для доказательства теоремы необходимо показать, что $h_{\mu}(u) > h_{-\mu}(u)$ при $u > 0$, $\mu > 0$. Так как $h_{\mu}(0) = 1$ для любого μ , то достаточно показать, что $h'_{\mu}(u) > h'_{-\mu}(u)$ при $u > 0$, $\mu > 0$. Дифференцированием получаем

$$h'_{\mu}(u) = (\mu + \sigma^2) \exp\left\{\frac{u}{2}(2\mu + \sigma^2)\right\} \Phi\left(-\frac{\sqrt{u}}{\sigma}(\mu + \sigma^2)\right) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left\{-\frac{\mu^2 u}{2\sigma^2}\right\},$$

поэтому неравенство $h'_{\mu}(u) > h'_{-\mu}(u)$ эквивалентно неравенству

$$(\sigma^2 + \mu) \exp\left\{\frac{u}{2\sigma^2}(\sigma^2 + \mu)^2\right\} \Phi\left(-\frac{\sqrt{u}}{\sigma}(\sigma^2 + \mu)\right)$$

$$> (\sigma^2 - \mu) \exp \left\{ \frac{u}{2\sigma^2} (\sigma^2 - \mu)^2 \right\} \Phi \left(-\frac{\sqrt{u}}{\sigma} (\sigma^2 - \mu) \right). \quad (11)$$

Если $\mu \geq \sigma^2$, то (11) заведомо выполнено. В случае $0 < \mu < \sigma^2$ нам понадобится следующая формула (см. [4, с. 329, 3.362]):

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t/a^2}} dt = 2\sqrt{\pi} a e^{a^2} \Phi(-a\sqrt{2}), \quad (12)$$

справедливая для любого $a > 0$. После использования (12) справедливость неравенства (11) становится очевидной:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+2\sigma^2 t/(u(\sigma^2 + \mu)^2)}} dt > \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+2\sigma^2 t/(u(\sigma^2 - \mu)^2)}} dt.$$

Теорема 3 доказана.

4. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Функция $R_\mu(t, T-t)$ выпукла вниз на отрезке $[0, T]$ для любого $T > 0$.

Доказательство. Подставляя $u = t$ и $v = T-t$ в формулу (7), получаем

$$R_\mu(t, T-t) = \frac{\sigma}{2\pi T^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\mu^2}{2\sigma^2} T \right\} \left[-\frac{\sigma \sqrt{t(T-t)}}{\sqrt{T}} + \left(\frac{\sigma^2 t(T-t)}{T} + 1 \right) \sqrt{2\pi} \exp \left\{ \frac{\sigma^2 t(T-t)}{2T} \right\} \Phi \left(-\frac{\sigma \sqrt{t(T-t)}}{\sqrt{T}} \right) \right].$$

Это равенство можно переписать в более компактном виде:

$$R(t, T-t) = \frac{\sigma}{2\pi T^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\mu^2}{2\sigma^2} T \right\} Q(x(t)),$$

где

$$Q(x) = -x + (x^2 + 1) \sqrt{2\pi} e^{x^2/2} \Phi(-x), \quad x(t) = \frac{\sigma \sqrt{t(T-t)}}{\sqrt{T}}.$$

Достаточно доказать выпуклость $Q(x(t))$, т.е. показать, что $d^2 Q(x(t))/dt^2 > 0$. Вторая производная $Q(x(t))$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} Q(x(t)) &= \left[(x^4 + 6x^2 + 3) \sqrt{2\pi} e^{x^2/2} \Phi(-x) - x(x^2 + 5) \right] \frac{\sigma^2}{2Tx^2} (y^2 - x^2) \\ &\quad - \left[(x^2 + 3) x \sqrt{2\pi} e^{x^2/2} \Phi(-x) - (x^2 + 2) \right] \frac{\sigma^2}{2Tx^3} (x^2 + y^2), \end{aligned}$$

где $x = x(t)$ определено выше, а $y = y(t)$ определяется как

$$y(t) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2T} (t^2 + (T-t)^2)}.$$

Поэтому выпуклость $Q(x(t))$ равносильна

$$\begin{aligned} &\left[(x^4 + 6x^2 + 3) x \sqrt{2\pi} e^{x^2/2} \Phi(-x) - x^2(x^2 + 5) \right] \left(1 - \frac{x^2}{y^2} \right) \\ &\quad - \left[(x^2 + 3) x \sqrt{2\pi} e^{x^2/2} \Phi(-x) - (x^2 + 2) \right] \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right) > 0, \end{aligned}$$

где $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены выше. Заметим, что $0 \leq x^2(t)/y^2(t) \leq 1$. Поэтому для доказательства выпуклости $Q(x(t))$ достаточно доказать неравенство

$$\begin{aligned} &\left[(x^4 + 6x^2 + 3) x \sqrt{2\pi} e^{x^2/2} \Phi(-x) - x^2(x^2 + 5) \right] (1 - \theta) \\ &\quad - \left[(x^2 + 3) x \sqrt{2\pi} e^{x^2/2} \Phi(-x) - (x^2 + 2) \right] (1 + \theta) > 0 \end{aligned} \quad (13)$$

