Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Яськов, Сильная сходимость кратных сумм неортогональных случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 2, 382–386

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4210>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:24:34

8. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1985.
9. Клебанов Л. Б., Мания Г. М., Меламед И. А. Одна задача В. М. Золотарева и аналогии безгранично делимых и устойчивых распределений в схеме суммирования случайного числа случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, в. 4, с. 757–760.
10. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990, 269 с.
11. Sato K.-I. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 486 p.
12. Сгибнев М. С. Асимптотика безгранично делимых распределений в $\mathbf{R}^n$. — Труды Ин-та математики СО АН СССР, 1989, т. 13, с. 100–116.
13. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
14. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
15. Якимив А. Л. Вероятностные приложения тауберовых теорем. М.: Физматлит, 2005, 256 с.

Поступила в редакцию
22.IX.2008

© 2010 г.

ЯСЬКОВ П. А.*

СИЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ КРАТНЫХ СУММ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН¹⁾

Получены новые достаточные условия п.н. сходимости кратных рядов из неортогональных случайных величин и новый вариант усиленного закона больших чисел. Данные условия описаны в виде ограничений на вторые моменты, а также на верхние грани средних попарных произведений рассматриваемых величин. Наши теоремы улучшают как хорошо известные результаты для квазистационарных полей, так и недавние, связанные с обобщением свойства квазистационарности.

Ключевые слова и фразы: случайное поле, усиленный закон больших чисел, сходимость рядов почти наверное, зависимые случайные величины.

1. Введение. В настоящей статье рассматривается вопрос об асимптотическом поведении кратных сумм, образованных элементами случайного поля определенного класса. Точнее говоря, исследуются условия применимости усиленного закона больших чисел, а также сходимости кратных рядов с вероятностью единица. Упомянутый класс весьма широк, в частности, он содержит квазистационарные поля.

Данному вопросу посвящено много работ. Исчерпывающие ответы получены для следующих типов случайных полей: составленных из независимых одинаково распределенных величин (см. [1] и [2]), ортогональных (см. [3] и [4]), однородных (см. [5]), квазистационарных (см. [6]). Ограничения общего вида, не предполагающие какой-либо структуры зависимости, рассмотрены в [7]. Наша статья мотивирована недавними работами [8] и [9], где допускается некоторое отклонение от свойства квазистационарности.

Многие результаты о квазистационарных случайных величинах получаются с помощью максимальных неравенств Морица (см. [10]). В нашем случае эти неравенства

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: yaskov_pavel@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 07-01-00373.

оказываются неприменимыми. Поэтому мы устанавливаем их новые варианты. Для доказательства наших неравенств мы применяем простые и эффективные средства (ср. с [10]). При выводе основных теорем мы используем технику стандартную для многопараметрического случая.

Для более точных формулировок введем ряд обозначений. Положим $x^+ = x \vee 0$, $\log x = \log_2(x \vee 2)$, $\langle \mathbf{x} \rangle = \prod_{i=1}^d (x_i \vee 1)$ и $f(\mathbf{x}) = (f(x_1), \dots, f(x_d))$ для $x \in \mathbf{R}_+$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}_+^d$ и $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$. Зададим на $\mathbf{N}_0^d$ покомпонентную операцию сложения и естественный частичный порядок. Пусть $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbf{N}_0^d$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbf{N}_0^d$. Если $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbf{N}_0^d$, то также определим $\mathbf{m}\mathbf{n} = (m_1 n_1, \dots, m_d n_d)$, $\|\mathbf{n}\| = \max\{n_1, \dots, n_d\}$, $[\mathbf{m}, \mathbf{n}] = \{\mathbf{k} \in \mathbf{N}_0^d | \mathbf{m} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}\}$ и $\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{m}}^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k} \in [\mathbf{m}, \mathbf{n}]}$, где сумма по пустому множеству считается равной нулю. Запись $\mathbf{n} \rightarrow \infty$ означает, что $\min\{n_1, \dots, n_d\} \rightarrow \infty$.

