Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Сенатов, О квазинеравномерных оценках точности аппроксимации в центральной предельной теореме, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 3, 432–445

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 10:55:05

© 2010 г.

СЕНАТОВ В. В.*

**О КВАЗИНЕРАВНОМЕРНЫХ ОЦЕНКАХ ТОЧНОСТИ
АППРОКСИМАЦИИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ
ТЕОРЕМЕ¹⁾**

Предложены оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме, которые можно назвать квазинеравномерными. Они имеют преимущества как перед равномерными, так и перед неравномерными оценками.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, оценки скорости сходимости.

Цель этой работы — продемонстрировать оценки точности аппроксимации в центральной предельной теореме (ЦПТ), которые мы будем называть квазинеравномерными.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины, имеющие общее распределение P с нулевым средним и единичной дисперсией, для которых третий абсолютный момент $\beta_3 = \mathbf{E}|X_1|^3$ конечен. Обозначим P_n распределение нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)n^{-1/2}$, Φ — стандартный нормальный закон и $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ — его плотность. Пусть для данного числа n существует плотность p_n распределения P_n . Нас интересует вопрос об оценке величины $|p_n(x) - \varphi(x)|$. Для нее известны как равномерные оценки, которые не зависят от x , так и неравномерные оценки, которые стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. (Различные равномерные и неравномерные оценки для разности функций распределения можно найти в [2].)

Мы получим верхние оценки величины $|p_n(x) - \varphi(x)|$, которые состоят из двух частей. Одна из них не зависит от x , но она убывает при росте n быстрее, чем (неулучшаемые) равномерные оценки. Ее мы будем называть равномерной частью квазинеравномерной оценки. Вторая, которую мы будем называть неравномерной частью квазинеравномерной оценки, при росте n убывает с той же скоростью, что (оптимальные

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: v.senatov@yandex.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №08-01-00563, 09-01-1217 ОФИ-М).

по n) равномерные и неравномерные оценки, но ее зависимость от x в ряде случаев лучше, чем у (неулучшаемых по x) неравномерных оценок.

Мы будем предполагать, что для некоторого числа $\nu > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt < \infty, \quad (1)$$

где f — характеристическая функция распределения P . Выполнение этого условия гарантирует существование непрерывной и ограниченной плотности $p_n(x)$ при $n \geq \nu$, ее можно вычислять по формуле обращения

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

При выполнении условия (1) величина

$$\alpha = \alpha(T) = \max \left\{ |f(t)| : t \geq T \right\}$$

строго меньше единицы для любого $T > 0$.

Нам понадобится пара (μ, T) , состоящая из функции $\mu(t)$, $e^{-t^2/2} \leq \mu(t) \leq 1$, и числа $T > 0$ такая, что

$$|f(t)| \leq \mu(t) \text{ для всех } |t| \leq T. \quad (2)$$

С помощью пары (μ, T) введем числа

$$B_{k,n-l} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^{n-l}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt,$$

где $k > 0$, $n \geq 2$, $0 \leq l \leq n$ (здесь, строго говоря, нужно использовать третий индекс, но мы этого делать не будем). О выборе пары (μ, T) подробно говорится в [3, гл. 4, § 8]. В случае $\beta_3 < \infty$ в качестве пары (μ, T) можно взять $\mu(t) = e^{-t^2/3}$ и $T = 1/\beta_3$. Для некоторых распределений P (заведомо для любого распределения с конечным четвертым моментом) пару (μ, T) можно подобрать так, что $B_{k,n-l} \rightarrow \bar{\beta}_k/\sqrt{2\pi} = B_k$ при $n \rightarrow \infty$ для любых фиксированных k и l , где $\bar{\beta}_k$ — абсолютный момент порядка k стандартного нормального закона.

Нам понадобятся многочлены Чебышёва–Эрмита

$$H_k(x) = (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}(x)}{\varphi(x)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и функции

$$\psi_k(x) = \max_{u \geq x} |H_k(u)| \varphi(u), \quad x > 0.$$

Далее мы обозначаем $\alpha_k = \mathbf{E} X_1^k$, $k = 0, 1, \dots$,

$$\beta_s = \mathbf{E} |X_1|^s, \quad \beta_s^+ = \int_0^{\infty} x^s P(dx), \quad s > 0.$$

Оценки, предложенные ниже, не претендуют на роль окончательных результатов, но автор надеется, что они дадут некую почву для размышлений.

