Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Шур, Условие равномерной интегрируемости в сильных предельных теоремах для отношений. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 3, 446–461

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:42:06

© 2010 г.

ШУР М. Г.*

УСЛОВИЕ РАВНОМЕРНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В СИЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ ОТНОШЕНИЙ. II

Предложен новый подход к получению сильных предельных теорем для отношений (СПТО). Для этой цели используются триплеты, каждый из которых состоит из переходного оператора некоторой цепи Маркова с измеримым пространством состояний $(E, \mathcal{E})$, а также функции и меры, заданных на E и $\mathcal{E}$ соответственно. Триплет считается стабильным, если он удовлетворяет несколько усиленному утверждению простейшей СПТО в смысле части настоящей работы [22]. Выясняется, в частности, что при широких условиях доказательство СПТО сводится к проверке стабильности (иногда в ослабленной форме) тех или иных триплетов. Попутно обсуждаются СПТО для цепей Маркова, обладающих урезанным свойством Лиувилля.

Ключевые слова и фразы: цепь Маркова, сильная предельная теорема для отношений, стабильный триплет.

5. Введение в часть II. Как и в [22], рассматривается некоторая цепь Маркова X с измеримым пространством состояний $(E, \mathcal{E})$ и переходным оператором P . Преследуя прежние цели (см. § 1), мы предлагаем новые СПТО с достаточно гибкими условиями. В число последних входят, например, условие равномерной интегрируемости (2А), требование о наличии у X свойства Лиувилля или вводимые далее предположения о стабильности тех или иных триплетов. По мере надобности налагаются и стандартные требования, включая связанные с неприводимостью X .

Сообразно с § 1 СПТО традиционного типа доставляют условия, при которых

$$\lim \frac{\varkappa(P^{n+m}f)}{\nu(P^n g)} = \frac{\pi(f)}{\pi(g)}, \quad m \geq 0, \quad (5.1)$$

где $\varkappa, \nu \in \mathcal{P}$, π — некоторая инвариантная для X мера, $f, g \in \mathcal{B}_+$ — какие-либо интегрируемые по ней функции, причем $\pi(g) \neq 0$ (равенство (5.1) с точностью до обозначений повторяет (1.2)). Вместе с тем имеются СПТО, в которых левая часть (5.1) заменяется пределом отношений $P^{n+m}f(x)/P^n g(y)$ при $n \rightarrow \infty$, где $x, y \in E$, а f и g подчиняются

*Московский государственный институт электроники и математики, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, 109028 Москва, Россия

надлежащим требованиям [2], [4], [11]. Но этот предел совпадает с присутствующим в (5.1) при $\varkappa = p(x, \cdot)$ и $\nu = p(y, \cdot)$, так что такие СПТО входят в число упомянутых.

В последующем вывод равенств типа (5.1) основывается на простом наблюдении: если $\pi(g) \neq 0$, то для справедливости (5.1) достаточно (а при $\varkappa = \nu$ и $\pi(f) \neq 0$ также и необходимо), чтобы

$$\varkappa(P^{n+m}f) \sim \nu(P^n f), \quad m = 0, 1, \quad (5.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(P^n f)}{\nu(P^n g)} = \frac{\pi(f)}{\pi(g)}. \quad (5.3)$$

В этой связи удобно, задав $\alpha \in (0, 1)$, $f \in \mathcal{B}_+$, $\nu \in \mathcal{P}$, $\eta = \nu G^\alpha$ и переходный оператор P , назвать триплет $\{f, \nu, P\}$ *стабильным*, если для всех $\varkappa \in \mathcal{P}(\eta)$ справедливо (5.2), или *умеренно стабильным*, если верно то же самое, но лишь при $m = 0$. Теоремы 2.1 и 2.2 и замечание 2.1 содержат как необходимые, так и достаточные условия стабильности триплета, и поэтому теперь первой задачей становится вывод равенств типа (5.3), для чего, как правило, достаточно установить стабильность, возможно, умеренную, подходящего триплета (см. доказательство теоремы 7.1).

На основе подобных соображений выводятся главные результаты работы — новые СПТО, представленные теоремами 7.1–7.3 и следствием 7.1 из § 7, причем, как уже говорилось в § 1, мы отказываемся от стандартного требования возвратности по Харрису цепи X . В § 7 указаны и некоторые случаи, когда требующееся нам свойство Лиувилля удастся заменить его ослабленными вариантами, встречающимися в теории случайных блужданий на группах [24]. При этом § 7 содержит лишь формулировки упомянутых результатов, а доказательства отложены до § 8. Что же касается § 6, то он отведен предварительному анализу свойств нужных нам триплетов. Наконец, в § 9, играющем роль добавления, собраны некоторые дополнительные сведения о малых функциях и мерах.