Пусть $X_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^d$ — случайные величины с конечным моментом второго порядка. Если $\mathbf{E} X_{\mathbf{m}} X_{\mathbf{n}} = 0$ при $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$ и константы $a_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^d$, таковы, что

$$\sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{1}} a_{\mathbf{n}}^2 \mathbf{E} X_{\mathbf{n}}^2 \langle \log \mathbf{n} \rangle^2 < \infty, \quad (1)$$

то, согласно (1) расширенной теореме Меньшова–Радемахера (см., например, [4]), ряд

$$\sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{1}} a_{\mathbf{n}} X_{\mathbf{n}} \text{ сходится п.н.} \quad (2)$$

При $d = 1$ в [11] приведено обобщение этой теоремы, в котором вместо ортогональных величин $X_{\mathbf{n}}$ берутся квазистационарные, т.е. такие, что $\phi_{\mathbf{k}} = \sup_{\mathbf{m}, \mathbf{n}: |\mathbf{m}-\mathbf{n}|=\mathbf{k}} |\mathbf{E} X_{\mathbf{m}} X_{\mathbf{n}}|$ конечно при всех $\mathbf{k} \in \mathbf{N}_0^d$. В [8] и [9], наряду с конечностью $\phi_{\mathbf{k}}$ для $\mathbf{k} \in \mathbf{N}_0^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, допускается рост $\mathbf{E} X_{\mathbf{n}}^2$. Подобный случай исследуется и в настоящей статье.

Итак, в данной работе результаты [11] о п.н. сходимости случайных последовательностей распространяются на случайные поля, удовлетворяющие (1). В [11] используются более ограничительные по сравнению с (1) условия вида $\sup_{n \geq 1} \mathbf{E} X_n^2 = 1$ и $\sum_{n \geq 1} W(n) a_n^2$, где $W(n)$, $n \in \mathbf{N}$, обладают следующим свойством: $\log^2 n = O(W(n))$ при $n \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что наши теоремы улучшают [8], [9], а также часть результатов [6].

2. Формулировки основных результатов. Нам понадобится ряд обозначений. Пусть $\rho_{\mathbf{k}} = \sup_{\mathbf{m}, \mathbf{n}: |\mathbf{m}-\mathbf{n}|=\mathbf{k}} (\mathbf{E} X_{\mathbf{m}} X_{\mathbf{n}})^+$ при $\mathbf{k} \in \mathbf{N}_0^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $\rho_{\mathbf{0}} = 0$. Следуя [11], введем

$$w(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \rho_{\mathbf{k}}. \quad (3)$$

При таком задании величины $w(\mathbf{n})$ не убывают по $\mathbf{n}$ относительно частичного порядка на $\mathbf{N}_0^d$. Напомним, что запись $\boldsymbol{\varepsilon} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ означает, что вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ состоит из нулей и единиц. Положим для $\boldsymbol{\varepsilon} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ и $\mathbf{n} \in \mathbf{N}_0^d$

$$W(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})^{1/2} = \sum_{\mathbf{m}=\boldsymbol{\varepsilon}[\log \mathbf{n}]}^{[\log \mathbf{n}]} w(2^{\mathbf{m}})^{1/2}, \quad (4)$$

где $[x]$ — целая часть $x \in \mathbf{R}$. В силу монотонности w , очевидно, имеем $W(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = O(w(\mathbf{n}) \langle \log \delta \mathbf{n} \rangle^2)$ при $\delta = \mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}$, когда $\|\mathbf{n}\| \rightarrow \infty$. Если к тому же $\liminf_{\|\mathbf{n}\| \rightarrow \infty} w(\mathbf{n}) > 0$, то $\langle \log \delta \mathbf{n} \rangle^2 = O(W(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}))$. Определим Φ_c как класс неубывающих функции $\varphi: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, для которых ряд $\sum_{n \geq 0} 1/\varphi(n)$ сходится.