Теорема. Если четвертый момент распределения P конечен, $\beta_{m'+2}^+ < \infty$ для некоторого $m' \geq 2$ и выполнено условие (1), то при $n \geq \max(\nu, 2)$ для всех $x > 0$

$$\begin{aligned}
 |p_n(x) - \varphi(x)| \leq & \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n-2}}{n} + \frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{12} \frac{\lambda^6 B_5}{n^{3/2}} \\
 & + \frac{|\alpha_3|}{3! \sqrt{n}} |H_3(x)| \varphi(x) + \frac{\beta_4 + 3}{4! n} \psi_4(x/2) \\
 & + \frac{2^{m'+2} \beta_{m'+2}^+}{\sqrt{2\pi} n^{m'/2} x^{m'+2}} + \frac{\beta_{m'+2}^+ + \bar{\beta}_{m'+2}/2}{n^{m'/2}} \sum_{k=0}^3 \frac{|H_k(x)| \varphi(x)}{k!} \left(\frac{2}{x} \right)^{m'+2-k} \\
 & + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu} \int_T^\infty |f(t)|^\nu dt + \left(\frac{2\sqrt{n}}{\pi T} + \frac{1}{\pi T \sqrt{n}} \right) e^{-T^2 n/2} \\
 & + \frac{\sqrt{n}}{\pi x} e^{-x^2 n/8}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

При $n \geq \max(\nu, 3)$ справедливо также неравенство

$$\begin{aligned}
 |p_n(x) - \varphi(x)| \leq & \frac{1}{3!} \left(\frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{3!} \right)^3 \frac{B_{9,n-3}}{n^{3/2}} + \frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{12} \frac{\lambda^6 B_5}{n^{3/2}} \\
 & + \frac{|\alpha_3|}{3!} \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{n}{n-2} \right)^4 \frac{B_7}{n^{3/2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_4 + 3}{4!} \right)^2 \left(\frac{n}{n-2} \right)^{9/2} \frac{B_8}{n^2} \\
 & + \frac{|\alpha_3|}{3! \sqrt{n}} |H_3(x)| \varphi(x) + \frac{\beta_4 + 3}{4! n} \psi_4(x/2) \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{7/2} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 \frac{1}{n} \left| H_6 \left(\sqrt{\frac{n}{n-2}} x \right) \right| \varphi \left(\sqrt{\frac{n}{n-2}} x \right) \\
 & + \frac{2^{m'+2} \beta_{m'+2}^+}{\sqrt{2\pi} n^{m'/2} x^{m'+2}} + \frac{\beta_{m'+2}^+ + \bar{\beta}_{m'+2}/2}{n^{m'/2}} \sum_{k=0}^3 \frac{|H_k(x)| \varphi(x)}{k!} \left(\frac{2}{x} \right)^{m'+2-k} \\
 & + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu} \int_T^\infty |f(t)|^\nu dt + \left(\frac{2\sqrt{n}}{\pi T} + \frac{1}{\pi T \sqrt{n}} \right) e^{-T^2 n/2} \\
 & + \frac{2n^{3/2}}{\pi T} \frac{n}{n-2} e^{-T^2(n-2)/2} + \frac{\sqrt{n}}{\pi x} e^{-x^2 n/8}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\lambda = \sqrt{n/(n-1)}$ и величина T — та же, что в (2).

Отметим, что $H_3(x) = x^3 - 3x$ и $\bar{\beta}_3 = 2\sqrt{2/\pi}$, число 3 в четвертом слагаемом правой части (3) совпадает с $\bar{\beta}_4$, величину $\bar{\beta}_{m'+2}$ в шестом слагаемом правой части (3) можно заменить функцией, убывающей экспоненциально быстро при $x\sqrt{n} \rightarrow \infty$. Пятое слагаемое в правой части (3)

можно заменить величиной

$$\frac{n}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - F \left(\frac{x\sqrt{n}}{2} \right) \right),$$

где F — функция распределения меры P ; если $F(u) = 1$ для некоторого $u > 0$, то это слагаемое равно нулю при $x\sqrt{n} > 2u$.

В теореме мы рассматриваем только положительные значения переменной x . Для того чтобы получить оценки при отрицательных x , достаточно перейти от случайных величин $X_1, X_2, \dots$ к величинам $-X_1, -X_2, \dots$.

