Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Асимптотика на бесконечности отрицательно биномиально безгранично делимых распределений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 2, 373–382

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4209>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:35:00

© 2010 г.

ЯКЫМИВ А. Л.*

**АСИМПТОТИКА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНО
БИНОМИАЛЬНО БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ¹⁾**

Согласно С. Янкович (Publ. Inst. Math. (Beograd), 1993, v. 54, p. 126–134), случайная величина Y имеет отрицательно биномиально безгранично делимое распределение тогда и только тогда, когда ее характеристическая функция $\varphi(t)$ допускает представление

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1 - \ln \psi(t))^r}$$

для некоторых $r > 0$ и безгранично делимой характеристической функции $\psi(t)$. В настоящей статье для некоторого класса случайных величин Y с отрицательно биномиально безгранично делимым распределением получена асимптотика $\mathbf{P}\{Y > t\}$ при $t \rightarrow \infty$, выраженная в терминах спектральной меры представления Леви безгранично делимой характеристической функции $\psi(t)$.

Ключевые слова и фразы: отрицательно биномиально безгранично делимое распределение, характеристическая функция, спектральная мера Леви, преобразование Лапласа, слабо осциллирующие функции, мажорируемо меняющиеся функции, слабая эквивалентность функций на бесконечности.

1. Введение. Предположим, что случайная величина $\nu_p^{(r)}$ имеет отрицательное биномиальное распределение:

$$\mathbf{P}\{\nu_p^{(r)} = n\} = C_{-r}^n p^r (-q)^n,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, $p > 0$, $p + q = 1$, $r > 0$, где

$$C_{-r}^n = \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-n+1)}{n!}$$

при $n \geq 1$ и $C_{-r}^0 = 1$. Согласно [7], случайная величина Y имеет отрицательно биномиально безгранично делимое распределение, если для каждого $p \in (0, 1)$ существует последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_p^{(1)}, X_p^{(2)}, \dots$, не зависящих от $\nu_p^{(r)}$, таких, что

$$Y \stackrel{d}{=} \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\nu_p^{(r)}} X_p^{(j)}$$

(последний предел понимается в слабом смысле). Как показано в [7], случайная величина Y имеет отрицательно биномиально безгранично делимое распределение тогда и только тогда, когда ее характеристическая функция $\varphi(t)$ представима в виде

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1 - \ln \psi(t))^r}, \quad t \in \mathbf{R}^1, \quad (1)$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: arsen@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00563) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-4129.2006.1).

где $\psi(t)$ является характеристической функцией некоторой безгранично делимой случайной величины Z , т.е.

$$\psi(t) \equiv \mathbf{E} e^{itZ} = \exp \left(i\alpha t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) G(dx) \right), \quad (2)$$

где $G(dx)$ — ее спектральная мера Леви [8, раздел 2.2, соотношение (2.12)] на $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (возможно, неограниченная в окрестности нуля), причем конечны интегралы

$$\int_{-1}^1 x^2 G(dx), \quad \int_{-\infty}^{-1} G(dx), \quad \int_1^{\infty} G(dx),$$

$\sigma \geq 0$, α — некоторое действительное число, $t \in (-\infty, \infty)$.

Отметим два важных частных случая (1). Если $r = 1$, то мы получаем известный случай геометрически безгранично делимого распределения (см. статью [9] и книгу [10]). Если r — произвольное натуральное число, то мы приходим к случаю Паскаля безгранично делимого распределения [7].

Мы изучаем асимптотику на бесконечности $\mathbf{P}\{Y > t\}$, выраженную в терминах спектральной функции

$$q(t) = \int_t^{\infty} G(dx), \quad t > 0. \quad (3)$$

В случае безгранично делимых распределений аналогичная задача была поставлена и частично решена в 1961 г. В.М. Золотаревым в [6]. К настоящему моменту имеется большое число публикаций в этом направлении (см. ссылки в статьях [1], [2], [12] и книгах [11] и [15]). В частности, в [15] представлены некоторые результаты относительно вероятностей больших отклонений случайной величины Z , полученные при помощи тауберовых теорем. При проверке соответствующих тауберовых условий в [15] существенно использовался тот факт, что α является параметром сдвига для случайной величины Z , слагаемое $\sigma^2 t^2/2$ дает ее нормальную компоненту, а разложение меры $G(dx)$ в виде суммы двух мер дает свертку соответствующих распределений. Однако, как нетрудно заметить, ни то, ни другое, ни третье не справедливо для случайной величины Y . Поэтому в данном случае не удастся свести задачу к исследованию асимптотики на бесконечности неотрицательной случайной величины с параметрами $\alpha = \sigma = 0$, как это было сделано в [15].