Сформулируем главные результаты нашей работы.

Теорема 1. Пусть выполнено (1) и $a_{\mathbf{n}} \geq 0$ при всех $\mathbf{n}$. Тогда для справедливости (2) достаточно, чтобы для некоторой $\varphi \in \Phi_c$ при всех $\boldsymbol{\varepsilon} \in [0, 1]$

$$\sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{1}} W(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \langle \varphi(\log \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}) \rangle a_{\mathbf{n}}^2 < \infty. \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть $\sum_{n \geq 0} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \mathbf{E} X_k^2 \langle n \rangle^2 / b_{2^n}^2 < \infty$, где $b_n, n \in \mathbf{N}^d$ — такие положительные постоянные, что b_n не убывает по n и

$$\sum_{m: 2^m \geq n} 1/b_{2^m}^2 = O((\log n)^2 / b_n^2), \quad \|n\| \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Предположим, что для некоторой $\varphi \in \Phi_c$ при всех $\varepsilon \in [0, 1] \setminus \{1\}$ имеет место (5), где a_n заменено на $1/b_n$. Если при этом $W(n, 1) \langle \varphi(\log n) \rangle / b_n^2$ не возрастает по n , то

$$\lim_{\|n\| \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{b_n} = 0 \text{ п.н.}$$

Заметим, что если в качестве ρ_k взять величины ϕ_k (см. введение), то ограничение вида $\inf_n a_n \geq 0$ в теореме 1 можно убрать. Кроме того, в случае, когда $\varphi(2x) \leq C\varphi(x)$ при всех $x \in \mathbf{R}_+$ для некоторого $C > 0$, вместо монотонности $W(n, 1) \langle \varphi(\log n) \rangle / b_n^2$ в условии теоремы 2 можно потребовать невозрастание $W(n, 1) / b_n^2$.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующих моментных неравенствах.

Лемма 1. Пусть $S_{m,n} = \sum_{k=m}^{m+n-1} a_k X_k$. Тогда

$$\mathbf{E} S_{m,n}^2 \leq \sum_{k=m}^{m+n-1} a_k^2 \mathbf{E} X_k^2 + 2^d w(n) \sum_{k=m}^{m+n-1} a_k^2, \quad (7)$$

где w определено в (3).

Лемма 2. Пусть $M_n(\delta) = \max_{(1-\delta)2^n + \delta \leq k \leq 2^n} |S_{2^n, k}|$, где $\delta \in [0, 1]$ и $S_{2^n, k}$ введены в формулировке леммы 1. Тогда

$$\mathbf{E} M_n^2(\delta) \leq 2 \langle \delta n \rangle^2 \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k^2 \mathbf{E} X_k^2 + 2^{d+1} W(2^n, \varepsilon) \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k^2, \quad (8)$$

где $\varepsilon = 1 - \delta$, а W задается формулой (4).

Если $\sup_k \mathbf{E} X_k^2 \leq 1$, то (8) вытекает из максимального неравенства Морица (см. [10, следствие 3]), которое получается с помощью индукции по n и d . В случае, когда ограничений на $\mathbf{E} X_k^2$ нет, такая индукция не позволяет вывести (8), в отличие от прямого способа оценки $\mathbf{E} M_n^2(\delta)$.