Формально квазинеравномерные оценки в ЦПТ можно получать из асимптотических разложений с явными оценками остаточных частей. Например, из теоремы 1, приведенной в [4], следует, что

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{|\alpha_3|}{3! \sqrt{n}} |H_3(x)| \varphi(x) + R.$$

Явный вид оценки для $|R|$ указан в [4], одним из слагаемых этой оценки является величина $((\beta_4 + 3)/4!)(B_{4,n-1}/n)$. Равномерные части квазинеравномерных оценок, получаемых таким путем, связаны с моментами максимальных порядков из тех, что используются в разложениях. В отличие от этого, в неравенстве (3), приведенном выше, равномерная часть квазинеравномерной оценки связана с абсолютным моментом третьего порядка, а момент четвертого порядка участвует в неравномерной части квазинеравномерной оценки.

Оценки нашей теоремы достаточно громоздки, но с помощью асимптотических разложений для плотностей p_n нетрудно понять происхождение и тем самым отчасти оправдать появление некоторых слагаемых в этих оценках. Если у распределения P существуют моменты достаточно высоких порядков и выполнено условие (1), то при больших n для плотности p_n справедливы асимптотические разложения, которые является суммами слагаемых, среди которых

$$\begin{aligned} \varphi(x), \quad \frac{\theta_3}{3! \sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x), \quad \frac{\theta_4}{4! n} H_4(x) \varphi(x), \quad \frac{n-1}{2n} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{1}{n} H_6(x) \varphi(x), \\ \frac{\theta_5}{5! n^{3/2}} H_5(x) \varphi(x), \quad \frac{n-1}{n} \frac{\theta_3}{3!} \frac{\theta_4}{4!} \frac{1}{n^{3/2}} H_7(x) \varphi(x), \\ \frac{1}{3!} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^3 \frac{1}{n^{3/2}} H_9(x) \varphi(x), \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \frac{1}{n^2} H_8(x) \varphi(x), \end{aligned}$$

где θ_k — моменты Чебышёва–Эрмита распределения P (см. [3], [4]); отметим, что $\theta_3 = \alpha_3$ и $\theta_4 = \alpha_4 - 3$. Поэтому появление в правой части (3) третьего и четвертого слагаемых, а также появление в правой

части (4) пятого, шестого и седьмого слагаемых совсем неудивительно. Величины B_k являются оценками величин $\max_{-\infty < x < \infty} |H_k(x)|\varphi(x)$, поэтому столь же неудивительно появление первого слагаемого в правой части (3), а также первого, третьего и четвертого слагаемых в (4). Вторые слагаемые в (3) и (4) дают оценки величины $|\alpha_3||H_5(x)|\varphi(x)/(12n^{3/2})$ а число $\alpha_3/12$ участвует в формировании величины $\theta_5/5!$, которая равна $\alpha_5/5! - \alpha_3/12$.

Доказательство теоремы. Очевидно, что при $n \geq \nu$

$$\begin{aligned} p_n(x) - \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) dt + R, \end{aligned} \quad (5)$$

где $g(t) = e^{-t^2/2}$, величина T — та же, что в (2), а

$$\begin{aligned} |R| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^n dt + \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \left| g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^n dt \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\pi} \int_T^{\infty} |f(t)|^n dt + \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu} \int_T^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt + \frac{1}{\pi T \sqrt{n}} e^{-T^2 n/2}. \end{aligned}$$

Правая часть последнего неравенства при росте n убывает экспоненциально быстро.

Дважды используя хорошо известное тождество

$$a^n - b^n = \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j-1} b^j (a - b), \quad (6)$$

справедливое для любого натурального n и любых комплексных чисел a и b , мы для $n \geq 2$ можем записать первое слагаемое в правой части (5) в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} f^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \left(f^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g^{n-j-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) g^j\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ &\quad \times \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) dt \\ &\quad + \frac{n}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} g^{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{n-j-2} \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} f^{n-j-l-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^{j+l}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&\quad \times \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 dt \\
&\quad + \frac{n}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} e^{-(n-1)t^2/(2n)} \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) dt. \quad (7)
\end{aligned}$$

Из формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме следует, что при всех действительных t

$$f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \gamma \frac{\beta_3}{3!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3.$$

