Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Новиков, Локально наиболее мощные последовательные критерии для марковских процессов с дискретным временем, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 2, 369–372

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4208>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:38:25

Теорема 4. Максимум $\mathbf{E}(P_\theta / \max_{0 \leq s \leq T} P_s)$ достигается на моментах θ таких, что

$$\mathbf{P}(\theta = T) = 1 \text{ при } \mu > 0, \quad \mathbf{P}(\theta = 0) = 1 \text{ при } \mu < 0,$$

$$\mathbf{P}(\theta = 0 \text{ или } \theta = T) = 1 \text{ при } \mu = 0.$$

При этом

$$\begin{aligned} \sup_{\theta} \mathbf{E} \left(\frac{P_\theta}{\max_{0 \leq s \leq T} P_s} \right) &= \frac{2|\mu|}{2|\mu| + \sigma^2} \Phi \left(\frac{|\mu|\sqrt{T}}{\sigma} \right) \\ &+ 2 \frac{|\mu| + \sigma^2}{2|\mu| + \sigma^2} \exp \left\{ \frac{T}{2} (2|\mu| + \sigma^2) \right\} \Phi \left(-\frac{\sqrt{T}}{\sigma} (|\mu| + \sigma^2) \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на следующем факте:

$$\mathbf{E} \left(\frac{P_\theta}{\max_{0 \leq s \leq T} P_s} \right) = \int_0^T \mathbf{E} \left(\frac{P_t}{\max_{0 \leq s \leq T} P_s} \right) \mathbf{P}_\theta(dt),$$

где $\mathbf{P}_\theta$ — распределение θ . Остается воспользоваться теоремой 3.

Автор выражает благодарность А. Н. Ширяеву за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shiryayev A. N., Xu Z., Zhou X. Y. Thou shalt buy and hold. — Quant. Finance, 2008, v. 8, № 8, p. 765–776.
2. Majumdar S. N., Bouchard J.-P. Optimal time to sell a stock in the Black–Scholes model: comment on ‘Thou Shalt Buy and Hold’, by A. N. Shiryayev, Z. Xu and X. Y. Zhou. — Quant. Finance, 2008, v. 8, № 8, p. 753–760.
3. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики, т. 1, 2. М.: ФА-ЗИС, 1996, 1017 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963, 1108 с.

Поступила в редакцию
21.X.2009

© 2010 г.

НОВИКОВ П. А.*

ЛОКАЛЬНО НАИБОЛЕЕ МОЩНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассматривается задача проверки гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1: \theta > \theta_0$ о параметре θ марковского процесса с дискретным временем. Строится локально наиболее мощный последовательный критерий, т.е. последовательный критерий, максимизирующий производную функции мощности в $\theta = \theta_0$ в классе последовательных критериев уровня α со средним объемом выборки, не превосходящим $\mathcal{N}$. В качестве примера строится локально наиболее мощный последовательный критерий для процесса авторегрессии AR(1) с неизвестным параметром сдвига.

* Казанский государственный университет, НОЦ «Экстремальные задачи комплексного анализа и математической физики», ул. Кремлевская, 18, 420008 Казань, Россия; e-mail: pnovi@mail.ru

Ключевые слова и фразы: последовательный анализ, последовательная проверка гипотез, случайный процесс с дискретным временем, оптимальный последовательный критерий, локально наиболее мощный критерий, марковский процесс, процесс авторегрессии, зависимые наблюдения.

1. Введение. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — случайный процесс с дискретным временем, распределение которого, P_θ , зависит от неизвестного параметра $\theta \in \Theta$, где Θ — открытое подмножество в $\mathbf{R}$. Рассматривается задача проверки простой гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$ при сложной альтернативе $H_1: \theta > \theta_0$, где $\theta_0 \in \Theta$ — некоторое фиксированное значение параметра.