В заключение параграфа перечислим уточнения, в которых нуждается текст предыдущей части. В условии (2.Б₁) вместо $\mathcal{P}_1(\eta)$ должно стоять $\mathcal{P}_1(\nu)$, а в условии (2.Б₂) вместо (2.1) следует читать (2.3). В теореме 4.1 и предложении 4.3 требования, наложенные на функцию f , нужно заменить требованием ее малости. Наконец, левую часть неравенства, следующего за (4.3), необходимо заменить на $\nu_1(P^{n+1}f)$.

6. Вспомогательные результаты. Здесь собраны некоторые утверждения, призванные облегчить последующую работу с триплетами. В них фиксированы число $\alpha \in (0, 1)$ и меры $\nu \in \mathcal{P}$ и $\eta = \nu G^\alpha$.

Причислим цепь Маркова X к семейству $\mathcal{X}_1$, если и только если она неприводима, отвечающее ей семейство S малых функций (см. § 4)

непусто и, кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(P^{n+1}v)}{\mu(P^n v)} \geq 1 \quad (6.1)$$

для всех $\mu \in \mathcal{P}$ и $v \in \mathcal{S}$. Простое условие, при котором $X \in \mathcal{X}_1$, приведено в теореме 4.1 (необходимая поправка указана в § 5). Отметим, что для $X \in \mathcal{X}_1$ условия (2Б) и (2Б₁) из § 2 равносильны, а (2Б₂) с $f \in \mathcal{S}$ сводится лишь к требованию, чтобы

$$\nu(P^{n+1}f) \sim \nu(P^n f). \quad (6.2)$$

Начнем со следующего обобщения предложения 4.3.

Теорема 6.1. Пусть $X \in \mathcal{X}_1$, $f, g \in \mathcal{S}$, $\mu \in \mathcal{P}(\eta)$, и пусть выполняется (6.2). Тогда

$$\mu(P^{n+1}g) \sim \mu(P^n g), \quad (6.3)$$

когда скоро

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(P^n g)}{\nu(P^n g)} > 0. \quad (6.4)$$

Доказательство. Так как $f, g \in \mathcal{S}$, то $bP^m f \geq g$ и $\beta P^l g \geq f$ при некоторых $m, l \geq 0$ и $b, \beta > 0$, если n достаточно велико. Увеличив при необходимости b , будем считать, что $\xi(w) > 0$, где $w = bP^m f - g \geq 0$ и $\xi \in \mathcal{M}_0$ (см. § 4). Тогда $w \in \mathcal{S}$ и, кроме того, при достаточно больших $n \geq 1$ отношения любых двух из трех величин $a_n = b\nu P^{n+m}(f)$, $b_n = \nu(P^n w)$ и $c_n = a_n - b_n = \nu(P^n g)$, взятых в любом порядке, не превышают подходящего $M \geq 1$. В самом деле,

$$a_n b^{-1} \leq \beta \nu(P^{m+n+l}g) = \beta c_{m+n+l} \leq b \beta \nu(P^{2m+n+l}f) = \beta a_{m+n+l},$$

а отсюда и из (6.2) выводится ограниченность сверху c_n/a_n и a_n/c_n с достаточно большими n . Подобные доводы ведут к такому же выводу относительно b_n/a_n и a_n/b_n , а стало быть, и относительно c_n/b_n и b_n/c_n . Таким образом, нужное M существует.

Допустим на время, что $\mu = \nu$ и что при этом нарушается (6.3). Тогда согласно определению $\mathcal{X}_1$ имеем $c_{n+1} > (1 + 2\gamma)c_n$ с неким $\gamma > 0$, где n пробегает некоторую подпоследовательность $\mathfrak{N}$ натурального ряда. Так как $c_n/b_n \geq M^{-1}$ и $b_{n+1} > (1 - \varepsilon)b_n$, где $\varepsilon > 0$ задано, а n достаточно велико, то при достаточно больших $n \in \mathfrak{N}$

$$a_{n+1} = b_{n+1} + c_{n+1} > (1 - \varepsilon)b_n + (1 + 2\gamma)c_n \geq (1 - \varepsilon + \gamma M^{-1})b_n + (1 + \gamma)c_n,$$

что превышает $(1 + \gamma_1)(b_n + c_n) = (1 + \gamma_1)a_n$, когда скоро $\varepsilon \in (0, \gamma_1)$, а $\gamma_1 = (\gamma/2)M^{-1}$. Это заключение противоречит (6.2), так что истинность (6.3) в случае $\mu = \nu$ установлена.