В настоящей статье используется другой подход, основанный на рассмотрении двусторонних преобразований Лапласа меры $G(dx)$ и распределения случайной величины Y в предположении, что они существуют на некотором непустом интервале действительной прямой. Далее проводится асимптотический анализ соотношений для n -й производной этих преобразований с последующим применением тауберовой теоремы. В частности, показано, что если $q(t+u)/q(t) \rightarrow 1$ и $u = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}\{Y > t\} = (1 + o(1))rq(t).$$

2. Основной результат.

О п р е д е л е н и е 1 [15, определение 1.6]. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ заданы и положительны при $t \geq a \geq 0$. Мы будем говорить, что $f(t)$ и $g(t)$ слабо асимптотически эквивалентны при $t \rightarrow \infty$ и писать

$$f(t) \overset{w}{\sim} g(t),$$

если для произвольного ε можно указать такое $\delta_0 \in (0, 1)$, что для любого $\delta \in (0, \delta_0)$ найдется $t_0 > 0$ такое, что при $t \geq t_0$ выполнены неравенства

$$(1 - \varepsilon)g(t(1 + \delta)) \leq f(t) \leq (1 + \varepsilon)g(t(1 - \delta)).$$

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. Предположим, что для некоторого $a > 0$ при $\lambda \in (0, a)$ выполнено

$$-\infty < \int_{\mathbf{R}^1} (e^{-\lambda x} - 1) G(dx) < \infty, \quad (4)$$

где $G(dx)$ — спектральная мера Леви характеристической функции $\psi(t)$ (см. (2)). Пусть «хвост» спектральной меры $G(dx)$ — функция $q(t)$, определяемая соотношением (3) — мажорируемо меняется на бесконечности [13, приложение П.3], т.е.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{q(t)}{q(2t)} < \infty. \quad (5)$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{Y > t\} \stackrel{w}{\sim} r q(t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Следствие 1. Пусть выполнено (4) и функция $q(t)$ слабо осциллирует на бесконечности [15, раздел 1.4], т.е. $q(t+u)/q(t) \rightarrow 1$ и $u = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{Y > t\} = (1 + o(1)) r q(t). \quad (6)$$

Отметим, в частности, что всякая правильно меняющаяся функция $q(t)$ является слабо осциллирующей, т.е. для нее выполнено (6), если имеет место (4). В книге автора [15, раздел 1.4] приведен широкий класс примеров слабо осциллирующих функций, не являющихся правильно меняющимися. В работах [3], [4] слабо осциллирующие функции изучались в связи с другими теоретико-вероятностными приложениями. В [4] содержится подробная библиография по этому поводу.

Пусть $f(t)$ — положительная функция, определенная при $t \in \mathbf{R}^1$, и $F(dx)$ — σ -конечная мера на $\mathbf{R}^1$. Мы будем полагать

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x) dx, \quad \bar{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda x} f(x) dx, \\ \tilde{F}(\lambda) &= \int_{\mathbf{R}^1} e^{-\lambda x} F(dx) \end{aligned} \quad (7)$$

в предположении, что последние интегралы существуют на некотором непустом интервале действительной прямой. В дополнение к (3) положим

$$q(t) = \int_{-\infty}^t G(dx), \quad t < 0. \quad (8)$$

Сформулируем несколько лемм.

Лемма 1. Пусть выполнено условие (4). Тогда у характеристической функции $\psi(t)$ из (2) существует аналитическое продолжение на полосу $\{t: t = \nu + i\lambda \ (\nu \in \mathbf{R}^1, \lambda \in (0, a))\}$, причем $\ln \psi(i\lambda)$ представима при $\lambda \in (0, a)$ в виде

$$\ln \psi(i\lambda) = -\beta\lambda + \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} + \lambda \bar{q}(\lambda) - \lambda \hat{q}(\lambda), \quad (9)$$

где $\bar{q}(\lambda)$ и $\hat{q}(\lambda)$ конечны при $\lambda \in (0, a)$ (см. обозначения (3), (7) и (8)), а β — некоторое действительное число.