Основная цель работы — построение локально наиболее мощных последовательных критериев для марковских процессов с дискретным временем, т.е. последовательных критериев, максимизирующих производную функцию мощности в $\theta = \theta_0$, $\dot{\beta}_0(\psi, \phi)$, в классе последовательных критериев уровня α со средним объемом выборки, не превосходящим $\mathcal{N}$, где $\alpha \in [0, 1)$ и $\mathcal{N} \geq 1$ — некоторые ограничения (см. [1], [3]).

Для построения указанных критериев используется методология, разработанная в [2].

2. Локально наиболее мощный критерий. Пусть (ψ, ϕ) — последовательный критерий проверки гипотез с правилом останова $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots)$ и решающим правилом $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots)$, и пусть τ_ψ — момент останова. Положим

$$s_n^\psi = (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{n-1})\psi_n, \quad t_n^\psi = (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

($s_1^\psi \equiv \psi_1$ и $t_1^\psi \equiv 1$ по определению).

Предположим, что при P_θ для любого $\theta \in \Theta$ вектор $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ имеет функцию «плотности» $f_\theta^n = f_\theta^n(x_1, \dots, x_n)$ (производную Радона–Никодима) относительно произведения мер μ^n .

Введем следующие условия регулярности.

С1. Для любого $n \geq 1$ существует такая интегрируемая (относительно меры μ^n) функция $\dot{f}_0^n$, что при $\theta \rightarrow \theta_0$

$$\int |f_\theta^n - f_{\theta_0}^n - (\theta - \theta_0)\dot{f}_0^n| d\mu^n = o(\theta - \theta_0).$$

С2. Функция мощности любого критерия (ψ, ϕ) с $E_0\tau_\psi < \infty$ дифференцируема в $\theta = \theta_0$ и

$$\dot{\beta}_0(\psi, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{n-1})\psi_n \phi_n \dot{f}_0^n d\mu^n.$$

С3. Существуют $\gamma > 0$ и $N_0 > 0$ такие, что $I(\theta_0) = E_0(\dot{f}_0^n / f_0^n)^2 \leq \gamma^n$ для всех $n \geq N_0$.

В связи с введенными условиями регулярности нам потребуются дополнительные обозначения (см. [2]). Положим

$$l_n = \min\{0, bf_0^n - \dot{f}_0^n\}.$$

Далее, положим $V_N^N = l_N$, а V_n^N определим рекуррентно следующим образом:

$$V_n^N = \min\{l_n, cf_0^n + R_n^N\}, \quad n = N-1, N-2, \dots, 1,$$

где $R_n^N = \int V_{n+1}^N(x_1, \dots, x_{n+1}) d\mu(x_{n+1})$. По лемме 4.1 [2] существует предел $V_n = \lim_{N \rightarrow \infty} V_n^N$, при этом

$$V_n = \min\{l_n, cf_0^n + R_n\},$$

где $R_n = \int V_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) d\mu(x_{n+1})$. Пусть

$$L(\psi; b, c) = \sum_{n=1}^{\infty} \int s_n^{\psi}(cnf_0^n + l_n) d\mu^n.$$

Рассмотрим класс усеченных правил остановки $\mathcal{F}^N = \{\psi: \text{существует } N \text{ такое, что } \psi_N = 1\}$ и класс правил остановки $\mathcal{F}\{\psi: E_0\tau_{\psi} < \infty, L(\psi; b, c) < \infty \text{ для любых } b \in \mathbf{R}, c > 0\}$. Назовем критерий (ψ, ϕ) *регулярным*, если выполняется условие

$$\int t_n^{\psi}(V_n - l_n) d\mu^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Сформулируем теорему, доказанную в [2] (теорема 5.1), которая потребуется для построения локально наиболее мощного критерия для марковских процессов.

