Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Кузнецов, Аналитическое доказательство тождества Печерского–Рогозина и факторизации Винера–Хопфа, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 3, 417–431

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:56:49

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука

Том 55

Выпуск 3, 2010 год

июль, август, сентябрь

© 2010 г.

КУЗНЕЦОВ А. Е.*

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВА ПЕЧЕРСКОГО–РОГОЗИНА И ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА–ХОПФА¹⁾

В статье предлагается аналитическое доказательство двух центральных результатов теории флуктуаций процессов Леви: тождества Печерского–Рогозина и факторизации Винера–Хопфа. Метод доказательства является довольно общим и требует только одного слабого ограничения на «хвосты» меры скачков. Доказательство тождества Печерского–Рогозина основано на интегральном уравнении, решением которого является совместное распределение момента первого достижения и перескока. Это уравнение преобразуется в одномерное уравнение Винера–Хопфа, которое решается с помощью классических методов из теории краевых задач Римана. Факторизация Винера–Хопфа и некоторые другие результаты выводятся как следствие тождества Печерского–Рогозина.

Ключевые слова и фразы: процесс Леви, факторизация Винера–Хопфа, тождество Печерского–Рогозина, интегральное уравнение, краевая задача Римана, формулы Сохоцкого.

1. Введение. В течение последнего десятилетия наблюдается повышенный интерес к факторизации Винера–Хопфа и другим результатам теории флуктуаций процессов Леви. Было найдено множество новых приложений процессов Леви в таких областях, как финансовая математика, теория риска и актуарная математика. В связи с этим возникло много новых актуальных задач, для решения которых необходима информация о распределении различных функционалов от траекторий процесса, таких как максимум и минимум, момент первого достижения, перескок. Теория флуктуаций процессов Леви дает ответы на многие

*Dept. of Mathematics and Statistics, York University, Toronto, ON, M3J 1P3, Canada; e-mail: kuznetsov@mathstat.yorku.ca, url: www.math.yorku.ca/~akuznets

¹⁾ Research supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada.

теоретические вопросы, связанные с этими функционалами, и в то же время предоставляет набор средств и методов для численных вычислений.

Один из первых общих результатов о распределении максимума процесса Леви был получен Г. Бакстером и М. Д. Донскером в 1957 г. (см. [2]). Авторы этой статьи вывели соотношение для двумерного преобразования Лапласа от распределения максимума в виде двойного интеграла от кумулянты процесса. Метод, примененный Бакстером и Донскером, впоследствии стал стандартным и использовался на протяжении следующих двадцати лет практически без изменений. Суть данного метода такова: сначала процесс Леви аппроксимируется случайным блужданием в дискретном времени, затем доказывается некий результат о функционалах этого случайного блуждания. Бакстер и Донскер использовали комбинаторное тождество Спичера для изучения распределения максимума процесса (см. [21] и [22]). Заключительный шаг состоит в доказательстве того, что свойство, полученное для случайного блуждания, является верным и для общих процессов Леви.

Следующий важный шаг в этой области был сделан Б. А. Rogozinym в 1966 г. (см. [18]). Используя похожий метод, автор доказал факторизацию Винера–Хопфа, причем сами факторы были получены как двумерные интегралы от распределения процесса. В следующей статье [16] Е. А. Печерский и Б. А. Rogozin получили много других важных результатов, включая тождество Печерского–Рогозина, которое может быть использовано для получения информации о совместном распределении момента первого достижения и перескока. Следует отметить, что приблизительно в это же время появилось много интересных результатов для процессов Леви, не имеющих положительных или отрицательных скачков (см. [4], [20] и [23]).

Во всех вышеупомянутых статьях использован метод, который требует изначальной аппроксимации процесса Леви случайным блужданием в дискретном времени. Однако это не единственный способ, с помощью которого могут быть получены похожие результаты. Например, Д. В. Гусак и В. С. Корольюк разработали альтернативный подход, основная идея которого заключается в следующем: сначала процесс Леви аппроксимируется с помощью составного процесса Пуассона с линейным сносом, затем доказывается стохастическое потраекторное тождество для функционалов (таких, как момент первого достижения или перескок), которое описывает, что происходит с данным функционалом в момент следующего скачка процесса. После этого данное тождество переписывается в виде интегрального уравнения для функции распределения, решение которого находится с помощью методов краевых задач. Этот подход был описан в статье [13], где авторы получили тождество для распределения момента первого достижения. Тот же метод был ис-

пользован в работе [12] для получения результатов о совместном распределении момента первого достижения и перескока, при ограничении, что процесс имеет конечный первый момент и не имеет гауссовской компоненты.

Обзор результатов и методов, используемых в то время, содержится в статьях [5] и [10].

После этого начального этапа развития теории флуктуаций процессов Леви возникла необходимость построения общего метода для доказательства всех этих результатов, который помог бы объяснить взаимосвязь между ними с точки зрения теории вероятностей и в то же время не требовал бы изначальной аппроксимации процесса Леви более простым процессом. Как оказалось, оба предыдущих подхода не годятся для этой цели. В первом методе, основанном на аппроксимации случайным блужданием, основная идея состоит в применении марковского свойства в момент, когда траектория случайного блуждания обновляет максимум. В общем случае этот момент остановки невозможно определить таким же простым способом, так как множество точек во времени, когда процесс обновляет максимум, может не быть дискретным. Также не совсем ясно, как обобщить подход, предложенный Гусаком и Королюком, в случае, когда процесс Леви имеет скачки бесконечной активности, так как понятие «момент следующего скачка» теряет смысл. Именно эти сложности теоретического характера объясняют тот факт, что общее доказательство результатов теории флуктуаций удалось получить только в 1980 г., после того как была построена и развита теория локального времени и процесса экскурсий. Впервые это доказательство было опубликовано в ставшей уже классической работе П. Гринвуд и Дж. Питмана [11].