Пусть $f(t)$ n раз дифференцируема в точке t . Мы положим

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

при $n \in \mathbf{N}$ и $f^{(n)}(t) = f(t)$ при $n = 0$. Также положим

$$I_n = \int_0^\infty t^n q(t) dt,$$

и, согласно лемме 1,

$$g(\lambda) = -\frac{\ln \psi(i\lambda)}{\lambda} = \beta - \frac{\sigma^2 \lambda}{2} - \bar{q}(\lambda) + \hat{q}(\lambda), \quad \lambda \in (0, a). \quad (10)$$

Лемма 2. Пусть выполнены все предположения теоремы 1. Тогда для произвольного фиксированного неотрицательного целого числа j при $\lambda \rightarrow 0_+$

$$g^{(j)}(\lambda) = O(|\hat{q}^{(j)}(\lambda)|).$$

Лемма 3. Пусть функция $q(t)$ мажорируемо меняется на бесконечности (т.е. выполнено (5)). Тогда для всех неотрицательных целых i, j при $\lambda \rightarrow 0_+$

$$\hat{q}^{(i)}(\lambda)\hat{q}^{(j)}(\lambda) = O(|\hat{q}^{(i+j+1)}(\lambda)|),$$

причем символ « O » в последнем выражении можно заменить на « o », если $I_{i+j+1} = \infty$.

Лемма 4. Пусть $n \in \mathbf{N}$, выполнены все предположения теоремы 1 и набор неотрицательных целых чисел $i_1, \dots, i_n$ таков, что

$$\sum_{j=1}^n j i_j = n.$$

Тогда при $\lambda \rightarrow 0_+$

$$\prod_{j=1}^n ((\lambda g(\lambda))^{(j)})^{i_j} = O(|\hat{q}^{(n-1)}(\lambda)|),$$

причем символ « O » в последнем выражении можно заменить на « o », если $i_n = 0$ и $I_{n-1} = \infty$.

Лемма 5. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ определены, положительны и не возрастают при $t \in \mathbf{R}_+^1$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{g(2t)} < \infty$$

и существует такое M , что для каждого фиксированного $n \geq M$

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \hat{f}(\lambda) = (1 + o(1)) \frac{d^n}{d\lambda^n} \hat{g}(\lambda) \quad (\lambda \rightarrow 0_+).$$

Тогда

$$f(t) \stackrel{w}{\sim} g(t) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Пусть $(U_k, k \in \mathbf{N})$ — последовательность σ -конечных мер на $\mathbf{R}^1$. Следуя [1, раздел VIII.6], мы будем говорить, что последовательность $(U_k, k \in \mathbf{N})$ слабо сходится к σ -конечной мере U на $\mathbf{R}^1$, и писать

$$U_k \Rightarrow U \quad (k \rightarrow \infty),$$

если $U_k(A) \rightarrow U(A)$ для каждого ограниченного борелевского множества $A \subseteq \mathbf{R}^1$ такого, что $U(\partial A) = 0$.

Лемма 6. Пусть для мер U и V существуют их двусторонние преобразования Лапласа (см. (7)) $\tilde{U}(\lambda)$ и $\tilde{V}(\lambda)$ при $\lambda \in (a, b)$ для некоторых $a, b, 0 < a < b < \infty$, причем $\tilde{U}(\lambda) = \tilde{V}(\lambda)$ для любого $\lambda \in (a, b)$. Тогда $U = V$.

Лемма 7. Пусть для последовательности $(U_k, k \in \mathbf{N})$ при некоторых $a, b, 0 < a < b < \infty$, существуют (двусторонние) преобразования Лапласа:

$$\tilde{U}_k(\lambda) = \int_{\mathbf{R}^1} e^{-\lambda x} U_k(dx) < \infty \quad \forall \lambda \in (a, b).$$

1) Если при $k \rightarrow \infty$

$$\tilde{U}_k(\lambda) \rightarrow \omega(\lambda) < \infty \quad \forall \lambda \in (a, b), \quad (11)$$

то $\omega(\lambda)$ является преобразованием Лапласа некоторой меры U на $\mathbf{R}^1$ и $U_k \Rightarrow U$ при $k \rightarrow \infty$.

2) Обратно, если $U_k \Rightarrow U$ при $k \rightarrow \infty$ и $\tilde{U}_k(a)$ и $\tilde{U}_k(b)$ ограничены, то выполнено соотношение (11) и для меры U существует преобразование Лапласа $\tilde{U}(\lambda) = \omega(\lambda)$ при $\lambda \in (a, b)$.