Здесь и далее мы используем одно и то же обозначение γ для непрерывных комплекснозначных функций таких, что $|\gamma| \leq 1$. Аналогичное равенство, в котором β_3 заменяется на $\bar{\beta}_3$, справедливо и для $g(t/\sqrt{n})$. Поэтому при всех действительных t

$$\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq \frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{3!} \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^3$$

и мы видим, что абсолютная величина каждого слагаемого из двойной суммы в правой части (7) не превосходит

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} \mu^{n-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \left(\frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{3!}\right)^2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6 dt = \left(\frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{3!}\right)^2 \frac{B_{6,n-2}}{n^3}$$

и абсолютная величина всей двойной суммы не превосходит

$$\frac{n^2}{2} \left(\frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{3!}\right)^2 \frac{B_{6,n-2}}{n^3}.$$

Так как $|e^{t^2/(2n)} - 1| \leq t^2(2n)^{-1}e^{t^2/2n}$ при всех действительных t , то последнее слагаемое в правой части (7) есть

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} e^{t^2/(2n)} e^{-t^2/2} \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) dt \\
&= \frac{n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) dt + R_1 + R_2,
\end{aligned}$$

где

$$|R_1| \leq \frac{n}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-(n-1)t^2/(2n)} \frac{t^2}{2n} \frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{3!} \left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^3 dt \leq \frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{12} \frac{\lambda^6 B_5}{n^{3/2}}$$

и

$$|R_2| \leq \frac{n}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2} \cdot 2 dt \leq \frac{2\sqrt{n}}{\pi T} e^{-T^2 n/2}.$$

Из формулы обращения для преобразования Фурье следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y) (P_1 - \Phi_1)(dy),$$

где P_1 — распределение случайной величины $X_1/\sqrt{n}$, а Φ_1 — нормальный закон с нулевым средним и дисперсией $1/n$.

Из сказанного следует, что

$$p_n(x) - \varphi(x) = n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y) (P_1 - \Phi_1)(dy) + R, \quad (8)$$

где

$$|R| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n-2}}{n} + \frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{12} \frac{\lambda^6 B_5}{n^{3/2}} + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu} \int_T^{\infty} |f(t)|^n dt + \left(\frac{2\sqrt{n}}{\pi T} + \frac{1}{\pi T \sqrt{n}} \right) e^{-T^2 n/2}.$$

Правая часть последнего неравенства является равномерной частью квазинеравномерной оценки (3).

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (8). Пусть $x > 0$ и для некоторого целого числа $m \geq 2$ и числа $m' \geq m$ величины

$$\beta_{m+2} = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{m+2} P(du) \quad \text{и} \quad \beta_{m'+2}^+ = \int_0^{\infty} u^{m'+2} P(du)$$

конечны. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\begin{aligned} \varphi(x-y) &= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} (-y)^k + \frac{\varphi^{(m+2)}(x-\theta y)}{(m+2)!} (-y)^{m+2} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{H_k(x)\varphi(x)}{k!} y^k + \frac{H_{m+2}(x-\theta y)\varphi(x-\theta y)}{(m+2)!} y^{m+2}, \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta \leq 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} &n \int_{-\infty}^{x/2} \varphi(x-y) (P_1 - \Phi_1)(dy) \\ &= n \sum_{k=0}^{m+1} \frac{H_k(x)\varphi(x)}{k!} \int_{-\infty}^{x/2} y^k (P_1 - \Phi_1)(dy) \\ &\quad + n \int_{-\infty}^{x/2} \frac{H_{m+2}(x-\theta y)\varphi(x-\theta y)}{(m+2)!} y^{m+2} (P_1 - \Phi_1)(dy) \\ &= n \sum_{k=3}^{m+1} \frac{H_k(x)\varphi(x)}{k!} \frac{\Delta_k}{n^{k/2}} \\ &\quad - \left\{ n \sum_{k=0}^{m+1} \frac{H_k(x)\varphi(x)}{k!} \int_{x/2}^{\infty} y^k (P_1 - \Phi_1)(dy) \right\} + R, \quad (9) \end{aligned}$$