Современные методы, применяемые в теории флуктуаций, в большинстве своем следуют пути, проложенному Гринвуд и Питманом в [11], и основываются на пуассоновском процессе экскурсий, локальном времени, различных трансформациях траекторий процесса и т.д. Исчерпывающее описание может быть найдено в следующих монографиях: [3], [8] и [14]. Важность данного подхода для теории флуктуаций сложно переоценить: с его помощью удалось упростить доказательство уже известных фактов и в то же время было получено множество новых интересных результатов. Тем не менее существует и обратная сторона: многие факты из теории флуктуаций процессов Леви могут быть понятны и полезны читателю далекому от этой области, в то время как полное понимание современных доказательств предполагает наличие знаний в теории локального времени, процесса экскурсий и т.д. Также следует отметить, что иногда аналитические доказательства вероятностных результатов являются довольно простыми и дают ценную возможность взглянуть на задачу с другой стороны.

В настоящей статье приводится аналитическое доказательство двух наиболее известных результатов из теории флуктуаций процессов Леви — факторизации Винера–Хопфа и тождества Печерского–Рогозина. Доказательство основано только на применении марковского свойства и нескольких стандартных фактов из комплексного анализа. Идея доказательства во многом похожа на метод, использованный в работах [12] и [13]: мы начнем с интегрального уравнения, полученного с помощью применения марковского свойства в момент первого достижения, затем приведем данное уравнение к интегральному уравнению Винера–Хопфа и решим его с помощью классических методов из теории краевых задач. Важно отметить, что, при всей схожести с методом Гусака и Королюка, наше доказательство является гораздо более общим за счет того, что мы используем интегральное уравнение, которое является «глобальным» в том смысле, что оно описывает событие, которое случается в фиксированном временном интервале $[s, t]$, а не событие, которое происходит «локально», в момент следующего скачка.

Статья построена следующим образом: в п. 2 мы вводим необходимые обозначения и описываем основные результаты, доказательства которых представлены в п. 3.

2. Определения, основные результаты. В данной статье рассматривается одномерный процесс Леви (однородный процесс с независимыми приращениями), который начинается в нуле и имеет триплет характеристик (μ, σ, Π) , где $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma \geq 0$ и $\Pi(dx)$ — положительная мера на $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, удовлетворяющая

$$\int_{\mathbf{R}} \min(1, x^2) \Pi(dx) < \infty.$$

Кумулянта процесса X , определенная как $\Psi(z) = -\ln \mathbf{E} \exp(izX_1)$, может быть найдена с помощью формулы Леви–Хинчина (см. [3]) в следующем виде:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2} \sigma^2 z^2 - i\mu z - \int_{\mathbf{R}} (e^{izx} - 1 - izx \mathbf{I}(|x| < 1)) \Pi(dx). \quad (1)$$

Предположение 1. Существует $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что

$$\int_{\mathbf{R} \setminus [-1, 1]} |x|^\varepsilon \Pi(dx) < \infty.$$

Замечание 1. Условие интегрируемости в предположении 1 является очень незначительным ограничением: большинство процессов Леви удовлетворяют данному условию, включая устойчивые процессы и все известные процессы, используемые в приложениях. Это

условие исключает только некоторые процессы, у которых мера скачков имеет очень тяжелые «хвосты», например как в случае, когда $\Pi(\mathbf{R} \setminus (-x, x)) \sim 1/\ln|x|$ при $x \rightarrow +\infty$. Как мы увидим далее, предположение 1 гарантирует, что кумулянта $\Psi(z)$ непрерывна по Гёльдеру, а эта информация понадобится нам для применения формул Сохоцкого в уравнении (21) и при доказательстве теоремы 1, (b).

Определим следующие функционалы от траекторий процесса X : момент первого достижения

$$\tau_h^+ = \inf\{t > 0: X_t > h\}, \quad h \geq 0,$$

перескок в момент первого достижения $X_{\tau_h^+} - h$, и процессы максимума/минимума

$$S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s, \quad I_t = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s.$$

Введем случайную величину $e(q)$, которая имеет экспоненциальное распределение с параметром $q > 0$ и не зависит от процесса X . Пусть

$$\mathbf{C}^+ = \{z \in \mathbf{C}: \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \overline{\mathbf{C}}^+ = \{z \in \mathbf{C}: \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

— открытая/замкнутая верхняя полуплоскость. Нижняя полуплоскость и положительная/отрицательная действительная полуось обозначаются аналогичным образом.