3. Доказательства. Доказательство леммы 1. Поскольку выполнено (4), то $\int_{-1}^1 x G(dx) < \infty$, и для некоторого действительного β

$$\ln \psi(t) = i\beta t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) G(dx),$$

$t \in \mathbf{R}^1$. Далее, в силу (4) существует аналитическое продолжение интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) G(dx)$ на полосу $t = \nu + i\lambda$ ($\nu \in \mathbf{R}^1$, $\lambda \in (0, a)$). Поэтому при $\lambda \in (0, a)$

$$\ln \psi(i\lambda) = -\beta\lambda + \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\lambda x} - 1) G(dx), \quad (12)$$

где последний интеграл конечен при $\lambda \in (0, a)$. Из (4) и конечности $G((-\infty, -1))$ следует, что при $\lambda \in (0, a)$

$$\int_{-\infty}^y e^{-\lambda x} G(dx) \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow -\infty).$$

Поскольку при $y < 0$ и $\lambda \in (0, a)$

$$e^{-\lambda y} q(y) = e^{-\lambda y} G((-\infty, y]) \leq \int_{-\infty}^y e^{-\lambda x} G(dx),$$

то при $y \rightarrow -\infty$

$$e^{-\lambda y} q(y) \rightarrow 0 \quad \forall \lambda \in (0, a). \quad (13)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\lambda x} - 1) G(dx) &= \int_{-\infty}^0 (e^{-\lambda x} - 1) G(dx) + \int_0^{\infty} (e^{-\lambda x} - 1) G(dx) \\ &= \int_{-\infty}^0 (e^{-\lambda x} - 1) dq(x) - \int_0^{\infty} (e^{-\lambda x} - 1) dq(x). \end{aligned}$$

Поэтому, интегрируя по частям каждый из последних двух интегралов и учитывая (13), получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\lambda x} - 1) G(dx) = \lambda \bar{q}(\lambda) - \lambda \hat{q}(\lambda) \quad \forall \lambda \in (0, a), \quad (14)$$

причем конечность $\bar{q}(\lambda)$ и $\hat{q}(\lambda)$ гарантируется при $\lambda \in (0, a)$. Соотношение (9) следует из равенств (12) и (14). Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Мы имеем:

$$g(\lambda) = -\frac{\ln \psi(i\lambda)}{\lambda} = \beta - \frac{\sigma^2 \lambda}{2} - \bar{q}(\lambda) + \hat{q}(\lambda) = O(1) + \hat{q}(\lambda) = O(|\hat{q}(\lambda)|)$$

при $\lambda \rightarrow 0_+$. Так как $\bar{q}(\lambda) < \infty$ при $\lambda \in (0, a)$, то для произвольного натурального j при $\lambda \rightarrow 0_+$

$$|\bar{q}^{(j)}(\lambda)| = \int_{-\infty}^0 x^j e^{-\lambda x} q(x) dx \downarrow \int_{-\infty}^0 x^j q(x) dx < \infty.$$

Поэтому $g^{(j)}(\lambda) = O(1) + \hat{q}^{(j)}(\lambda) = O(|\hat{q}^{(j)}(\lambda)|)$ при $\lambda \rightarrow 0_+$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3 доказана в [15, лемма 4.1.5].

Доказательство леммы 4. Мы имеем при $j \in \mathbf{N}$ в силу леммы 2:

$$\begin{aligned} (\lambda g(\lambda))^{(j)} &= j g^{(j-1)}(\lambda) + \lambda g^{(j)}(\lambda) \\ &= O(|\hat{q}^{(j-1)}(\lambda)|) + O(|\lambda \hat{q}^{(j)}(\lambda)|) = O(|\hat{q}^{(j-1)}(\lambda)|) \end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow 0_+$. Утверждение леммы 4 следует из леммы 3 и последнего соотношения. Лемма 4 доказана.

Лемма 5 есть не что иное, как тауберова теорема 1.6.2 из [15]. Лемма 6 доказывается аналогично теореме 1.3.1 из [15].