3. Доказательства. Лемма 1 вытекает из определения ρ_k и неравенства Коши. Установим лемму 2. Рассмотрим вначале случай $\delta = 1$. Обозначим

$$S_U = \sum_{i \in U} a_{i+2^n} X_{i+2^n} \quad \text{при} \quad U \subset [0, 2^n - 1], \quad I(k, m) = [(k-1)2^m, k2^m - 1].$$

Очевидно, что $I(k_1, m) \cap I(k_2, m) = \emptyset$, если $k_1 \neq k_2$, и $\bigcup_{k=1}^{2^{n-m}} I(k, m) = [0, 2^n - 1]$. Имеем

$$M_n(1) \leq \sum_{m=0}^n \max_{1 \leq k \leq 2^{n-m}} |S_{I(k, m)}|,$$

откуда по неравенству Коши–Буняковского

$$\mathbf{E} M_n^2(1) \leq \sum_{m=0}^n (\mathbf{E} M_n^2(1))^{1/2} \left(\mathbf{E} \max_{1 \leq k \leq 2^{n-m}} S_{I(k, m)}^2 \right)^{1/2}.$$

Согласно лемме 1 справедлива следующая оценка:

$$\mathbf{E} \max_{1 \leq k \leq 2^{n-m}} S_{I(k, m)}^2 \leq \sum_{k=1}^{2^{n-m}} \mathbf{E} S_{I(k, m)}^2 \leq \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} a_i^2 \mathbf{E} X_i^2 + 2^d w(2^m) \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} a_i^2.$$

В итоге, применяя неравенство Минковского, получаем

$$(\mathbf{E} M_{\mathbf{n}}^2(\mathbf{1}))^{1/2} \leq \langle \mathbf{n} \rangle \left(\sum_{\mathbf{i}=2^{\mathbf{n}}}^{2^{\mathbf{n}+1}-1} a_{\mathbf{i}}^2 \mathbf{E} X_{\mathbf{i}}^2 \right)^{1/2} + \sum_{\mathbf{m}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} w(2^{\mathbf{m}})^{1/2} \cdot \left(2^d \sum_{\mathbf{i}=2^{\mathbf{n}}}^{2^{\mathbf{n}+1}-1} a_{\mathbf{i}}^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда и из неравенства Коши вытекает (8). Случай $\delta \neq \mathbf{1}$ рассматривается аналогично, если в качестве $I(\mathbf{k}, \mathbf{m})$ взять $[(\mathbf{k}-1)2^{\mathbf{m}+(1-\delta)\mathbf{n}}, \mathbf{k}2^{\mathbf{m}+(1-\delta)\mathbf{n}}-1]$ для $\mathbf{m} \leq \delta \mathbf{n}$. Лемма 2 установлена.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Оно состоит из двух шагов. Первый — это проверка того, что

$$\sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} |S_{2^{\mathbf{n}}, 2^{\mathbf{n}}}| < \infty \text{ п.н.}, \quad (9)$$

второй — вывод соотношения

$$T_{\mathbf{n}} = \max_{2^{\mathbf{n}} \leq \mathbf{k} \leq 2^{\mathbf{n}+1}-1} |S_{\mathbf{k}} - S_{2^{\mathbf{n}}-1}| \rightarrow 0 \text{ п.н.}, \quad \mathbf{n} \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где $S_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{k}} a_{\mathbf{i}} X_{\mathbf{i}}$. Заметим, что из (9) следует существование предела $\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} S_{2^{\mathbf{n}}-1}$ п.н. Согласно теореме Б. Леви сходимость $\sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \mathbf{E} |S_{2^{\mathbf{n}}, 2^{\mathbf{n}}}|$ ведет к (9). Полагая здесь и далее $C_{\varphi} = \sum_{n \geq 0} 1/\varphi(n) + 1$, по неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \mathbf{E} |S_{2^{\mathbf{n}}, 2^{\mathbf{n}}}| = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \mathbf{E} M_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) \leq C_{\varphi}^d \left(\sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \langle \varphi(\mathbf{n}) \rangle \mathbf{E} M_{\mathbf{n}}^2(\mathbf{0}) \right)^{1/2}.$$