Теорема 1 (факторизация Винера–Хопфа). Пусть $q > 0$. Определим факторы Винера–Хопфа

$$\begin{aligned} \varphi_q^+(z) &= \exp \left[\int_{\mathbf{R}^+} dt \int_{\mathbf{R}^+} (e^{izx} - 1) \mathbf{P}(X_t \in dx) t^{-1} e^{-qt} \right], & z \in \overline{\mathbf{C}}^+, \\ \varphi_q^-(z) &= \exp \left[\int_{\mathbf{R}^+} dt \int_{\mathbf{R}^-} (e^{izx} - 1) \mathbf{P}(X_t \in dx) t^{-1} e^{-qt} \right], & z \in \overline{\mathbf{C}}^-. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

(a) Для всех $z \in \mathbf{R}$

$$\frac{q}{q + \Psi(z)} = \varphi_q^+(z) \varphi_q^-(z). \quad (3)$$

(b) Факторы Винера–Хопфа могут быть представлены в следующем виде:

$$\varphi_q^\pm(z) = \exp \left[\pm \frac{z}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \ln \left(\frac{q}{q + \Psi(u)} \right) \frac{du}{u(u - z)} \right], \quad z \in \mathbf{C}^\pm. \quad (4)$$

(c) Для всех $z \in \overline{\mathbf{C}}^+$ (соответственно $z \in \overline{\mathbf{C}}^-$) верно, что $\varphi_q^+(z) = \mathbf{E} \exp(izS_{e(q)})$ (соответственно $\varphi_q^-(z) = \mathbf{E} \exp(izI_{e(q)})$).

(d) $S_{e(q)}$ (соответственно $I_{e(q)}$) является положительной (соответственно отрицательной) бесконечно делимой случайной величиной с нулевым сносом.

(е) Предположим, что существует положительная (соответственно отрицательная) бесконечно делимая случайная величина $\tilde{S}$ (соответственно $\tilde{I}$) с нулевым сносом такая, что $q(q + \Psi(z))^{-1} = \mathbf{E} \exp(iz\tilde{S}) \mathbf{E} \exp(iz\tilde{I})$ для всех $z \in \mathbf{R}$. Тогда $\tilde{S} \stackrel{d}{=} S_{e(q)}$ и $\tilde{I} \stackrel{d}{=} I_{e(q)}$.

(f) Предположим, что существуют функции $f^+(z)$ и $f^-(z)$, удовлетворяющие следующим условиям: $f^\pm(0) = 1$; функция $f^\pm(z)$ является аналитической в $\mathbf{C}^\pm$, непрерывной и не равной нулю в $\overline{\mathbf{C}}^\pm$; $z^{-1} \ln f^\pm(z)$ стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$, $z \in \overline{\mathbf{C}}^\pm$. Если к тому же функции $f^+(z)$ и $f^-(z)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{q}{q + \Psi(z)} = f^+(z)f^-(z), \quad z \in \mathbf{R}, \quad (5)$$

то $f^\pm(z) = \phi_q^\pm(z)$ для всех $z \in \overline{\mathbf{C}}^\pm$.

Теорема 2 (тождество Печерского–Рогозина). Предположим, что $q > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ и $w \neq z$. Тогда

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{-wh} \mathbf{E} \exp\{-q\tau_h^+ - z(X_{\tau_h^+} - h)\} dh = \frac{1}{w - z} \left(1 - \frac{\varphi_q^+(iw)}{\varphi_q^+(iz)}\right). \quad (6)$$

3. Доказательства. Мы будем следовать следующей стратегии при доказательстве теоремы 1 и 2. Сначала мы изучим некоторые свойства функций $\varphi_q^\pm(z)$, определенных в (2), докажем факторизацию (3), верхнюю/нижнюю оценку для $|\varphi_q^\pm(z)|$ при $z \rightarrow \infty$, а также два свойства для преобразования Фурье от q -потенциальной меры. С помощью этих фактов мы докажем тождество Печерского–Рогозина (6) и теорему 1, (с), что является основным результатом данной статьи. После этого мы докажем утверждение о единственности (теорема 1, (е), (f)) и выражение факторов Винера–Хопфа через кумулянту (теорема 1, (b)).

Предложение 1. Из предположения 1 следует, что $\Psi(z)$ непрерывна по Гёльдеру с показателем ε .

Доказательство. Достаточно рассмотреть только ту часть $\Psi(z)$, которая отвечает за «большие» скачки процесса X , иначе говоря, интеграл по $\mathbf{R} \setminus [-1, 1]$ в формуле (1), так как оставшаяся часть является аналитической функцией от z и, следовательно, непрерывна по Гёльдеру с показателем 1. Доказательство утверждения вытекает из следующей оценки:

$$\left| \int_{\mathbf{R} \setminus [-1, 1]} (e^{ix(z+h)} - e^{ixz}) \Pi(dx) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= |h|^\varepsilon \left| \int_{\mathbf{R} \setminus [-1,1]} e^{ixz} (e^{ixh} - 1) |xh|^{-\varepsilon} |x|^\varepsilon \Pi(dx) \right| \\
&\leq |h|^\varepsilon \int_{\mathbf{R} \setminus [-1,1]} \frac{|e^{ixh} - 1|}{|xh|^{-\varepsilon}} |x|^\varepsilon \Pi(dx) \leq C_1 |h|^\varepsilon \int_{\mathbf{R} \setminus [-1,1]} |x|^\varepsilon \Pi(dx) = C_2 |h|^\varepsilon,
\end{aligned}$$

где в последнем неравенстве мы использовали тот факт, что $|e^{iy} - 1|/|y|^\varepsilon$ является ограниченной функцией. Утверждение 1 доказано.