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 7. Начнем с доказательства утверждения 2). Выберем такую последовательность $t_k \uparrow \infty$, что $U(\partial A_k) = 0$, где $A_k = \{x \in \mathbf{R}^1: |x| \leq t_k\}$. Пусть $U_k^{(m)}$ и $U^{(m)}$ — сужения на A_m мер U_k и U соответственно. В силу определения слабой сходимости мер, для каждого $m \in \mathbf{N}$ последовательность $U_k^{(m)}$ слабо сходится к $U^{(m)}$ при $k \rightarrow \infty$, следовательно (см. [1, раздел VIII.6]),

$$\int_{A_m} e^{-\lambda x} U_k(dx) \rightarrow \int_{A_m} e^{-\lambda x} U(dx) \quad \forall m \in \mathbf{N}, \quad \lambda \in \mathbf{R}^1. \quad (15)$$

Поэтому при $\lambda \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^1} e^{-\lambda x} U(dx) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{A_m} e^{-\lambda x} U(dx) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_m} e^{-\lambda x} U_k(dx) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\tilde{U}_k(a) + \tilde{U}_k(b)), \end{aligned} \quad (16)$$

так как

$$\begin{aligned} \int_{A_m} e^{-\lambda x} U_k(dx) &\leq \int_{\mathbf{R}^1} e^{-\lambda x} U_k(dx) \\ &= \int_{(-\infty, 0)} e^{-\lambda x} U_k(dx) + \int_{[0, \infty)} e^{-\lambda x} U_k(dx) \\ &\leq \int_{(-\infty, 0)} e^{-bx} U_k(dx) + \int_{[0, \infty)} e^{-ax} U_k(dx) \leq \tilde{U}_k(a) + \tilde{U}_k(b). \end{aligned}$$

Для произвольных $k, m \in \mathbf{N}$, $\lambda \in \mathbf{R}^1$ при $B_m = (-\infty, -t_k) \cup (t_k, \infty)$

$$\begin{aligned} |\tilde{U}_k(\lambda) - \tilde{U}(\lambda)| &\leq \int_{(-\infty, -t_m)} e^{-\lambda x} U_k(dx) + \int_{(t_m, \infty)} e^{-\lambda x} U_k(dx) \\ &\quad + \int_{B_m} e^{-\lambda x} U(dx) + \left| \int_{A_m} e^{-\lambda x} U_k(dx) - \int_{A_m} e^{-\lambda x} U(dx) \right|. \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что при $h = \lambda - a > 0$ и $\lambda \in (a, b)$

$$\int_{(t_m, \infty)} e^{-\lambda x} U_k(dx) = \int_{(t_m, \infty)} e^{-hx - ax} U_k(dx) \leq e^{-ht_m} \tilde{U}_k(a) \rightarrow 0 \quad (18)$$

при $m \rightarrow \infty$ равномерно по $k \in \mathbf{N}$. Кроме того, при $s = b - \lambda > 0$ и $\lambda \in (a, b)$

$$\int_{(-\infty, -t_m)} e^{-\lambda x} U_k(dx) = \int_{(-\infty, -t_m)} e^{sx - bx} U_k(dx) \leq e^{-st_m} \tilde{U}_k(b) \rightarrow 0 \quad (19)$$

при $m \rightarrow \infty$ равномерно по $k \in \mathbf{N}$. Зафиксируем $\lambda \in (a, b)$ и $\varepsilon > 0$. Выберем такое $m \in \mathbf{N}$, чтобы для произвольных $k \in \mathbf{N}$ выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} \int_{B_m} e^{-\lambda x} U(dx) &< \frac{\varepsilon}{4}, \quad \int_{(-\infty, -t_m)} e^{-\lambda x} U_k(dx) < \frac{\varepsilon}{4}, \\ \int_{(t_m, \infty)} e^{-\lambda x} U_k(dx) &< \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

(это можно сделать согласно соотношениям (16), (18) и (19)). Для полученного m согласно (15) выберем такое k_0 , чтобы при $k \geq k_0$ было выполнено неравенство

$$\left| \int_{A_m} e^{-\lambda x} U_k(dx) - \int_{A_m} e^{-\lambda x} U(dx) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Поэтому из последних четырех неравенств и соотношения (17) следует, что при $k \geq k_0$

$$|\tilde{U}_k(\lambda) - \tilde{U}(\lambda)| < \varepsilon,$$

что доказывает утверждение 2) леммы 7.