Для получения (6.3) в общем случае следует сопоставить уже доказанное с условием (6.4) и предложением 4.3, взяв в последнем теперешнюю функцию g в роли прежней функции f .

З а м е ч а н и е 6.1. Условие $\mu \in \mathcal{P}(\eta)$ и неравенство (6.4) вытекают из прочих предположений теоремы 6.1, если меры μ и ν малы (определение малой меры см. в §9). Действительно, $\mu(P^n g) \geq a\nu(P^{n-i} f)$ и $\nu(P^n g) \leq b\nu(P^{n+j} f)$ с некоторыми $a, b > 0$, $i, j \geq 0$ и любыми $n \geq i$ (ср. с предыдущим доказательством), а отсюда ввиду (6.2) следует (6.4). Столь же просто вывести, что $\mu \in \mathcal{P}(\eta)$.

Предложение 6.1. Пусть реализуются условие (2A) и соотношение (6.2), и пусть функции $f, g \in \mathcal{B}_+$ сравнимы в том смысле, что $f \leq a_1 P^{m_1} g$ и $g \leq a_2 P^{m_2} f$ при некоторых $a_1, a_2 > 0$ и $m_1, m_2 \geq 0$ (ср. с определением малой функции). Тогда условие (2A) выполняется с триплетом $\{g, \nu, P\}$. Если же $X \in \mathcal{X}_1$, а функции f, g и меры μ, ν малы, то оно же выполняется с $\{g, \mu, P\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первое утверждение. Из условий, наложенных на f и g , легко следует стандартность пар $\{f, \nu\}$ и $\{g, \nu\}$ в смысле §2. По аналогии с началом доказательства теоремы 6.1 получаем неравенства:

$$g_n \leq \frac{bP^{n+m}f}{\nu(P^{n-k}f)} \leq \frac{2bP^{n+m}f}{\nu(P^{n+m}f)} \quad (6.5)$$

с некоторыми $b > 0$ и $m, k \geq 0$, где n достаточно велико и $g_n = P^n g / \nu(P^n g)$. Отсюда и следует (2A) с триплетом $\{g, \nu, P\}$.

Наложим условия из последней фразы предложения 6.1 и заметим, что теперь стандартны не только $\{f, \nu\}$, $\{g, \nu\}$, но и $\{g, \mu\}$. Рассмотрим функции $h_n = P^n g / \mu(P^n g) = a_n g_n$ при достаточно больших n , где $a_n = \nu(P^n g) / \mu(P^n g)$. Справедливость (2A) с триплетом $\{g, \nu, P\}$ уже установлена, а замечание 6.1 влечет (2B₂) с этим же триплетом, и поэтому по теореме 2.2 $a_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, рассматривая те же n , что и в (6.5), и задав $i \geq 0$, нужно лишь убедиться в равномерной интегрируемости семейства $\{g_n\}$ относительно μP^i . Но это вытекает из (2A), поскольку справедливо (6.5) и $\mu P^i \leq c\nu P^{i+j}$ при соответствующих $c > 0$ и $j \geq 0$. Предложение доказано.

Чтобы продолжить наш анализ, проедем некоторую подготовку. Напомнив, что в соответствии с §2 термин «мера» обозначает σ -конечную меру на $\mathcal{S}$, введем следующее условие:

(6A) существует нетривиальная мера π , инвариантная для X , и цепь Маркова $\hat{X}$, двойственная X относительно π (т.е. имеющая то же пространство состояний $(E, \mathcal{E})$ и такой переходный оператор $\hat{P}$, что $(Pf, g) = (f, \hat{P}g)$ для $f, g \in \mathcal{B}_+$).

Здесь и далее $(u, v) = \pi(u, v) = \int uv d\pi$, если $u, v \in \mathcal{B}_+$ или если произведение uv , где $u, v \in \mathcal{B}_b$, интегрируемо по π . Коль скоро ука-

занная мера π существует, а пространство состояний $(E, \mathcal{E})$ является борелевским, то заведомо существует и $\hat{X}$ [21].