где Δ_k — разность моментов порядка k распределений P и Φ (отсутствие в первой сумме правой части последнего равенства слагаемых, соответствующих $k = 0, 1$ и 2 , связано с тем, что $\int_{-\infty}^{\infty} P(dy) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(dy)$ и первые два момента распределений P и Φ совпадают), а

$$|R| \leq n \frac{\psi_{m+2}(x/2)}{(m+2)!} \int_{-\infty}^{x/2} |y|^{m+2} (P_1 + \Phi_1)(dy) \leq \frac{\beta_{m+2} + \bar{\beta}_{m+2}}{(m+2)! n^{m/2}} \psi_{m+2}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Модуль выражения в фигурных скобках в (9) можно оценить величиной

$$\begin{aligned} n \sum_{k=0}^{m+1} \frac{|H_k(x)|\varphi(x)}{k!} \left(\frac{2}{x}\right)^{m'+2-k} \int_{x/2}^{\infty} y^{m'+2} (P_1 + \Phi_1)(dy) \\ \leq \frac{\beta_{m'+2}^+ + \bar{\beta}_{m'+2}/2}{n^{m'/2}} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{|H_k(x)|\varphi(x)}{k!} \left(\frac{2}{x}\right)^{m'+2-k}. \end{aligned}$$

Нам осталось рассмотреть величину

$$n \int_{x/2}^{\infty} \varphi(x-y) (P_1 - \Phi_1)(dy).$$

Ее модуль не превосходит

$$\begin{aligned} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{x\sqrt{n}/2}^{\infty} (P + \Phi)(dy) &\leq \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{x\sqrt{n}}\right)^{m'+2} \beta_{m'+2}^+ + \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{x\sqrt{n}/2}^{\infty} \varphi(y) dy \\ &\leq \frac{2^{m'+2} \beta_{m'+2}^+}{\sqrt{2\pi} n^{m'/2} x^{m'+2}} + \frac{\sqrt{n}}{\pi x} e^{-x^2 n/8}. \end{aligned}$$

Из сказанного следует, что первое слагаемое в правой части (8) при $m = 2$ (т.е. при конечности момента β_4) и при $m' \geq 2$ есть

$$\frac{\alpha_3}{3! \sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + R,$$

где

$$\begin{aligned} |R| &\leq \frac{\beta_4 + 3}{4! n} \psi_4\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\beta_{m'+2}^+ + \bar{\beta}_{m'+2}/2}{n^{m'/2}} \sum_{k=0}^3 \frac{|H_k(x)|\varphi(x)}{k!} \left(\frac{2}{x}\right)^{m'+2-k} \\ &\quad + \frac{2^{m'+2} \beta_{m'+2}^+}{\sqrt{2\pi} n^{m'/2} x^{m'+2}} + \frac{\sqrt{n}}{\pi x} e^{-x^2 n/8}. \end{aligned} \quad (10)$$

Собирая вместе полученные оценки, мы убеждаемся в справедливости неравенства (3).

Для того чтобы доказать неравенство (4), перепишем двойную сумму из (7) в виде

$$\sum_{j=0}^{n-2} \frac{j+1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} f^{n-j-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) g^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 dt.$$

Применяя еще раз тождество (6) (напомним, что $n \geq 3$), мы видим, что эта сумма равна

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n-3} \frac{j+1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \left(f^{n-j-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g^{n-j-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right) g^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\
& \quad \times \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^2 dt \\
& + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{j+1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} g^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^2 dt \\
& = \sum_{j=0}^{n-3} \frac{j+1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-j-3} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} f^{n-j-l-3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g^{j+l} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\
& \quad \times \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^3 dt \\
& + C_n^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} g^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^2 dt.
\end{aligned}$$

Используя полученную ранее оценку для $|f(t/\sqrt{n}) - g(t/\sqrt{n})|$, мы видим, что абсолютная величина правой части этого равенства, за исключением последнего слагаемого, не превосходит

$$C_n^3 \left(\frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{3!} \right)^3 \frac{B_{9,n-3}}{n^{9/2}}.$$

Последнее же слагаемое в правой части этого равенства есть

$$C_n^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^2 dt + R, \quad (11)$$

где

$$|R| \leq C_n^2 \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} e^{-(n-2)t^2/(2n)} \cdot 4 dt \leq \frac{2n^{3/2}}{\pi T} \frac{n}{n-2} e^{-(n-2)T^2/2}.$$

Рассмотрим первое слагаемое в (11). Так как

$$f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \frac{\alpha_3}{3!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^3 + \gamma \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4,$$