В предположениях пункта 1) леммы 7 для каждого $t > 0$ и $\lambda \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_k(\lambda) &= \int_{(-\infty, 0)} e^{-\lambda x} U_k(dx) + \int_{[0, \infty)} e^{-\lambda x} U_k(dx) \\ &\leq \int_{(-\infty, 0)} e^{-bx} U_k(dx) + \int_{[0, \infty)} e^{-ax} U_k(dx) \leq \tilde{U}_k(a) + \tilde{U}_k(b) \end{aligned}$$

и

$$\tilde{U}_k(\lambda) \geq \int_{[-t, t]} e^{-\lambda x} U_k(dx) \geq e^{\lambda t} U_k([-t, t]),$$

откуда следует, что для произвольного фиксированного $t > 0$

$$\sup_{k \in \mathbf{N}} U_k([-t, t]) < \infty.$$

Поэтому последовательность мер $(U_k, k \in \mathbf{N})$ предкомпактна в определенной выше слабой топологии (см. [1, раздел VIII.6, теорема 2]). Иными словами, из всякой ее подпоследовательности можно извлечь сходящуюся. Если подпоследовательность $U_{k(j)}$ слабо сходится к U при $j \rightarrow \infty$ для некоторой меры U , то, согласно только что доказанному утверждению 2), при $j \rightarrow \infty$

$$\tilde{U}_{k(j)}(\lambda) \rightarrow \tilde{U}(\lambda) \quad \forall \lambda \in (a, b),$$

следовательно, $\tilde{U}(\lambda) = \omega(\lambda)$, и, согласно лемме 6, у последовательности U_k имеется только одна предельная точка U в смысле слабой сходимости, причем $\tilde{U}(\lambda) = \omega(\lambda)$. Таким образом, $U_k \Rightarrow U$ при $k \rightarrow \infty$. Лемма 7 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Поскольку функция $\ln \psi(t)$ аналитична в полосе $t = \nu + i\lambda$ ($\nu \in \mathbf{R}^1$, $\lambda \in (0, a)$) и $\ln \psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, то для некоторого $b \in (0, a)$ функция

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1 - \ln \psi(t))^r}$$

аналитична в полосе $t = \nu + i\lambda$ ($\nu \in \mathbf{R}^1$, $\lambda \in (0, b)$). Поэтому, согласно (7), при $\lambda \in (0, b)$

$$\varphi(i\lambda) = \mathbf{E} e^{-\lambda Y} = \tilde{P}(\lambda) = \frac{1}{(1 - \ln \psi(i\lambda))^r},$$

где $P(dx)$ — распределение случайной величины Y . Рассуждая точно так же, как и при доказательстве леммы 1, получаем из последнего равенства, что при $\eta(\lambda) = -\ln \psi(i\lambda)$ и $\lambda \in (0, b)$

$$\tilde{P}(\lambda) = 1 - \lambda \hat{T}(\lambda) + \lambda \bar{T}(\lambda) = \frac{1}{(1 + \eta(\lambda))^r}$$

(см. обозначения (7)), где $T(x) = \mathbf{P}\{Y > x\}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \lambda \hat{T}(\lambda) &= \lambda \bar{T}(\lambda) + \frac{1}{(1 + \eta(\lambda))^r} = \lambda \bar{T}(\lambda) + \frac{(1 + \eta(\lambda))^r - 1}{(1 + \eta(\lambda))^r} \\ &= \lambda \bar{T}(\lambda) + \frac{\eta(\lambda) h(\eta(\lambda))}{(1 + \eta(\lambda))^r}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\lambda \in (0, b)$ и

$$h(x) = \frac{(1+x)^r - 1}{x} = \sum_{j=0}^{\infty} C_r^{j+1} x^j, \quad |x| < 1. \quad (21)$$

Согласно (10), $\eta(\lambda) = -\ln \psi(i\lambda) = \lambda g(\lambda)$. Поэтому, поделив (20) на λ , приходим к соотношению

$$\begin{aligned}\hat{T}(\lambda) &= \bar{T}(\lambda) + \frac{g(\lambda)h(\lambda g(\lambda))}{(1 + \lambda g(\lambda))^r} \\ &= \bar{T}(\lambda) + g(\lambda)H(\lambda)V(\lambda) = \bar{T}(\lambda) + U(\lambda)V(\lambda),\end{aligned}\quad (22)$$

где $\lambda \in (0, b)$ и

$$\begin{aligned}H(\lambda) &= h(\lambda g(\lambda)), \quad U(\lambda) = g(\lambda)H(\lambda), \\ V(\lambda) &= v(\lambda g(\lambda)), \quad v(x) = \frac{1}{(1+x)^r}, \quad x \geq 0.\end{aligned}\quad (23)$$