Для $q > 0$ определим q -потенциальную меру следующим образом:

$$U^{(q)}(dx) = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-qt} \mathbf{P}(X_t \in dx) dt. \quad (7)$$

Лемма 1. Для $q > 0$, $z \in \mathbf{R}$ и $z_1, z_2 \in \mathbf{C}^+$ верно, что

$$\int_{\mathbf{R}} e^{izx} U^{(q)}(dx) = \frac{1}{q + \Psi(z)}, \quad (8)$$

$$\int_{\mathbf{R}^+} e^{iz_1 h} dh \int_{\mathbf{R}^+} e^{iz_2 x} U^{(q)}(dx + h) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{q + \Psi(u)} \frac{du}{(u - z_1)(u - z_2)}. \quad (9)$$

Доказательство. Формула (8) является довольно известным результатом, доказательство которого можно получить, применяя теорему Фубини к (7) и используя определение кумулянты $\Psi(z)$. Чтобы доказать (9), допустим сначала, что $\sigma > 0$, тогда существует функция плотности распределения $p_t(x) = \frac{d}{dx} \mathbf{P}(X_t \leq x)$, поэтому q -потенциальная мера $U^{(q)}(dx)$ является абсолютно непрерывной и имеет плотность

$$u^{(q)}(x) = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-qt} p_t(x) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-iux}}{q + \Psi(u)} du.$$

Используя предыдущее выражение, перепишем интеграл в левой части (9) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^+} e^{iz_1 h} dh \int_{\mathbf{R}^+} e^{iz_2 x} u^{(q)}(x + h) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^+} e^{iz_1 h} dh \int_{\mathbf{R}^+} e^{iz_2 x} dx \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-iu(x+h)}}{q + \Psi(u)} du.
\end{aligned}$$

Применяя теорему Фубини к правой части этого уравнения и вычисляя интегралы по x и h , мы получаем равенство (9). Доказательство (9) в случае $\sigma = 0$ получаем, переходя к пределу в обеих частях (9) при $\sigma \rightarrow 0^+$ и используя теорему о мажорируемой сходимости (следует отметить, что обе части равенства (9) корректно определены для всех $\sigma \geq 0$).

Доказательство теоремы 1, (а). Мы будем следовать методу доказательства леммы 6.15 в [14]. Используя интеграл Фруллани

$$\int_{\mathbf{R}^+} (1 - e^{-at}) t^{-1} e^{-bt} dt = \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right), \quad \operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re} b > 0,$$

мы получаем

$$\begin{aligned} -\ln \left(1 + \frac{\Psi(z)}{q} \right) &= \int_{\mathbf{R}^+} (e^{-\Psi(z)t} - 1) t^{-1} e^{-qt} dt \\ &= \int_{\mathbf{R}^+} dt \int_{\mathbf{R}} (e^{izx} - 1) \mathbf{P}(X_t \in dx) t^{-1} e^{-qt}. \end{aligned}$$

Соотношение (3) следует из предыдущего равенства и определения (2) функций $\varphi_q^\pm(z)$.

Лемма 2. $|\varphi_q^\pm(z)| \leq 1$ для всех $z \in \overline{\mathbf{C}}^\pm$ и $|\varphi_q^\pm(z)|^{-1} = O(|z|^2)$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \overline{\mathbf{C}}^\pm$.

Доказательство. Для начала докажем, что $z^{-1} \ln \varphi_q^+(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \overline{\mathbf{C}}^+$. Применяя теорему Фубини, перепишем (2) в виде

$$\ln \varphi_q^+(z) = \int_{\mathbf{R}^+} (e^{izx} - 1) \nu(dx), \quad (10)$$

где мера $\nu(dx)$ определена формулой

$$\nu(dx) = \int_{\mathbf{R}^+} t^{-1} e^{-qt} \mathbf{P}(X_t \in dx) dt.$$

Интегрируя правую часть (10) по частям, можно показать, что $z^{-1} \ln \varphi_q^+(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \overline{\mathbf{C}}^+$. Это свойство можно установить и другим способом, используя тот факт, что правая часть в (10) является кумулянтной некой положительной безгранично делимой случайной величины без сноса, и затем применяя результаты предложения 2, (ii) в [3].

Оценка $|\varphi_q^+(z)| \leq 1$ для всех $z \in \overline{\mathbf{C}}^+$ следует из того, что интеграл в правой части (2) имеет отрицательную действительную часть. Докажем оценку $|\varphi_q^+(z)|^{-1} = O(|z|^2)$. Используя уравнение факторизации (3), оценку $|\Psi(z)| = O(|z|^2)$ при $z \rightarrow \infty$ (см. [3, предложение 2]) и уже доказанное неравенство $|\varphi_q^-(z)| \leq 1$, мы заключаем, что существует константа $A > 0$ такая, что $|\varphi_q^+(z)|^{-1} < A(1 + z^2)$ для всех $z \in \mathbf{R}$. Введем функцию $F(z) = \varphi_q^+(z)^{-1}(z + i)^{-2}$. По построению, $F(z)$ является аналитической в $\mathbf{C}^+$, непрерывной в $\overline{\mathbf{C}}^+$ и ограниченной на вещественной оси. Мы уже показали, что

$$z^{-1} \ln F(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \overline{\mathbf{C}}^+.$$

Следовательно, применяя теорему Фрагмена–Линделёфа (см. [7, следствие 4.4]), мы видим, что функция $F(z)$ должна быть ограничена в $\overline{\mathbf{C}}^+$, откуда следует, что $|\varphi_q^+(z)|^{-1} = O(|z|^2)$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \overline{\mathbf{C}}^+$. Доказательство результата для $\varphi_q^-(z)$ может быть получено аналогичным способом. Лемма 2 доказана.