то оно равно

$$C_n^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-(n-2)t^2/(2n)} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^6 dt + R, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} |R| &\leq C_n^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(n-2)t^2/(2n)} \left(2 \frac{|\alpha_3|}{3!} \frac{\beta_4+3}{4!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^7 + \left(\frac{\beta_4+3}{4!} \right)^2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^8 \right) dt \\ &\leq \frac{|\alpha_3|}{3!} \frac{\beta_4+3}{4!} \left(\frac{n}{n-2} \right)^4 \frac{B_7}{n^{3/2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_4+3}{4!} \right)^2 \left(\frac{n}{n-2} \right)^{9/2} \frac{B_8}{n^2} \end{aligned}$$

Для любого целого неотрицательного k справедлива формула обращения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} (it)^k dt = H_k(x) \varphi(x),$$

поэтому первое слагаемое в (12) равно

$$\frac{n-1}{2n} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{7/2} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 \frac{1}{n} H_6 \left(\sqrt{\frac{n}{n-2}} x \right) \varphi \left(\sqrt{\frac{n}{n-2}} x \right).$$

Теперь, собирая вместе полученные оценки, нетрудно убедиться в справедливости неравенства (4).

Для первого слагаемого в (11) можно получить и другую оценку. Она существенно точнее той, что только что доказана (во всяком случае, при больших n), однако имеет значительно более громоздкий вид. Поэтому мы дадим лишь набросок ее доказательства и для простоты (чтобы не появлялись многочисленные множители, связанные со степенями числа $n/(n-2)$) оценим величину

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} \left(f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^2 dt,$$

которая равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y-z) (P_1 - \Phi_1)(dy) (P_1 - \Phi_1)(dz).$$

Введем множества $A_1 = \{y < x/3, z < x/3\}$, $A_2 = \{-\infty < y < \infty, z \geq x/3\}$, $A_3 = \{y \geq x/3, -\infty < z < \infty\}$, $A_4 = \{y > x/3, z > x/3\}$. Очевидно, что для индикаторов этих множеств справедливо тождество

$$\chi_{A_1}(y, z) + \chi_{A_2}(y, z) + \chi_{A_3}(y, z) - \chi_{A_4}(y, z) \equiv 1, \quad -\infty < y, z < \infty,$$

поэтому нам достаточно оценить абсолютные величины каждого из интегралов

$$\iint_{A_k} \varphi(x-y-z) (P_1 - \Phi_1)(dy) (P_1 - \Phi_1)(dz), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Рассмотрим интеграл по множеству A_1 , который равен

$$\int_{-\infty}^{x/3} U(z) (P_1 - \Phi_1)(dz),$$

где $U(z) = \int_{-\infty}^{x/3} \varphi(x-y-z) (P_1 - \Phi_1)(dy)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{x/3} U(z) (P_1 - \Phi_1)(dz) \\ &= \int_{-\infty}^{x/3} \left(U(0) + U'(0)z + \frac{1}{2} U''(0)z^2 + \frac{1}{3!} U'''(0)z^3 \right) (P_1 - \Phi_1)(dz) \\ &+ \frac{1}{4!} \int_{-\infty}^{x/3} U^{(4)}(\theta_2 z) z^4 (P_1 - \Phi_1)(dz), \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta_2 \leq 1$. Последнее слагаемое равно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4!} \int_{-\infty}^{x/3} \left\{ \int_{-\infty}^{x/3} \varphi^{(4)}(x-y-\theta_2 z) (P_1 - \Phi_1)(dy) \right\} z^4 (P_1 - \Phi_1)(dz) \\ &= \frac{1}{4!} \int_{-\infty}^{x/3} \left\{ \int_{-\infty}^{x/3} \left(V(0) + V'(0)y + \frac{1}{2} V''(0)y^2 + \frac{1}{6} V'''(0)y^3 \right) \right. \\ &\quad \times (P_1 - \Phi_1)(dy) \left. \right\} z^4 (P_1 - \Phi_1)(dz) \\ &+ \left(\frac{1}{4!} \right)^2 \int_{-\infty}^{x/3} \left\{ \int_{-\infty}^{x/3} V^{(4)}(\theta_1 y) y^4 (P_1 - \Phi_1)(dy) \right\} z^4 (P_1 - \Phi_1)(dz), \end{aligned}$$