Дифференцируя (22) n раз по λ , получаем при $\lambda \in (a, b)$:

$$\hat{T}^{(n)}(\lambda) = \bar{T}^{(n)}(\lambda) + \sum_{j=0}^n C_n^j U^{(j)}(\lambda) V^{(n-j)}(\lambda). \quad (24)$$

Мы имеем для произвольного $m \in \mathbf{N}$:

$$v^{(m)}(x) = \frac{(-1)^m r^{[m]}}{(1+x)^{r+m}} \longrightarrow (-1)^m r^{[m]} \quad (25)$$

при $x \rightarrow 0$, где $r^{[m]} = r(r+1) \cdots (r+m-1)$. Пользуясь формулой (0.430) из [5] для m -й производной от сложной функции, получаем, что

$$\begin{aligned}V^{(m)}(\lambda) &= \frac{d^m}{d\lambda^m} v(\lambda g(\lambda)) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_m} v^{(k)}(\lambda g(\lambda)) C(i_1, \dots, i_m) \prod_{j=1}^m ((\lambda g(\lambda))^{(j)})^{i_j},\end{aligned}\quad (26)$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам целых неотрицательных чисел $i_1, \dots, i_m$, удовлетворяющих условию $\sum_{j=1}^m j i_j = m$, причем $k = \sum_{j=1}^m i_j$, а $C(i_1, \dots, i_m)$ — некоторые постоянные. Отсюда с учетом (25) и леммы 4 получаем, что

$$V^{(m)}(\lambda) = O(|\hat{q}^{(m-1)}(\lambda)|) \quad (27)$$

при $\lambda \rightarrow 0_+$ для каждого фиксированного $m \in \mathbf{N}$. Продифференцируем $U(\lambda)$ по λ m раз:

$$U^{(m)}(\lambda) = \frac{d^m}{d\lambda^m} (g(\lambda)H(\lambda)) = \sum_{j=0}^m C_m^j H^{(j)}(\lambda) g^{(m-j)}(\lambda). \quad (28)$$

Как и ранее, по формуле для производной от сложной функции,

$$\begin{aligned}H^{(m)}(\lambda) &= \frac{d^m}{d\lambda^m} h(\lambda g(\lambda)) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_m} h^{(k)}(\lambda g(\lambda)) C(i_1, \dots, i_m) \prod_{j=1}^m ((\lambda g(\lambda))^{(j)})^{i_j},\end{aligned}\quad (29)$$

где условия суммирования по $i_1, \dots, i_m$, число k и постоянные $C(i_1, \dots, i_m)$ те же, что и в формуле (26). Мы имеем для каждого фиксированного $k \in \mathbf{N}$, что

$$h^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left(\sum_{j=0}^{\infty} C_r^{j+1} x^j \right) \longrightarrow C_r^{k+1} k! \quad (30)$$

при $x \rightarrow 0$. С учетом (30) и леммы 4 из (29) получаем, что для произвольного фиксированного $m \in \mathbf{N}$ при $\lambda \rightarrow 0_+$

$$H^{(m)}(\lambda) = O(|\hat{q}^{(m-1)}(\lambda)|). \quad (31)$$

Из (28), (31) и леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} U^{(m)}(\lambda) &= H(\lambda)g^{(m)}(\lambda) \sum_{j=1}^m C_m^j H^{(j)}(\lambda)g^{(m-j)}(\lambda) \\ &= (r + o(1))g^{(m)}(\lambda) + O\left(\sum_{j=1}^m |\hat{q}^{(j-1)}(\lambda)\hat{q}^{(m-j)}(\lambda)|\right) \end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow 0_+$, так как $h(x) \rightarrow r$ при $x \rightarrow 0$ (см. формулу (21)). Поэтому, согласно лемме 3,

$$U^{(m)}(\lambda) = \begin{cases} (r + o(1))\hat{q}^{(m)}(\lambda), & \text{если } I_m = \infty, \\ O(|\hat{q}^{(m)}(\lambda)|), & \text{если } I_m < \infty, \end{cases} \quad (32)$$

при $\lambda \rightarrow 0_+$, так как если $I_m = \infty$, то

$$\begin{aligned} g^{(m)}(\lambda) &= \frac{d^m}{dx^m} \left(\beta + \frac{\sigma^2 \lambda}{2} + \hat{q}(\lambda) - \bar{q}(\lambda) \right) \\ &= O(1) + \hat{q}^{(m)}(\lambda) = (1 + o(1))\hat{q}^{(m)}(\lambda). \end{aligned} \quad (33)$$