для $x > 0$, $0 \leq \theta \leq 1$. Очевидно, что для выполнения неравенства (13) при $x > 0$ для всех θ из $[0, 1]$ достаточно его справедливости для $\theta = 0$ и $\theta = 1$ (так как в левой части стоит линейная функция по θ):

$$(x^4 + 5x^2)x\sqrt{2\pi}e^{x^2/2}\Phi(-x) > x^4 + 4x^2 - 2, \quad (14)$$

$$(x^2 + 3)x\sqrt{2\pi}e^{x^2/2}\Phi(-x) < x^2 + 2. \quad (15)$$

Докажем эквивалентные (14)–(15) неравенства:

$$a(x) = \Phi(-x) - \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \frac{x^4 + 4x^2 - 2}{x^4 + 5x^2} > 0,$$

$$b(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} - \Phi(-x) > 0.$$

Так как

$$a'(x) = -\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{30}{x^4(x^2 + 5)^2} < 0, \quad b'(x) = -\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{6}{x^2(x^2 + 3)^2} < 0,$$

то функции $a(x)$ и $b(x)$ являются убывающими функциями, предел которых в $+\infty$ равен нулю. Поэтому эти функции положительны при $x > 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Функция $q_\mu(u)$ неотрицательна на $(0, +\infty)$ и $\lim_{u \rightarrow +\infty} q_\mu(u) = 0$.

Доказательство. В случае $\mu \geq 0$ утверждение леммы очевидно. Поэтому далее будем считать, что $\mu < 0$. Дифференцированием получаем

$$\begin{aligned} h''_\mu(u) &= \frac{1}{2}(\mu + \sigma^2)(2\mu + \sigma^2) \exp\left\{\frac{u}{2}(2\mu + \sigma^2)\right\} \Phi\left(-\frac{\sqrt{u}}{\sigma}(\mu + \sigma^2)\right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left\{-\frac{\mu^2 u}{2\sigma^2}\right\} \left[\frac{1}{u} - (2\mu + \sigma^2)\right]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\lim_{u \rightarrow +\infty} h''_\mu(u) = 0$ для любого μ , а значит, при $\mu < 0$ выполняется $\lim_{u \rightarrow +\infty} q_\mu(u) = 0$. Условие $q_\mu(u) > 0$ теперь можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \text{LS} &:= (\sigma^2 + 2\mu) \left[2\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{u}{2\sigma^2}} (\sigma^2 + \mu) \exp\left\{\frac{u}{2\sigma^2}(\sigma^2 + \mu)^2\right\} \right. \\ &\quad \left. \times \Phi\left(-\frac{\sqrt{u}}{\sigma}(\sigma^2 + \mu)\right) - 1 \right] \\ &> (\sigma^2 - 2\mu) \left[2\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{u}{2\sigma^2}} (\sigma^2 - \mu) \exp\left\{\frac{u}{2\sigma^2}(\sigma^2 - \mu)^2\right\} \right. \\ &\quad \left. \times \Phi\left(-\frac{\sqrt{u}}{\sigma}(\sigma^2 - \mu)\right) - 1 \right] =: \text{RS} \end{aligned} \quad (16)$$

для любого $u > 0$ при $\mu < 0$. Так как $\mu < 0$, то формула (12) применима к правой части неравенства (16):

$$\text{RS} = (\sigma^2 - 2\mu) \left[\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 + 2t\sigma^2/(u(\sigma^2 - \mu)^2)}} dt - 1 \right] < 0.$$

Заметим, что при $\mu \leq -\sigma^2$ левая часть неравенства (16) больше нуля, и поэтому неравенство выполнено. В случае $\mu > -\sigma^2$ применим и к левой части (16) формулу (12):

$$\text{LS} = (\sigma^2 + 2\mu) \left[\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 + 2t\sigma^2/(u(\sigma^2 + \mu)^2)}} dt - 1 \right].$$

Из предыдущего равенства видно, что если $-\sigma^2 < \mu \leq -\sigma^2/2$, то левая часть (16) неотрицательна и неравенство справедливо. Итак, остается показать, что при $-\sigma^2/2 < \mu < 0$

$$(\sigma^2 - 2\mu) \left[\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 + 2t\sigma^2/(u(\sigma^2 - \mu)^2)}} dt - 1 \right] < (\sigma^2 + 2\mu) \left[\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 + 2t\sigma^2/(u(\sigma^2 + \mu)^2)}} dt - 1 \right].$$

Для этого достаточно показать, что

$$(\sigma^2 - 2\mu) \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 2t\sigma^2/(u(\sigma^2 - \mu)^2)}} - 1 \right] < (\sigma^2 + 2\mu) \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 2t\sigma^2/(u(\sigma^2 + \mu)^2)}} - 1 \right]$$