Следующий результат был доказан в [1], но для удобства читателя мы приводим основные шаги доказательства.

Лемма 3. Для $q > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$ и $\operatorname{Re} z \geq 0$ верно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-z S_{e(q)}} \cdot \int_{\mathbf{R}^+} e^{-wh} \mathbf{E} \exp[-q\tau_h^+ - z(X_{\tau_h^+} - h)] dh \\ = \frac{\mathbf{E} e^{-z S_{e(q)}} - \mathbf{E} e^{-w S_{e(q)}}}{w - z}. \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство основано на двух фактах:

(а) $\{S_{e(q)} > h\} \equiv \{\tau_h^+ < e(q)\}$,

(б) при условии $\{\tau_h^+ < e(q)\}$ случайная величина $S_{e(q)} - X_{\tau_h^+}$ имеет то же распределение, что и $S_{e(q)}$ (это следует из марковского свойства).

Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[e^{-z S_{e(q)}} \mathbf{I}(S_{e(q)} > h)] &= \mathbf{E}[e^{-z S_{e(q)}} \mathbf{I}(\tau_h^+ < e(q))] \\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{I}(\tau_h^+ < e(q)) e^{-z X_{\tau_h^+}} \mathbf{E}\left[e^{-z(S_{e(q)} - X_{\tau_h^+})} \mid \mathcal{F}_{\tau_h^+}\right]\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{I}(\tau_h^+ < e(q)) e^{-z X_{\tau_h^+}}\right] \cdot \mathbf{E} e^{-z S_{e(q)}} \\ &= \mathbf{E} e^{-q\tau_h^+ - z X_{\tau_h^+}} \cdot \mathbf{E} e^{-z S_{e(q)}}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства нужно умножить обе части вышеописанного равенства на $\exp(zh)$ и применить преобразование Лапласа по параметру h . Лемма 3 доказана.

Заметим, что равенства (6) и (11) похожи, но не эквивалентны. В (11) преобразование Лапласа от распределения τ_h^+ и $X_{\tau_h^+}$ выражается через распределение максимума $S_{e(q)}$, в то время как в (6) та же величина выражается через распределения процесса X . Поэтому для того, чтобы доказать теорему 2 (и теорему 1, (с)), нам необходимо установить, что функция $\varphi_q^+(z)$, определенная в (2), является характеристической функцией максимума $S_{e(q)}$.

Для дальнейшего доказательства нам понадобятся следующие обозначения. Пусть $\nu(dx_1, \dots, dx_n)$ — конечная мера на $(\mathbf{R}^+)^n$. Обозначим ее k -мерное преобразование Лапласа по переменным $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ через $\nu_{i_1, \dots, i_k}$. Те же обозначения будут использованы в случае, когда мера зависит от некоторых параметров. Например, для меры

$$p(h; dt, dx) = \mathbf{P}(\tau_h^+ \in dt; X_{\tau_h^+} - h \in dx), \quad h > 0, \quad t > 0, \quad x \geq 0,$$

определим

$$p_2(h; q, dx) = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-qt} p(h; dt, dx), \quad h > 0, \quad q > 0, \quad x \geq 0, \quad (12)$$

и аналогично для всех других индексов.

Доказательство теоремы 2 и теоремы 1, (с). В основе доказательства лежит следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^+} \mathbf{P}(\tau_h^+ \in ds; X_{\tau_h^+} - h \in dy) \mathbf{P}(X_{t-s} \in dx - y) \\ = \mathbf{P}(X_t \in dx + h), \quad x \geq 0, \quad h > 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение (13) можно получить, применяя марковское свойство в момент остановки τ_h^+ . Предположим, что $x \geq 0$, $h > 0$, $t > 0$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_t \in dx + h) &= \mathbf{P}(X_t \in dx + h; \tau_h^+ \leq t) \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{I}(\tau_h^+ \leq t) \mathbf{P}(X_t \in dx + h | \mathcal{F}_{\tau_h^+})] \\ &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^+} \mathbf{P}(\tau_h^+ \in ds; X_{\tau_h^+} - h \in dy) \mathbf{P}(X_t \in dx + h | \tau_h^+ = s, X_{\tau_h^+} = h + y) \\ &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^+} \mathbf{P}(\tau_h^+ \in ds; X_{\tau_h^+} - h \in dy) \mathbf{P}(X_{t-s} \in dx - y). \end{aligned}$$

Следует заметить, что для некоторых процессов Леви верно, что $\mathbf{P}(X_{\tau_h^+} = h) > 0$ (необходимые и достаточные условия можно найти в [14]). В этом случае мера $\mathbf{P}(\tau_h^+ \in ds; X_{\tau_h^+} - h \in dy)$ имеет атом в точке $y = 0$; это объясняет, почему мы интегрируем по *замкнутой* положительной полуоси в левой части уравнения (13).