Согласно лемме 3, из соотношений (24), (32) и (33) для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ такого, что $I_n = \infty$, мы имеем:

$$\begin{aligned} \hat{T}^{(n)}(\lambda) &= \bar{T}^{(n)}(\lambda) + U^{(n)}(\lambda)V(\lambda) + \sum_{j=0}^{n-1} C_n^j U^{(j)}(\lambda)V^{(n-j)}(\lambda) \\ &= O(1) + (r + o(1))\hat{q}^{(n)}(\lambda) + O\left(\sum_{j=0}^{n-1} |\hat{q}^{(j)}(\lambda)\hat{q}^{(n-j-1)}(\lambda)|\right) \\ &= O(1) + (r + o(1))\hat{q}^{(n)}(\lambda) + o(\hat{q}^{(n)}(\lambda)) = (1 + o(1))r\hat{q}^{(n)}(\lambda) \end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow 0_+$. Согласно лемме 5, отсюда получаем, что $T(t) \stackrel{w}{\sim} r q(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Теорема 1 доказана.

Автор выражает глубокую признательность рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонов С. Н., Круглов В. М. Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 4, с. 625–642.
2. Антонов С. Н., Круглов В. М. Еще раз об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, в. 4, с. 735–742.
3. Buldygin V. V., Klesov O. I., Steinebach J. G. Properties of a subclass of Avakumović functions and their generalized inverses. — Ukrainian Math. J., 2002, v. 54, № 2, p. 179–206.
4. Buldygin V. V., Klesov O. I., Steinebach J. G. On factorization representations for Avakumović–Karamata functions with nondegenerate groups of regular points. — Anal. Math., 2004, v. 30, № 3, p. 161–192.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962, 1108 с.
6. Золотарев В. М. Об асимптотическом поведении одного класса безгранично делимых законов распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, в. 3, с. 330–334.
7. Janković S. Enlargement of the class of geometrically infinitely divisible random variables. — Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 1993, v. 54 (68), p. 126–134.

8. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1985.
9. Клебанов Л. Б., Мания Г. М., Меламед И. А. Одна задача В. М. Золотарева и аналогии безгранично делимых и устойчивых распределений в схеме суммирования случайного числа случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, в. 4, с. 757–760.
10. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990, 269 с.
11. Sato K.-I. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 486 p.
12. Сгибнев М. С. Асимптотика безгранично делимых распределений в $\mathbf{R}^n$. — Труды Ин-та математики СО АН СССР, 1989, т. 13, с. 100–116.
13. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
14. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
15. Якимив А. Л. Вероятностные приложения тауберовых теорем. М.: Физматлит, 2005, 256 с.

Поступила в редакцию
22.IX.2008

© 2010 г.

ЯСЬКОВ П. А.*

СИЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ КРАТНЫХ СУММ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Получены новые достаточные условия п.н. сходимости кратных рядов из неортогональных случайных величин и новый вариант усиленного закона больших чисел. Данные условия описаны в виде ограничений на вторые моменты, а также на верхние грани средних попарных произведений рассматриваемых величин. Наши теоремы улучшают как хорошо известные результаты для квазистационарных полей, так и недавние, связанные с обобщением свойства квазистационарности.

Ключевые слова и фразы: случайное поле, усиленный закон больших чисел, сходимость рядов почти наверное, зависимые случайные величины.

1. Введение. В настоящей статье рассматривается вопрос об асимптотическом поведении кратных сумм, образованных элементами случайного поля определенного класса. Точнее говоря, исследуются условия применимости усиленного закона больших чисел, а также сходимости кратных рядов с вероятностью единица. Упомянутый класс весьма широк, в частности, он содержит квазистационарные поля.

Данному вопросу посвящено много работ. Исчерпывающие ответы получены для следующих типов случайных полей: составленных из независимых одинаково распределенных величин (см. [1] и [2]), ортогональных (см. [3] и [4]), однородных (см. [5]), квазистационарных (см. [6]). Ограничения общего вида, не предполагающие какой-либо структуры зависимости, рассмотрены в [7]. Наша статья мотивирована недавними работами [8] и [9], где допускается некоторое отклонение от свойства квазистационарности.

Многие результаты о квазистационарных случайных величинах получаются с помощью максимальных неравенств Морица (см. [10]). В нашем случае эти неравенства

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: yaskov_pavel@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 07-01-00373.