З а м е ч а н и е 6.2. Пусть выполняется (6А), и пусть $f \in \mathcal{B}_+$ и

$$0 < \pi(f) < \infty. \quad (6.6)$$

Тогда найдется мера $\pi_f \in \mathcal{P}$, совпадающая с $f\pi$ с точностью до числового множителя. Положим $\eta_0 = \pi_f \hat{G}^\alpha$ и $\mathcal{P}_0 = \widehat{\mathcal{P}}(\eta_0)$, где $\hat{G}^\alpha$ — аналог оператора G^α для $\hat{P}$, а $\widehat{\mathcal{P}}(\cdot)$ — аналог семейства $\mathcal{P}(\cdot)$ (см. § 2). Оказывается, мера $\mu_1 \in \mathcal{P}$ принадлежит $\mathcal{P}_0$ тогда и только тогда, когда $\mu_1 = h\pi$, где $h \in \mathcal{B}_+$ и $h \leq CG^\alpha f$ при некотором $C > 0$.

Действительно, если $\mu_1 \in \mathcal{P}_0$, то $\mu_1 \leq C_1 \pi_f \hat{G}^\alpha$, $C_1 > 0$, и $\mu_1(w) \leq C(f, \hat{G}^\alpha w) = C(G^\alpha f, w)$ при $C = C_1/\pi(f)$ и любом $w \in \mathcal{B}_+$, так что $\mu_1 \leq (CG^\alpha f)\pi$ и потому μ_1 имеет нужный вид. Наоборот, при наличии соответствующей функции h те же рассуждения, но проведенные в обратном порядке, показывают, что $\mu_1 \in \mathcal{P}_0$.

Предложение 6.2. Пусть цепь X неприводима и существует мера π , указанная в (6А). Тогда, во-первых, справедливо (6.6) с любыми $f \in \mathcal{S}$ и во-вторых, $\pi \in \mathcal{M}_0$ (см. § 4), если π является мерой неприводимости для X .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\xi(f) > 0$ для $\xi \in \mathcal{M}_0$, то $G^\alpha f > 0$ в E и потому $\pi(G^\alpha f) > 0$, а ввиду инвариантности π это возможно лишь при $\pi(f) > 0$. С другой стороны, если $h \in \mathcal{B}_+$ и $\xi(h), \pi(h) \in (0, \infty)$, то по определению малой функции $\pi(f) \leq a\pi(P^m h) = a\pi(h) < \infty$ при некоторых $a > 0$ и $m \geq 0$, и (6.6) доказано.

Пусть теперь π служит мерой неприводимости и снова $f \in \mathcal{S}$, а $\xi \in \mathcal{M}_0$. Если $A \in \mathcal{E}$ и $\xi(A) > 0$, то нетрудно подобрать $n \geq 0$ и $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\xi(A_{n\varepsilon}) > 0$, где $A_{n\varepsilon} = \{x \in E: P^n f(x) > \varepsilon\}$. Такое $A_{n\varepsilon}$ мало, и по уже доказанному $\pi(A) \geq \pi(A_{n\varepsilon}) > 0$. Следовательно, $\xi \ll \pi$ и по этой причине $\pi \in \mathcal{M}_0$ [8, § 2.2].

Укажем важный случай, когда утверждение типа предложения 6.1 сохраняет силу и без условия (6.2).

Предложение 6.3. Пусть $\mathcal{E}$ счетнопорождена, а апериодическая неприводимая цепь X подчиняется (6А) и π -симметрична (т.е. совпадает с $\hat{X}$). Если $f, g, u, v \in \mathcal{S}$, то из условия (2А) с триплетом $\{f, \pi_u, P\}$ следует оно же с триплетом $\{g, \pi_v, P\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть действует (2А) с триплетом $\{f, \pi_v, P\}$, так что семейство $\mathcal{F} = \{f_n; n \geq n_0\}$, отвечающее $\nu = \pi_u$ (см. § 2), равномерно интегрируемо по любой из мер $\pi_u P^m$, $m \geq 0$. Рассмотрим случай с $g = f$. Для всех $w \in \mathcal{B}_+$ имеем $\pi_v P^m(w) = \gamma(P^m w, v) = \gamma(w, P^m v)$ с $\gamma = 1/\pi(v)$. Следовательно, $\pi_v P^m = \gamma(P^m v)\pi \leq b(P^{i+m} u)\pi$ при некотором $b > 0$ и всех $i \geq 0$ (см. определение малой функции), и равномерная интегрируемость $\mathcal{F}$ по каждой мере $\pi_v P^m$, $m \geq 0$,