План доказательства тождества Печерского–Рогозина таков: мы получим решение уравнения (13) путем приведения его к неоднородной краевой задаче Римана. Заметим, что интеграл по переменной s в (13) является сверткой, поэтому, применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (13), получаем

$$\int_{\mathbf{R}^+} p_2(h; q, dy) U^{(q)}(dx - y) = U^{(q)}(dx + h), \quad x \geq 0, \quad h > 0, \quad (14)$$

где мера $p_2(h; q, dy)$ определена в (12). Уравнение (14) является интегральным уравнением Винера–Хопфа. Чтобы решить его, применим следующий классический метод (см. [17]): введем три меры на $\mathbf{R}$

$$\begin{aligned} g^+(h; dx) &= U^{(q)}(dx + h) \mathbf{I}(x \geq 0), \\ p_2^+(h; q, dx) &= p_2(h; q, dx) \mathbf{I}(x \geq 0), \\ p_2^-(h; q, dx) &= \int_{\mathbf{R}^+} p_2(h; q, dy) U^{(q)}(dx - y) \mathbf{I}(x < 0) \end{aligned}$$

и перепишем (14) как уравнение свертки

$$\int_{\mathbf{R}} p_2^+(h; q, dy) U^{(q)}(dx - y) = g^+(h; dx) + p_2^-(h; q, dx) \quad (15)$$

при $x \in \mathbf{R}$, $h > 0$.

Отметим, хотя это и не требуется для дальнейшего доказательства, что интегральное уравнение (15) имеет очень простую интерпретацию с точки зрения теории вероятностей. Если умножить обе части (15) на q , использовать тождество $p_2(h; q, dx) = \mathbf{P}(\tau_h^+ < e(q); X_{\tau_h^+} - h \in dx)$ (которое следует из (12)) и тот факт, что $\{\tau_h^+ < e(q)\} \equiv \{S_{e(q)} > h\}$, то нетрудно убедиться, что (15) эквивалентно тождеству

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_{e(q)} > h; X_{e(q)} \in h + dx) &= \mathbf{P}(X_{e(q)} \in h + dx) \mathbf{I}(x \geq 0) \\ &\quad + \mathbf{P}(S_{e(q)} > h; X_{e(q)} \in h + dx) \mathbf{I}(x < 0). \end{aligned}$$

Далее, чтобы упростить уравнение (15), применим преобразование Фурье по переменной x и, используя (8), получим

$$p_{2,3}^+(h; q, z) (q + \Psi(z))^{-1} = g_2^+(h; z) + p_{2,3}^-(h; q, z), \quad z \in \mathbf{R}, \quad h > 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) является краевой задачей Римана. Чтобы найти решение этой задачи, нам нужно применить еще одно преобразование Лапласа по параметру h , которое упростит свободный член в (16), так как мера $g^+(h; dx)$ зависит только от $h + dx$. Итак, применяя преобразование Лапласа по параметру h в обеих частях уравнения (16), получаем

$$f^+(z) (q + \Psi(z))^{-1} = g^+(z) + f^-(z), \quad z \in \mathbf{R}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} f^+(z) &= p_{1,2,3}^+(w; q, z) = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-wh} p_{2,3}^+(h; q, z) dh \\ &= \int_{\mathbf{R}^+} e^{-wh} \mathbf{E} \exp[-q\tau_h^+ + iz(X_{\tau_h^+} - h)] dh \end{aligned} \quad (18)$$

и функции $g^+(z) = g_{1,2}^+(w; z)$ и $f^-(z) = p_{1,2,3}^-(w; q, z)$ определены аналогичным образом.

Теперь наша основная цель состоит в решении краевой задачи (17) путем приведения этого уравнения к форме, где левая (соответственно правая) часть является функцией, аналитической в $\mathbf{C}^+$ (соответственно в $\mathbf{C}^-$). Используя уравнение факторизации (3), перепишем (17) в виде

$$\tilde{f}^+(z) - \tilde{f}^-(z) = \frac{g^+(z)}{\varphi_q^-(z)}, \quad z \in \mathbf{R}, \quad (19)$$

где

$$\tilde{f}^+(z) = q^{-1} f^+(z) \varphi_q^+(z) \quad \text{для } z \in \overline{\mathbf{C}}^+, \quad \tilde{f}^-(z) = \frac{f^-(z)}{\varphi_q^-(z)} \quad \text{для } z \in \overline{\mathbf{C}}^-. \quad (20)$$

Из уравнения (9) следует, что

$$g^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(q + \Psi(u))(w + iu)} \frac{du}{u - z}, \quad z \in \mathbf{C}^+.$$

С помощью формул Сохоцкого (см. [9], [17]) получим

$$g^+(z) = \frac{1}{(q + \Psi(z))(w + iz)} + g^-(z), \quad z \in \mathbf{R}, \quad (21)$$

где функция

$$g^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(q + \Psi(u))(w + iu)} \frac{du}{u - z}, \quad z \in \mathbf{C}^-,$$

является аналитической в $\mathbf{C}^-$ и стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. Заметим, что применение формул Сохоцкого обоснованно, так как в предложении 1 мы доказали, что $\Psi(u)$ непрерывна по Гёльдеру. Далее, используя (21) и уравнение факторизации (3) в форме $(q + \Psi(z))^{-1} \varphi_q^-(z)^{-1} = q^{-1} \varphi_q^+(z)$, запишем (19) в виде

$$\tilde{f}^+(z) - \tilde{f}^-(z) = q^{-1} \frac{\varphi_q^+(z)}{w + iz} + \frac{g^-(z)}{\varphi_q^-(z)}, \quad z \in \mathbf{R},$$

откуда следует

$$\tilde{f}^+(z) - q^{-1} \frac{\varphi_q^+(z) - \varphi_q^+(iw)}{w + iz} = \tilde{f}^-(z) + \frac{g^-(z)}{\varphi_q^-(z)} + q^{-1} \frac{\varphi_q^+(iw)}{w + iz} \quad (22)$$

для $z \in \mathbf{R}$, $w > 0$. Левая (соответственно правая) часть (22) является аналитической функцией в области $\mathbf{C}^+$ (соответственно $\mathbf{C}^-$). Этот факт легко проверить, используя определение (20) и следующие свойства: (а) $f^\pm(z)$ и $\varphi_q^\pm(z)$ аналитичны в $\mathbf{C}^\pm$, (б) $\varphi_q^-(z) \neq 0$ для $z \in \mathbf{C}^-$.