Без ограничения общности считаем, что $\varphi(x) \leq x^2 \vee 1$ при $x \in \mathbf{R}_+$. Тогда, учитывая монотонность w , применяя (1), (5) и лемму 2, заключаем, что

$$\sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \langle \varphi(\mathbf{n}) \rangle \mathbf{E} M_{\mathbf{n}}^2(\mathbf{0}) \leq \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{1}} \left(a_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{E} X_{\mathbf{k}}^2 (\log \mathbf{k})^2 + 2^{d+1} W(\mathbf{k}, \mathbf{1}) \langle \varphi(\log \mathbf{k}) \rangle a_{\mathbf{k}}^2 \right) < \infty.$$

Как и в [6], для вывода (10) используем элементарную оценку вида

$$T_{\mathbf{n}} \leq \sum_{\delta \in [0, 1], \delta \neq \mathbf{0}} \sum_{\mathbf{m}=\delta \mathbf{n}}^{\mathbf{n}} M_{\mathbf{m}}(\delta). \quad (11)$$

Фиксируем произвольное $\delta \in [0, 1]$, $\delta \neq \mathbf{0}$. Положим $\varepsilon = \mathbf{1} - \delta$. Имеем

$$\sum_{\mathbf{m}=\delta \mathbf{n}}^{\mathbf{n}} M_{\mathbf{m}}(\delta) \leq \sum_{\mathbf{m} \geq \mathbf{0}, \delta \mathbf{m}=\mathbf{0}} M_{\mathbf{m}+\delta \mathbf{n}}(\delta) = Z_{\mathbf{n}}(\delta).$$

Вследствие неравенства Коши–Буняковского, $\mathbf{E} Z_{\mathbf{n}}(\delta)^2 \leq C_{\varphi}^d A_{\mathbf{n}}(\delta)$, где

$$A_{\mathbf{n}}(\delta) = \sum_{\mathbf{m} \geq \mathbf{0}, \delta \mathbf{m}=\mathbf{0}} \langle \varphi(\mathbf{m}) \rangle \mathbf{E} M_{\mathbf{m}+\delta \mathbf{n}}(\delta)^2.$$

Далее, поскольку $\langle \varphi(\mathbf{m}) \rangle \langle \delta \mathbf{n} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{m} + \delta \mathbf{n} \rangle^2$ при $\delta \mathbf{m} = \mathbf{0}$, то лемма 2 влечет

$$A_{\mathbf{n}}(\delta) \leq \sum_{\mathbf{k}: \delta 2^{\mathbf{n}} \leq \delta \mathbf{k} \leq \delta (2^{\mathbf{n}+1}-1)} \left((\log \mathbf{k})^2 a_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{E} X_{\mathbf{k}}^2 + 2^{d+1} W(\mathbf{k}, \varepsilon) \langle \varphi(\log \varepsilon \mathbf{k}) \rangle a_{\mathbf{k}}^2 \right) < \infty,$$

откуда, принимая во внимание (1) и (5), находим, что ряд $\sum_{\mathbf{i} \geq \mathbf{0}, \delta \mathbf{i}=\mathbf{i}} \mathbf{E} Z_{\mathbf{i}}^2(\delta)$ сходится. Последнее (в силу равенства $Z_{\mathbf{n}}(\delta) = Z_{\delta \mathbf{n}}(\delta)$ и леммы Бореля–Кантелли) означает, что $\lim_{\|\mathbf{n}\| \rightarrow \infty} Z_{\mathbf{n}}(\delta) = 0$ п.н. Следовательно,

$$\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{m}=\delta \mathbf{n}}^{\mathbf{n}} M_{\mathbf{m}}(\delta) = 0 \text{ п.н.}, \quad \delta \in [0, 1], \quad \delta \neq \mathbf{0}. \quad (12)$$

Учитывая соотношения (11) и (12), а также то, что векторов $\delta \in [0, 1]$ конечное число, приходим к (10). Это завершает доказательство теоремы 1.