Теорема 1. *Предположим, что выполняются условия С1, С2 и С3. Пусть $c > 0$ и $b > 0$ — любые вещественные числа. Пусть правило остановки ψ таково, что*

$$I_{\{l_n < cnf_0^n + R_n\}}(x^{(n)}) \leq \psi_n(x^{(n)}) \leq I_{\{l_n \leq cnf_0^n + R_n\}}(x^{(n)}) \quad (1)$$

μ^n -почти всюду на $T_n^{\psi} = \{(x_1, \dots, x_n): t_n^{\psi}(x_1, \dots, x_n) > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \dots$, и пусть решающее правило ϕ таково, что

$$I_{\{bf_0^n < f_n\}}(x^{(n)}) \leq \phi_n(x^{(n)}) \leq I_{\{bf_0^n \leq f_n\}}(x^{(n)}) \quad (2)$$

μ^n -почти всюду на $S_n^{\psi} = \{(x_1, \dots, x_n): s_n^{\psi}(x_1, \dots, x_n) > 0\}$ для каждого $n = 1, 2, \dots$. Пусть (ψ, ϕ) — регулярный критерий.

Тогда последовательный критерий (ψ, ϕ) является наиболее мощным критерием проверки гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_1: \theta > \theta_0$ в классе всех критериев (ψ', ϕ') с $\psi' \in \mathcal{G}$ в том смысле, что

$$\dot{\beta}_0(\psi, \phi) \geq \dot{\beta}_0(\psi', \phi'), \quad (3)$$

если

$$\alpha(\psi', \phi') \leq \alpha(\psi, \phi) \quad \text{и} \quad E_0\tau'_{\psi} \leq E_0\tau_{\psi}. \quad (4)$$

Неравенство (3) является строгим, если строгим является хотя бы одно из неравенств (4).

Если во всех неравенствах в (3) и (4) достигается равенство, то ψ' также удовлетворяет (1) μ^n -почти всюду на $T_n^{\psi'}$ для каждого $n = 1, 2, \dots$ (с ψ'_n вместо ψ_n) и ϕ' удовлетворяет (2) (с ϕ'_n вместо ϕ_n) μ^n -почти всюду на $S_n^{\psi'}$ для каждого $n = 1, 2, \dots$.

3. Приложение к тестированию марковских процессов. Пусть $f_{\theta}(x_k | x_{k-1})$ — условная «плотность» X_k при X_{k-1} , $k = 2, 3, \dots$, $f_{\theta}(x_1)$ — начальная «плотность», f_{θ}^n — совместная плотность $X^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$. Для всех $n = 1, 2, \dots$ положим

$$z_n = \frac{\dot{f}_0^n}{f_0^n}, \quad \text{если } f_0^n > 0, \quad z_n = 0, \quad \text{если } f_0^n = 0,$$

и пусть $g(z) = \min\{0, z\}$, $z \in \mathbf{R}$. Введем семейство функций $\{v^n = v^n(z, x, c)\}$:

$$\begin{aligned} v^0(z, x, c) &= g(z), \\ v^n(z, x, c) &= \min \left\{ g(z), c + \int v^{n-1} \left(z + \frac{\dot{f}_0(x_k | x)}{f_0(x_k | x)}, x_k, c \right) f_0(x_k | x) d\mu(x_k) \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$n = 1, 2, \dots$, для которых существует предел при $n \rightarrow \infty$, равный

$$v(z, x, c) = \min\{g(z), c + r(z, x, c)\},$$

где

$$r(z, x, c) = \int v \left(z + \frac{\dot{f}_0(x_k | x)}{f_0(x_k | x)}, x_k, c \right) f_0(x_k | x) d\mu(x_k).$$

Теорема 2. Утверждение теоремы 1 справедливо при замене неравенств (1) неравенствами

$$I_{\{g(b-z_n) < c+r(b-z_n, x_n, c)\}}(x^{(n)}) \leq \psi_n(x^{(n)}) \leq I_{\{g(b-z_n) \leq c+r(b-z_n, x_n, c)\}}(x^{(n)}),$$

а неравенств (2) неравенствами

$$I_{\{z_n > b\}}(x^{(n)}) \leq \phi_n(x^{(n)}) \leq I_{\{z_n \geq b\}}(x^{(n)}).$$