Далее, докажем, что левая часть (22) ограничена в области $\overline{\mathbf{C}}^+$, в то время как правая часть (22) имеет оценку $O(|z|^2)$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \overline{\mathbf{C}}^-$. Данный факт может быть установлен следующим образом. Из уравнения (18) следует, что $f^+(z)$ ограничена в области $\overline{\mathbf{C}}^+$, поэтому, используя лемму 2 и (20), мы получим, что $\tilde{f}^+(z)$ ограничена в области $\overline{\mathbf{C}}^+$. Так как функция $\varphi_q^+(z)$ ограничена (лемма 2), мы приходим к выводу, что левая часть (22) тоже ограничена в $\overline{\mathbf{C}}^+$. Аналогичным способом легко показать, что правая сторона имеет оценку сверху $O(|z|^2)$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \overline{\mathbf{C}}^-$.

Определим функцию $F(z)$, которая равна левой (соответственно правой) части (22) при $z \in \overline{\mathbf{C}}^+$ (соответственно $z \in \overline{\mathbf{C}}^-$). Эта функция определена корректно для $z \in \mathbf{R}$ благодаря граничному условию (22). Функция $F(z)$ аналитична в $\mathbf{C}^+$ и $\mathbf{C}^-$, непрерывна на $\mathbf{R}$; следовательно, применяя теорему Мореры (см. [7]), мы заключаем, что $F(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости. Далее, $F(z) = O(|z|^2)$ при $z \rightarrow \infty$, поэтому с помощью оценки Коши (см. [7]) мы находим, что $F(z)$ является многочленом степени не больше двух. Используя тот факт, что $F(z)$

ограничена в $\mathbf{C}^+$, мы делаем вывод, что $F(z) \equiv B$ для некоторой константы $B \in \mathbf{C}$ (заметим, что B может зависеть от q и w). Из этого свойства и определения функции $F(z)$ следует, что для всех $z \in \mathbf{C}^+$

$$\tilde{f}^+(z) - q^{-1} \frac{\varphi_q^+(z) - \varphi_q^+(iw)}{w + iz} = B(q, w). \quad (23)$$

Используя соотношения (20), (18) и (11), приходим к выводу, что для $\operatorname{Re} z \geq 0$, $\operatorname{Re} w > 0$ и $q > 0$

$$\frac{\varphi_q^+(z)}{\mathbf{E} e^{izS_{e(q)}}} \frac{\mathbf{E} e^{izS_{e(q)}} - \mathbf{E} e^{-wS_{e(q)}}}{w + iz} - \frac{\varphi_q^+(z) - \varphi_q^+(iw)}{w + iz} = qB(q, w).$$

Рассматривая последнее равенство, нетрудно убедиться, что $B(q, w) \equiv 0$ и $\varphi_q^+(z) = \mathbf{E} e^{izS_{e(q)}}$, что в свою очередь доказывает тождество Печерского–Рогозина и теорему 1, (с). Идея следующего доказательства позаимствована из доказательства леммы 45.6 в [19].

Доказательство теоремы 1, (f). Определим $F(z)$ формулой

$$F(z) = \begin{cases} \frac{\phi_q^-(z)}{f^-(z)}, & \text{если } z \in \overline{\mathbf{C}}^-, \\ \frac{f^+(z)}{\phi_q^+(z)}, & \text{если } z \in \overline{\mathbf{C}}^+. \end{cases}$$

Функция $F(z)$ определена корректно для $z \in \mathbf{R}$ благодаря (3) и (5). Из свойств функций $\varphi_q^\pm(z)$ и предположений о функциях $f^\pm(z)$ следует, что $F(z)$ аналитична в $\mathbf{C}^+$ и $\mathbf{C}^-$ и непрерывна в $\mathbf{C}$. Следовательно, с помощью теоремы Мореры (см. [7]) мы находим, что $F(z)$ является целой функцией. Более того, по построению функция $F(z)$ не имеет нулей в $\mathbf{C}$, поэтому ее логарифм тоже является целой функцией.

Как было показано в доказательстве леммы 2, $z^{-1} \ln \varphi_q^\pm(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \overline{\mathbf{C}}^\pm$. По предположению, функции $f^\pm(z)$ тоже удовлетворяют вышеупомянутому свойству, поэтому $z^{-1} \ln F(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ во всей плоскости. Используя оценку Коши (см. [7]), делаем вывод, что $\ln F(z)$ является константой. Эта константа равна нулю, так как $f^\pm(0) = \phi_q^\pm(0) = 1$.

Доказательство теоремы 1, (d). Свойство безграничной делимости случайной величины $S_{e(q)}$ следует из уже доказанного факта $\mathbf{E} \exp[izS_{e(q)}] = \varphi_q^+(z)$ и равенства (10).