для любого $t > 0$ при $-\sigma^2/2 < \mu < 0$. Делая замену $\alpha = \mu/\sigma^2$, $s = 2t/(\sigma^2 u)$, получаем эквивалентное неравенство:

$$c_\alpha(s) = (1 + 2\alpha) \left[\frac{1}{\sqrt{1 + s/(1 + \alpha)^2}} - 1 \right] - (1 - 2\alpha) \left[\frac{1}{\sqrt{1 + s/(1 - \alpha)^2}} - 1 \right] > 0,$$

которое должно быть выполнено для любого $s > 0$ при $-1/2 < \alpha < 0$. Так как $c_\alpha(0) = 0$, то достаточно показать, что

$$c'_\alpha(s) > 0.$$

После преобразований получаем, что $c'_\alpha(s) > 0$ эквивалентно неравенству

$$(1 + 2\alpha)^2 \left[(1 - \alpha)^4 + 3s(1 - \alpha)^2 + 3s^2 + \frac{s^3}{(1 - \alpha)^2} \right] < (1 - 2\alpha)^2 \left[(1 + \alpha)^4 + 3s(1 + \alpha)^2 + 3s^2 + \frac{s^3}{(1 + \alpha)^2} \right],$$

которое равносильно

$$-\frac{12\alpha(1 + 2\alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^2} s^3 - 24\alpha s^2 - 12\alpha(1 - 2\alpha^2)s - 8\alpha^3(1 - 3\alpha^2) > 0$$

для любого $s > 0$ при $-1/2 < \alpha < 0$. Так как коэффициенты при всех степенях s положительны, то это неравенство выполнено. Лемма 2 доказана.

5. Замечания. «Детерминистические» задачи, как правило, являются более простыми, чем соответствующие задачи оптимальной остановки. Данный случай не стал исключением. Техника, использованная нами для решения задачи (2), гораздо проще, чем в [1], и не может быть использована для задачи (1).

В заключение приведем очевидное обобщение теоремы 3.

Рассмотрим задачу нахождения

$$\sup_\theta \mathbf{E} \left(\frac{P_\theta}{\max_{0 \leq s \leq T} P_s} \right),$$

где супремум берется по случайным моментам θ со значениями в $[0, T]$, независимым с броуновским движением B .

Теорема 4. Максимум $\mathbf{E}(P_\theta / \max_{0 \leq s \leq T} P_s)$ достигается на моментах θ таких, что

$$\mathbf{P}(\theta = T) = 1 \text{ при } \mu > 0, \quad \mathbf{P}(\theta = 0) = 1 \text{ при } \mu < 0,$$

$$\mathbf{P}(\theta = 0 \text{ или } \theta = T) = 1 \text{ при } \mu = 0.$$

При этом

$$\begin{aligned} \sup_{\theta} \mathbf{E} \left(\frac{P_\theta}{\max_{0 \leq s \leq T} P_s} \right) &= \frac{2|\mu|}{2|\mu| + \sigma^2} \Phi \left(\frac{|\mu|\sqrt{T}}{\sigma} \right) \\ &+ 2 \frac{|\mu| + \sigma^2}{2|\mu| + \sigma^2} \exp \left\{ \frac{T}{2} (2|\mu| + \sigma^2) \right\} \Phi \left(-\frac{\sqrt{T}}{\sigma} (|\mu| + \sigma^2) \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на следующем факте:

$$\mathbf{E} \left(\frac{P_\theta}{\max_{0 \leq s \leq T} P_s} \right) = \int_0^T \mathbf{E} \left(\frac{P_t}{\max_{0 \leq s \leq T} P_s} \right) \mathbf{P}_\theta(dt),$$

где $\mathbf{P}_\theta$ — распределение θ . Остается воспользоваться теоремой 3.

Автор выражает благодарность А. Н. Ширяеву за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shiryayev A. N., Xu Z., Zhou X. Y. Thou shalt buy and hold. — Quant. Finance, 2008, v. 8, № 8, p. 765–776.
2. Majumdar S. N., Bouchard J.-P. Optimal time to sell a stock in the Black–Scholes model: comment on ‘Thou Shalt Buy and Hold’, by A. N. Shiryayev, Z. Xu and X. Y. Zhou. — Quant. Finance, 2008, v. 8, № 8, p. 753–760.
3. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики, т. 1, 2. М.: ФА-ЗИС, 1996, 1017 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963, 1108 с.

Поступила в редакцию
21.X.2009

© 2010 г.

НОВИКОВ П. А.*

ЛОКАЛЬНО НАИБОЛЕЕ МОЩНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассматривается задача проверки гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1: \theta > \theta_0$ о параметре θ марковского процесса с дискретным временем. Строится локально наиболее мощный последовательный критерий, т.е. последовательный критерий, максимизирующий производную функции мощности в $\theta = \theta_0$ в классе последовательных критериев уровня α со средним объемом выборки, не превосходящим $\mathcal{N}$. В качестве примера строится локально наиболее мощный последовательный критерий для процесса авторегрессии AR(1) с неизвестным параметром сдвига.

* Казанский государственный университет, НОЦ «Экстремальные задачи комплексного анализа и математической физики», ул. Кремлевская, 18, 420008 Казань, Россия; e-mail: pnovi@mail.ru