становится очевидной. Далее, по предложению 9.3 существуют $a > 0$ и четное $m \geq 0$ такие, что $P^m v \geq au$ и потому $(P^n f, u) \leq a^{-1}(P^n f, P^m v) = a^{-1}(P^{n+m} f, v)$ при $n \geq m$, причем $(P^{n+m} f, v)/(P^n f, v) \rightarrow 1$, когда $n \rightarrow \infty$ (см. (4.1) в [20]). Таким образом, $\psi_n \leq 2a^{-1}f_n$, если n достаточно велико и $\psi_n = P^n f/(P^n f, v)$. Отсюда с учетом только что отмеченного свойства семейства $\mathcal{F}$ выводится (2А) с триплетом $\{f, \pi_v, P\}$, и случай с $g = f$ рассмотрен.

Перейдем к случаю с $u = v$. Положив $\nu = \pi_u$, воспользуемся первым из неравенств (6.5), но теперь, вспомнив предложение 9.3, будем считать число $m + k$ четным. Новая ссылка на (4.1) из [20] показывает, что $g_n \leq b_1 P^{n+m} f / \nu(P^{n+m} f) = b_1 f_{n+m}$, $b_1 > 0$, при достаточно больших n , а это дает (2А) с триплетом $\{g, \pi_u, P\}$. Отсюда и из первой части доказательства следует (2А) с $\{g, \pi_v, P\}$.

Предложение 6.4. Пусть $X \in \mathcal{X}_1$, $f, g \in \mathcal{S}$ и выполняется условие (2А) вместе с (6.2). Пусть кроме того, осуществляется какая-либо из возможностей: или $\mu \in \mathcal{P}(\eta)$, или реализуется (6А) и в этом случае π служит мерой неприводимости X , а $\pi_g \in \mathcal{P}(\eta)$. Тогда имеет место (2Б) с триплетом $\{g, \mu, P\}$ или $\{g, \pi_f, \hat{P}\}$ соответственно.

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathcal{P}(\eta)$, $\mu_1 \in \mathcal{P}$ и $\mu_1 \leq C_1 \mu P^m$ при некотором $m \geq 0$ (под C_i , $i \geq 1$, подразумеваются подходящие постоянные). Чтобы рассмотреть случай с $\{g, \mu, P\}$, достаточно установить аналог (6.3) для пары μ_1 и g . Для этого, отправляясь от неравенств $\mu \leq C_2 \eta$ и $\eta P^m \leq C_3 \eta$, заметим, что $\mu_1 \leq C_4 \eta P^m \leq C_5 \eta$. Таким образом, выполнены требования теоремы 6.1, предшествующие (6.4), но с оговоркой, что сейчас в качестве прежней меры μ берется μ_1 . Ясно, что $\mu_1(P^n g) \geq a \mu_1(P^{n-i} f)$ и $\nu(P^n g) \leq b \nu(P^{n+j} f)$ при некоторых $i, j \geq 0$, $a, b > 0$ и $n \geq i$ (ср. с замечанием 6.1) и что $\mu_1(P^{n-i} f) \sim \nu(P^{n-i} f) \sim \nu(P^{n+j} f)$ (см. (6.2) и теорему 2.2), откуда вытекает (6.4) с μ_1 в роли прежней меры μ . Теперь упоминавшийся аналог (6.3) следует из теоремы 6.1.

Анализ случая с триплетом $\{g, \pi_f, \hat{P}\}$ в рамках наших условий сводится к получению указанного ниже аналога (6.3) для некоторой меры $\mu_1 \in \mathcal{P}$ и оператора $\hat{P}$, где $\mu_1 \leq C_6 \pi_f \hat{P}^m$, $m \geq 0$. По аналогии с замечанием 6.2 имеем $\mu_1 = \pi_h$, где $h \in \mathcal{B}_+$, $\pi(h) = 1$ и $h \leq C_6 P^m f$. Разумеется, $h \in \mathcal{S}$ и требуемый на этот раз аналог (6.3) утверждает, что $\pi_h(\hat{P}^{n+1} g) \sim \pi_h(\hat{P}^n g)$ или, в другой записи, что $\mu_2(P^{n+1} h) \sim \mu_2(P^n h)$ с $\mu_2 = \pi_g$. Для его обоснования следует вновь применить теорему 6.1 с заменой в ней μ на μ_2 и g на h , получив прежним методом (6.4) в нужном виде.