Обратимся к теореме 2. Положим $a_k = 1$ в определениях S_{2^n-1} , $S_{m,n}$, T_n и $M_n(\delta)$. Используя условия теоремы и лемму 1, нетрудно показать, что $\sum_{n \geq 0} E S_{2^n-1}^2 / b_{2^n-1}^2 < \infty$. Поэтому

$$\lim_{\|n\| \rightarrow \infty} S_{2^n-1} / b_{2^n-1} = 0 \text{ п.н.} \quad (13)$$

Поступая так же, как при выводе (12), с учетом монотонности $W(n, 1) \langle \varphi(\log n) \rangle / b_n^2$ видим, что

$$\lim_{\|n\| \rightarrow \infty} Z'_n(\delta) = 0 \text{ и } Z'_n(\delta) < \infty \text{ п.н., } \delta \in [0, 1], \delta \neq 0, \quad (14)$$

где $Z'_n(\delta) = \sum_{m \geq 0, \delta m = 0} M_{m+\delta n}(\delta) / b_{m+\delta n}$. Аналогично [6], в силу (11) имеем

$$\frac{T_n}{b_{2^n}} \leq \sum_{\delta \in [0, 1], \delta \neq 0} \sum_{m \geq 0, \delta m = 0} B_{m,n}(\delta) \frac{M_{m+\delta n}(\delta)}{b_{m+\delta n}}, \quad (15)$$

где $B_{m,n}(\delta) = b_{m+\delta n} / b_{2^n}$ при $m \leq (1 - \delta)n$ и $B_{m,n}(\delta) = 0$ в остальных случаях. Поскольку b_n не убывает по n и $\lim_{\|n\| \rightarrow \infty} b_n = \infty$ (вытекает из (6)), то $B_{m,n}(\delta) \leq 1$ и $B_{m,n}(\delta) \rightarrow 0$, когда $\delta, \delta n$ и m фиксированы, а $\|(1 - \delta)n\| \rightarrow \infty$. Теперь из соотношений (14) и (15) легко вывести, что $\lim_{\|n\| \rightarrow \infty} T_n / b_{2^n} = 0$ п.н. Последнее равенство вместе с (13) дают утверждение теоремы.

Автор благодарен своему научному руководителю А. В. Булинскому за постоянное внимание и поддержку, а также признателен А. П. Шашкину за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фролов А. Н. Об асимптотическом поведении приращений случайных полей. — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2003, т. 298, с. 191–207.
2. Клесов О. И. Сходимость почти наверное кратных рядов независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 1, с. 68–83.
3. Klesov O. On the order of growth of orthogonal random fields. — Anal. Math., 2003, v. 29, № 1, p. 15–28.
4. Andrienko V. A. Rate of approximation by rectangular partial sums of double orthogonal series. — Anal. Math., 1996, v. 22, № 4, p. 243–266.
5. Гапошкин В. Ф. Многопараметрический усиленный закон больших чисел для однородных случайных полей. — Успехи матем. наук, 1981, т. 36, с. 197–198.
6. Moricz F. Strong laws of large numbers for quasi-stationary random fields. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1980, v. 51, № 3, p. 249–268.
7. Klesov O., Fazecas I., Nozaly C., Tomacs T. Strong Laws of Large Numbers for Sequences and Fields. — Theory Stoch. Proc., 1999, v. 5(21), № 3–4, p. 91–104.
8. Hu T.-C., Rosalsky A., Volodin A. I. On convergence properties of sums of dependent random variables under second moment and covariance restrictions. — Statist. Probab. Lett., 2008, v. 78, № 14, p. 1999–2005.
9. Sung S. H. Maximal inequalities for dependent random variables and applications. — J. Ineq. Appl., 2008, v. 2008, Article ID 598319, doi:10.1155/2008/598319.
10. Moricz F. A general maximal inequality of the rectangular partial sums of multiple series. — Acta Math. Hungar., 1983, v. 41, № 3–4, p. 337–346.
11. Серфлинг Р. Об усиленном законе больших чисел и близких результатах для квазистационарных последовательностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, в. 1, с. 190–194.

Поступила в редакцию
22.IX.2008