Можно показать, что если $c + r(z, x_n, c) \leq 0$, то в каждой из областей $\{z \leq 0\}$ и $\{z \geq 0\}$ существует единственное решение, соответственно $A = A(c) \leq 0$ и $B = B(c) \geq 0$, уравнения $c + r(z, x_n, c) = g(z)$ относительно c . Обозначим в этом случае $\Delta = \Delta(c) = (A(c), B(c))$ и $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(c) = [A(c), B(c)]$ (если $c + r(z, x_n, c) > 0$, то $\Delta(c) = \bar{\Delta}(c) = \emptyset$). Тогда легко видеть, что (2) эквивалентно

$$I_{\{b-z_n \in \Delta(c)\}}(x^{(n)}) \leq 1 - \psi_n(x^{(n)}) < I_{\{b-z_n \in \bar{\Delta}(c)\}}(x^{(n)}).$$

4. Процесс авторегрессии AR(1) с неизвестным параметром сдвига.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — марковский процесс, определяемый соотношением $X_{n+1} - \theta = a(X_n - \theta) + \varepsilon_n$ для $n = 1, 2, \dots$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией плотности $f(x)$.

Для такого процесса $f_\theta(x_k | x_{k-1}) = f(x_k - ax_{k-1} - \theta(1-a))$, $k = 2, 3, \dots$. Пусть $f_\theta = h(x - \theta)$ — начальная плотность X_1 относительно λ при $\theta = \theta_0$.

Введем семейство функций $\{v^n = v^n(z, c)\}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} v^0(z, c) &= g(z) = \min\{0, z\}, \\ v^n(z, c) &= \min\left\{g(z), c + \int v^{n-1}\left(z + (a-1)\frac{\dot{f}_0(y)}{f_0(y)}\right) d\mu(y)\right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

для которых существует предел при $n \rightarrow \infty$, равный $v(z, c) = \min\{g(z), c + r(z, c)\}$, где $r(z, c) = \int v(z + (a-1)f(y)/f(y), c)f(y) d\lambda(y)$.

Теорема 3. Утверждение теоремы 1 справедливо при замене неравенств (1) неравенствами

$$I_{\{g(b-z_n) < c+r(b-z_n, c)\}}(x^{(n)}) \leq \psi_n(x^{(n)}) \leq I_{\{g(b-z_n) \leq c+r(b-z_n, c)\}}(x^{(n)}),$$

а неравенств (2) неравенствами

$$I_{\{z_n > b\}}(x^{(n)}) \leq \phi_n(x^{(n)}) \leq I_{\{z_n \geq b\}}(x^{(n)}).$$

Можно показать, что если $c + r(z, c) \leq 0$, то в каждой из областей $\{z \leq 0\}$ и $\{z \geq 0\}$ существует единственное решение, соответственно $A = A(c) \leq 0$ и $B = B(c) \geq 0$, уравнения $c + r(z, c) = g(z)$ относительно c . Обозначим в этом случае $\Delta = \Delta(c) = (A(c), B(c))$ и $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(c) = [A(c), B(c)]$ (если $c + r(z, x_n) > 0$, то $\Delta(c) = \bar{\Delta}(c) = \emptyset$). Тогда легко видеть, что (3) эквивалентно

$$I_{\{b-z_n \in \Delta(c)\}}(x^{(n)}) \leq 1 - \psi_n(x^{(n)}) < I_{\{b-z_n \in \bar{\Delta}(c)\}}(x^{(n)}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berk R. H. Locally most powerful sequential tests. — Ann. Statist., 1975, v. 3, p. 373–381.
2. Novikov A., Novikov P. Locally most powerful sequential tests of a simple hypothesis vs. one-sided alternatives. — J. Statist. Plan. Inference, 2010, v. 140, № 3, p. 750–765.
3. Roters M. Locally most powerful sequential tests for processes of the exponential class with stationary and independent increments. — Metrika, 1992, v. 39, № 3–4, p. 177–183.

Поступила в редакцию
5.VIII.2009