Следствие 6.1. Если X обладает ν -свойством Луизилля, то условия из первой фразы предложения 6.4 обеспечивают стабильность $\{g, \nu, P\}$, а в случае малых мер μ и ν — еще и стабильность $\{g, \mu, P\}$. Это вытекает из теоремы 2.2 и предложений 6.1 и 6.4.

7. Основные результаты (формулировки).

1. На протяжении §§ 7 и 8 всюду, где нет специальных указаний, мы фиксируем число $\alpha \in (0, 1)$, меры $\mu, \nu \in \mathcal{P}$ и $\eta = \nu G^\alpha$, а также функции $f, g, u \in \mathcal{B}_+$ такие, что

$$0 < \pi(f), \pi(g), \pi(u) < \infty. \quad (7.1)$$

В связи с (7.1) см. предложение 6.2. Меры π_g, π_u и т.п. определим аналогично π_f (см. § 6) и введем в рассмотрение триплеты $T_0 = \{u, \pi_f, \hat{P}\}$, $T_1 = \{f, \nu, P\}$ и $T_2 = \{g, \nu, P\}$.

Теорема 7.1. (а) Пусть выполняются условия (6А), соотношение (6.2) и следующее требование:

(7А) $\nu = \pi_u$, триплет T_0 умеренно стабилен и

$$g \leq CG^\alpha f, \quad C > 0. \quad (7.2)$$

Тогда справедливо (5.3), а в случае стабильного T_1 выполняется и (5.1) с любыми $\kappa \in \mathcal{P}(\eta)$. Если же в последнем случае умеренно стабилен T_2 , то в (5.1) допустима замена ν любой мерой из $\mathcal{P}(\eta)$.

(б) Пусть, помимо условий, предшествующих (7А), выполняется требование

(7Б) триплеты T_0 и T_2 умеренно стабильны, а T_1 стабилен; кроме того, наряду с (7.2) действует и неравенство

$$\pi_u \leq C\nu G^\alpha \quad (7.3)$$

с некоторым $C > 0$ (таким образом, $\pi_u \in \mathcal{P}(\eta)$). Тогда вновь реализуется (5.1) с любыми $\kappa \in \mathcal{P}(\eta)$ и оно сохраняет силу и при замене ν любой мерой из $\mathcal{P}(\eta)$.

Несколько слов о теореме 7.1. Условие (7Б) более громоздко по сравнению с (7А), но зато оно не предполагает абсолютной непрерывности ν относительно π . Если $\nu = \pi_u$ и действуют (6А) и (7А), то требование умеренной стабильности T_0 необходимо для выполнения (5.3) при любом выборе $g \in \mathcal{B}_+$, согласующемся с (7.1) и (7.2) (см. замечание 8.1), тогда как требование стабильности T_1 и умеренной стабильности T_2 необходимо для выполнения (5.1) с любыми $\kappa \in \mathcal{P}(\eta)$, коль скоро в (5.1) разрешается замена ν любой мерой из $\mathcal{P}(\eta)$. Наконец, из доказательства теоремы 7.1 видно, что справедлив очевидный ее вариант с умеренно стабильными T_0, T_1 и T_2 , однако при этом следует рассматривать (5.1) лишь с $m = 0$.

В ряде случаев более удобной оказывается следующая теорема.

Теорема 7.2. (а) Пусть цепь $X \in \mathcal{X}_1$ подчиняется условию (6А) и имеет место (6.2) с некоторой функцией $f \in \mathcal{S}$ (см. § 6). Пусть цепь

$\hat{X} \in \mathcal{X}_1$ обладает π_f -свойством Лиувилля и реализуется следующее требование.

(7A') $\nu = \pi_u$ и выполняется условие (2A) с триплетом T_0 .

Тогда справедливо (5.3) при любом выборе $g \in \mathcal{S}$, а наличие у X π_u -свойства Лиувилля и выполнение (2A) влекут (5.1) со всеми $g \in \mathcal{S}$ и $\kappa \in \mathcal{P}(\eta)$, и в этом случае в (5.1) функцию f можно заменить любой другой из S .