где $V(y) = \varphi^{(4)}(x-y-\theta_2 z)$ и $0 \leq \theta_1 \leq 1$. Абсолютная величина последнего интеграла не превосходит

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{x/3} \left\{ \int_{-\infty}^{x/3} |\varphi^{(8)}(x-\theta_1 y - \theta_2 z)| y^4 (P_1 + \Phi_1)(dy) \right\} z^4 (P_1 + \Phi_1)(dz) \\ &\leq \frac{(\beta_4 + 3)^2}{n^4} \psi_8(x/3). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{x/3} V'''(0) \left\{ \int_{-\infty}^{x/3} y^3 (P_1 - \Phi_1)(dy) \right\} z^4 (P_1 - \Phi_1)(dz) \\ &= \int_{-\infty}^{x/3} H_7(x - \theta_2 z) \varphi(x - \theta_2 z) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (P_1 - \Phi_1)(dy) \right\} z^4 (P_1 - \Phi_1)(dz) \\ &- \int_{-\infty}^{x/3} H_7(x - \theta_2 z) \varphi(x - \theta_2 z) \left\{ \int_{x/3}^{\infty} y^3 (P_1 - \Phi_1)(dy) \right\} z^4 (P_1 - \Phi_1)(dz). \end{aligned}$$

Абсолютная величина правой части последнего равенства не превосходит

$$\begin{aligned} & \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} \psi_7\left(\frac{2x}{3}\right) \int_{-\infty}^{x/3} z^4 (P_1 + \Phi_1)(dz) \\ &+ \psi_7\left(\frac{2x}{3}\right) \frac{\beta_{m'+2}^+ + \bar{\beta}_{m'+2}/2}{n^{(m'+2)/2}} \left(\frac{3}{x}\right)^{m'-1} \int_{-\infty}^{x/3} z^4 (P_1 + \Phi_1)(dz) \\ &\leq \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} \frac{\beta_4 + 3}{n^2} \psi_7\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{\beta_4 + 3}{n^2} \frac{\beta_{m'+2}^+ + \bar{\beta}_{m'+2}/2}{n^{(m'+2)/2}} \left(\frac{3}{x}\right)^{m'-1} \psi_7\left(\frac{2x}{3}\right). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{x/3} V''(0) \left\{ \int_{-\infty}^{x/3} y^2 (P_1 - \Phi_1)(dy) \right\} z^4 (P_1 - \Phi_1)(dz) \\ &= - \int_{-\infty}^{x/3} H_6(x - \theta_2 z) \varphi(x - \theta_2 z) \left\{ \int_{x/3}^{\infty} y^2 (P_1 - \Phi_1)(dy) \right\} z^4 (P_1 - \Phi_1)(dz). \end{aligned}$$

Абсолютная величина правой части этого равенства не превосходит

$$\frac{\beta_4 + 3}{n^2} \frac{\beta_{m'+2}^+ + \bar{\beta}_{m'+2}/2}{n^{(m'+2)/2}} \left(\frac{3}{x}\right)^{m'} \psi_6\left(\frac{2x}{3}\right).$$

Интегралы

$$\int_{-\infty}^{x/3} V'(0) \left\{ \int_{-\infty}^{x/3} y (P_1 - \Phi_1)(dy) \right\} z^4 (P_1 - \Phi_1)(dz)$$

и

$$\int_{-\infty}^{x/3} V(0) \left\{ \int_{-\infty}^{x/3} (P_1 - \Phi_1)(dy) \right\} z^4 (P_1 - \Phi_1)(dz)$$

рассматриваются аналогично.

Займемся теперь интегралами

$$\int_{-\infty}^{x/3} U^{(k)}(0) z^k (P_1 - \Phi_1)(dz), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Их абсолютные величины не превосходят произведений величин $|U^{(k)}(0)|$ и $|\int_{-\infty}^{x/3} z^k (P_1 - \Phi_1)(dz)|$.

Ясно, что

$$\left| \int_{-\infty}^{x/3} z^k (P_1 - \Phi_1)(dz) \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} z^k (P_1 - \Phi_1)(dz) \right| + \int_{x/3}^{\infty} z^k (P_1 + \Phi_1)(dz).$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства есть $|\alpha_3|/n^{3/2}$ для $k = 3$ и нуль для $k = 0, 1, 2$, а второе слагаемое не превосходит

$$\frac{\beta_{m'+2}^+ + \bar{\beta}_{m'+2}/2}{n^{(m'+2)/2}} \left(\frac{3}{x}\right)^{m'+2-k}$$

для $k = 0, 1, 2, 3$.