Доказательство теоремы 1, (b). Определим

$$f^\pm(z) = \pm \frac{z}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \ln \left(\frac{q}{q + \Psi(u)} \right) \frac{du}{u(u - z)}, \quad z \in \mathbf{C}^\pm. \quad (24)$$

Докажем, что интеграл в правой части (24) существует при $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Используя тот факт, что кумулянта $\Psi(u)$ непрерывна по Гёльдеру с

показателем ε (см. утверждение 1), и свойство $\Psi(0) = 0$, мы находим, что функция под знаком интеграла имеет оценку $O(|u|^{\varepsilon-1})$ при $u \rightarrow 0$ и поэтому интегрируема в окрестности нуля. Далее, предложение 2, (i) в [3] дает нам оценку $\Psi(z) = O(z^2)$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \mathbf{R}$, поэтому функция под знаком интеграла допускает оценку $O(\ln(|u|)/u^2)$ при $u \rightarrow \infty$, и мы заключаем, что данный интеграл сходится абсолютно.

Применяя формулы Сохоцкого, мы находим, что функции $\exp[f^\pm(z)]$ удовлетворяют факторизации (3) при $z \in \mathbf{R}$, $z \neq 0$. Остается проверить, что факторизация (3) верна при $z = 0$, т.е. надо показать, что $f^\pm(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$. Обозначим $z = r \exp[i\alpha]$ и сделаем в (24) замену переменной $u \mapsto rw$:

$$\begin{aligned} f^+(z) &= \frac{e^{i\alpha}}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \ln \left(\frac{q}{q + \Psi(wr)} \right) \frac{dw}{w(w - e^{i\alpha})} \\ &= \frac{r^\varepsilon e^{i\alpha}}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \left[\frac{\ln(q/(q + \Psi(wr)))}{r^\varepsilon w^\varepsilon} \right] \frac{dw}{w^{1-\varepsilon}(w - e^{i\alpha})}. \end{aligned}$$

Функция внутри квадратных скобок ограничена по переменной w равномерно по r , поэтому интеграл в правой части является ограниченной функцией от r , откуда следует, что $f^+(z) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0^+$. Далее, из (24) и свойства интегралов типа Коши (см. [9]) следует, что $z^{-1}f^\pm(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, поэтому, применяя уже доказанный результат о единственности (теорема 1, (f)), мы делаем вывод, что $\exp[f^\pm(z)] = \varphi_q^\pm(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. (e) следует из утверждений (d) и (f) теоремы 1.

З а м е ч а н и е 2. Уравнение (4) было впервые доказано в [15] (лемма 4.2) при условии интегрируемости, которое похоже на наше предположение 1. Кроме того, это уравнение напоминает формулы (3.10), (3.12) в [6], полученные для класса процессов, у которых мера Леви имеет экспоненциально убывающие «хвосты».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alili L., Kyprianou A.E. Some remarks on first passage of Lévy processes, the American put and pasting principles. — Ann. Appl. Probab., 2005, v. 15, № 3, p. 2062–2080.
2. Baxter G., Donsker M.D. On the distribution of the supremum functional for processes with stationary independent increments. — Trans. Amer. Math. Soc., 1957, v. 85, p. 73–87.
3. Bertoin J. Lévy Processes. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996 265 p.
4. Боровков А.А. О времени первого прохождения для одного класса процессов с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 360–364.
5. Боровков А.А. О факторизационных тождествах и свойствах распределения супремума последовательных сумм. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, в. 3, с. 377–418.

6. *Boyarchenko S. I., Levendorskii S. Z.* Perpetual American options under Lévy processes. — SIAM J. Control Optim., 2002, v. 40, № 6, p. 1663–1696.
7. *Conway J. B.* Functions of One Complex Variable. New York–Berlin: Springer-Verlag, 1978, 317 p.
8. *Doney R. A.* Fluctuation theory for Lévy processes. — Lecture Notes in Math., 2007, v. 1897, p. 1–147.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963, 639 с.
10. *Greenwood P.* Wiener–Hopf methods, decompositions, and factorisation identities for maxima and minima of homogeneous random processes. — Adv. Appl. Probab., 1975, v. 7, № 4, p. 767–785.
11. *Greenwood P., Pitman J.* Fluctuation identities for Lévy processes and splitting at the maximum. — Adv. Appl. Probab., 1980, v. 12, № 4, p. 893–902.
12. *Гусак Д. В.* О совместном распределении времени и величины первого перескока для однородных процессов с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, в. 1, с. 15–23.
13. *Гусак Д. В., Королюк В. С.* О моменте первого прохождения заданного уровня для процессов с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, в. 3, с. 423–430.
14. *Kyprianou A. E.* Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2006, 373 p.
15. *Lewis A. L., Mordecki E.* Wiener–Hopf factorization for Lévy processes having positive jumps with rational transforms. — J. Appl. Probab., 2008, v. 45, № 1, p. 118–134.
16. *Печерский Е. А., Рогозин Б. А.* О совместных распределениях случайных величин, связанных с флуктуациями процесса с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, в. 3, с. 431–444.
17. *Polyanin A. D., Manzhirov A. V.* Handbook of Integral Equations. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2008, 1108 p.
18. *Рогозин Б. А.* О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 3, с. 497–500.
19. *Sato K.* Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 486 p.
20. *Штатланд Э. С.* Распределение момента достижения максимума для процесса с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 4, с. 720–726.
21. *Spitzer F.* A combinatorial lemma and its applications to probability theory. — Trans. Amer. Math. Soc., 1956, v. 82, p. 323–339.
22. *Ступер Ф.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.
23. *Золотарев В. М.* Момент первого прохождения уровня и поведение на бесконечности одного класса процессов с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, в. 4, с. 724–733.

Поступила в редакцию
19.V.2009