(б) Пусть, помимо условий, предшествующих (7A'), выполняется и следующее требование.

(7B') Цепь X обладает ν -свойством Лиувилля; кроме того, $u \in \mathcal{S}$ и справедливы как условие (2A) с каждым из триплетов T_0 и T_1 , так и неравенство (7.3) с $C > 0$.

Тогда снова выполняется (5.1) при любом выборе $g \in \mathcal{S}$ и $\kappa \in \mathcal{P}(\eta)$ и функцию f в (5.1) можно заменить любой иной из $\mathcal{S}$.

В теоремах 7.1 и 7.2 постулировалось условие (6.2). Однако, как мы сейчас увидим, иногда этого удастся избежать.

Следствие 7.1. Пусть цепь $X \in \mathcal{X}_1$ удовлетворяет тем же условиям, что и в первой фразе предложения 6.3. Пусть она имеет параметр сходимости $R = 1$ (см. § 4) и обладает π -свойством Лиувилля. Наконец, пусть $f, u \in S$, $\nu = \pi_u$ и выполнено условие (2A). Тогда справедливо (5.1) при любом выборе $g \in \mathcal{S}$ и $\kappa \in \mathcal{P}(\eta)$, причем в (5.1) исходные f и u можно заменить любыми функциями из $\mathcal{S}$.

В дальнейшем при условии (6A) и при $\nu = \pi_u$ соотношение (6.2) будем записывать в следующем виде:

$$(P^{n+1}f, u) \sim (P^n f, u). \quad (7.4)$$

Желая требование, налагавшееся выше на T_0 , заменить другим, введем еще два условия. Первое из них таково:

(7B) Имеет место (6A) и существует $E_n \in \mathcal{E}$, $n \geq 1$, такие, что

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots, \quad E = \bigcup_{n \geq 1} E_n \quad (7.5)$$

и $0 < \pi(E_n) < \infty$, причем $p(\cdot, E_n) = 0$, $n \geq 1$, вне некоторого E_m , если $m = m(n) \geq 1$ выбрано подходящим образом.

Из (7B) с помощью индукции легко вывести, что $p_i(\cdot, \cdot)$ при $i \geq 1$ обладает свойством, аналогичным указанному для $p(\cdot, \cdot)$. Условие (7B) заведомо выполнено, если E счетно, а каждый столбец соответствующей переходной матрицы содержит конечное число ненулевых элементов.

Теперь сформулируем второе из упомянутых условий:

(7Г) Во-первых, $X \in \mathcal{X}_1$ и реализуются условия (6A) и (7B), u , во-вторых, найдется такое натуральное N , что $(P^n f, u) \neq 0$ при $n \geq N$

и семейство функций

$$\varphi_n = \frac{\hat{P}^n u}{(f, \hat{P}^n u)} = \frac{\hat{P}^n u}{(\hat{P}^n f, u)}, \quad n \geq N, \quad (7.6)$$

равномерно интегрируемо по π на каждом E_m , $m \geq 1$ (ср. с семейством $\mathcal{F}$ из § 2).

Вторую часть (7Г) можно считать двойственной аналогичному условию из предложения 4.1.

Теорема 7.3. Пусть реализуется (7Г) с малыми множествами E_n , $n \geq 1$, и пусть π_u является малой мерой. Пусть π служит мерой неприводимости цепи X и любая мера $\pi_1 \leq \pi$, инвариантная для X и конечная на каждом E_n , совпадает с π с точностью до числового множителя. Если выполнено (7.4), то справедливо и (5.3) с $\nu = \pi_u$ и любыми малыми функциями в роли f и g . Если, кроме (7.4), соблюдается (2А) с указанной мерой ν и цепи X присуще π_u -свойство Лиувилля, то применимо и (5.1) с любыми $\chi \in \mathcal{P}(\pi_u)$ и любыми малыми функциями в роли f и g , а меру ν в (5.1) можно заменить любой малой мерой $\nu_1 \in \mathcal{P}$.

Напомним, что определенные сведения о малых мерах приведены в § 9 и что $\pi \in \mathcal{M}_0$ при условиях последней теоремы (см. предложение 6.2).