Вновь воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, мы видим, что

$$\begin{aligned} |U^{(k)}(0)| &= \left| \int_{-\infty}^{x/3} H_k(x - y) \varphi(x - y) (P_1 - \Phi_1)(dy) \right| \\ &\leq \sum_{l=0}^3 \frac{1}{l!} |H_{k+l}(x)| |\varphi(x)| \left| \int_{-\infty}^{x/3} y^l (P_1 - \Phi_1)(dy) \right| \\ &\quad + \frac{1}{4!} \left| \int_{-\infty}^{x/3} H_{k+4}(x - \theta y) \varphi(x - \theta y) y^4 (P_1 - \Phi_1)(dy) \right|. \end{aligned}$$

Оценка суммы по $l = 0, 1, 2, 3$ не вызывает трудностей. Последнее слагаемое в правой части последнего неравенства не превосходит

$$\frac{1}{4!} \frac{\beta_4 + 3}{n^2} \psi_{k+4} \left(\frac{2x}{3} \right).$$

Теперь нетрудно выписать оценку для абсолютной величины интеграла по множеству A_1 (ничего, кроме терпения, при этом не понадобится), но мы этого делать не будем.

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} & \iint_{A_2} \varphi(x - y - z) (P_1 - \Phi_1)(dy) (P_1 - \Phi_1)(dz) \\ &= \int_{x/3}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - y - z) (P_1 - \Phi_1)(dy) \right\} (P_1 - \Phi_1)(dz). \end{aligned}$$

Функция $\varphi(x - y - z)$ переменной y является бесконечно дифференцируемой и абсолютная величина ее третьей производной не превосходит $\max_{-\infty < x < \infty} |H_3(x)| \varphi(x) = c_3 / \sqrt{2\pi}$, где $c_3 = 1, 27 \dots$ (указанный максимум достигается в точках $\pm(3 - \sqrt{6})$). Поэтому

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - y - z) (P_1 - \Phi_1)(dy) \right| \leq \frac{c_3}{\sqrt{2\pi}} \zeta_3(P_1, \Phi_1) \leq \frac{c_3}{\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{3! n^{3/2}}$$

(идеальные метрики ζ_s , $s > 0$, введены и исследованы В. М. Золотаревым, см., например [1], [3]). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{A_2} \varphi(x - y - z) (P_1 - \Phi_1)(dy) (P_1 - \Phi_1)(dz) \right| \\ & \leq \frac{c_3}{\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_3 + \bar{\beta}_3}{3! n^{3/2}} \left(\frac{\beta_{m'+2}^+}{n^{(m'+2)/2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{3}{x\sqrt{n}} e^{-x^2 n/8} \right). \end{aligned}$$

Эта же оценка справедлива и для интеграла по множеству A_3 .

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{A_4} \varphi(x - y - z) (P_1 - \Phi_1)(dy) (P_1 - \Phi_1)(dz) \right| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{x/3}^{\infty} (P_1 + \Phi_1)(dy) \right)^2 \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\beta_{m'+2}^+}{n^{(m'+2)/2}} \left(\frac{3}{x} \right)^{m'+2} + \frac{3}{x\sqrt{2\pi n}} e^{-x^2 n/18} \right)^2. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно выписать новую (неравномерную) оценку для первого слагаемого в (11), но мы этого делать не будем.

Отметим, что при доказательстве теоремы мы получили асимптотическое разложение для плотности

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\alpha_3}{3! \sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + R$$

и для величины $R = O(1/n)$, $n \rightarrow \infty$, из неравенства (4) легко получается квазинеравномерная оценка для этого разложения. Эта оценка отличается от правой части (4) лишь тем, что в ней нет слагаемого $(|\alpha_3|/(3! \sqrt{n}))|H_3(x)|\varphi(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 416 с.
2. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
3. Сенатов В. В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом «Либроком», 2009, 352 с.
4. Сенатов В. В. Об асимптотических разложениях в центральной предельной теореме с явными оценками остаточных членов. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 4, с. 810–816.

Поступила в редакцию
27.VII.2008