2. Рассмотрим семейство $\mathcal{H}$ всех функций, гармонических для цепи X (напомним, что в данной работе они по определению неотрицательны [22, с. 520]). Так как ν -свойство Лиувилля, согласно которому все $h \in \mathcal{H}$ сохраняют постоянство ν -п.в., относится к числу труднопроверяемых, мы обсудим здесь два случая, когда в рамках наших рассмотрений это свойство удастся заменить его аналогом, касающимся лишь элементов h подходящего семейства $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ (в подобной ситуации будем говорить о выполнении ν -свойства Лиувилля в $\mathcal{H}_0$). Если же все $h \in \mathcal{H}_0$ постоянны всюду в E , то удобно говорить о наличии точного свойства Лиувилля в $\mathcal{H}_0$, опуская указание «в $\mathcal{H}_0$ » при $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$. Отметим, что не так уж редко ν -свойство Лиувилля оказывается равносильным своему точному варианту (см. ниже случай с $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_2$).

Сначала в качестве $\mathcal{H}_0$ возьмем семейство $\mathcal{H}_1$ всех ограниченных $h \in \mathcal{H}$, а на прежнее семейство $\mathcal{F} = \{f_n = P^n f / \nu(P^n f); n \geq n_0\}$ из § 2 наложим следующее требование, заимствованное из теоремы 2.3.

(7Д) *Имеет место (2А) и найдется такое $M > 0$, что $\nu P^m(A_n) \rightarrow 0$, коль скоро $m \geq 0$ и $n \rightarrow \infty$, где $A_n = \{x \in E: f_n(x) > M\}$, $n \geq n_0$.*

Это требование наверняка выполнено, если $\mathcal{F}$ равномерно ограничено или если справедливо (7В) и каждая из мер νP^m , $m \geq 0$, сосредоточена на каком-либо E_n с $n = n(m) \geq 1$, а $\mathcal{F}$ финально равномерно

ограничено (т.е. при некотором $M_1 > 0$ и любом $m \geq 1$ на E_m выполняется неравенство $|f_n| \leq M_1$ при условии, что n превышает некоторое $N_m > 0$, ср. [13, пример 1]).

Теорема 7.4. *При осуществлении (7Д) теоремы 2.1 и 2.2 сохраняют силу и после замены исходного ν -свойства Лиувилля цепи X его аналогом для $\mathcal{H}$. Такая же замена, сочетаемая с соответствующей заменой π_f -свойства Лиувилля цепи $\hat{X}$, допустима и в теореме 7.2, если в нее включено условие (7Д) вместе с его вариантом для $\hat{X}$.*

Разумеется, справедливы и соответствующие версии следствия 7.1 и теоремы 7.3.

Для дальнейшего нам потребуется следующее условие.

(7Е) *Пространство E является метрическим и притом локально компактным и σ -компактным, а в роли $\mathcal{E}$ берется совокупность борелевских множеств в нем; оператор P , отвечающий X , отображает в себя семейство $\mathcal{C}_K(E)$ всех непрерывных в E функций с компактными носителями.*

В этом случае X обладает усиленным феллеровским свойством, указанным в лемме 8.1, и, кроме того, если наша мера η плотна в E (т.е. $\eta(U) > 0$, коль скоро $U \subset E$ непусто и открыто), то ν -свойство Лиувилля в семействе $\mathcal{H}_2$ всех непрерывных $h \in \mathcal{H}$ совпадает с точным свойством Лиувилля в этом семействе.

Теорема 7.5. *Пусть выполняется условие (7Е) и, кроме того, семейство $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно и равномерно ограничено на каждом компакте в E . Если мера η плотна в $\mathcal{E}$, то в теореме 7.3 допустимо использовать (7Е) вместо (7Д), одновременно заменив $\mathcal{H}_1$ на $\mathcal{H}_2$.*

Сочетая замены, предложенные в теоремах 7.3 и 7.4, нетрудно получить аналогичную теорему для $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ вместо $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Отметим, что в силу теоремы 3.1 из [12] свойства $\mathcal{F}$, упомянутые в теореме 7.4, вытекают из условий типа (6.2) для широкого класса случайных блужданий на группах.

8. Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 7.1. Ввиду (7.1) умножение функций f, g, u на подходящие множители позволяет далее считать, что $\pi(f) = \pi(g) = \pi(u) = 1$.

Начнем с пункта (а). В силу умеренной стабильности T_0 имеем $\pi_u(P^n f) = (u, P^n f) = \pi_f(\hat{P}^n u) > 0$ при достаточно больших значениях n , с которыми и условимся работать. В рассматриваемой ситуации (5.3) сводится к утверждению, что отношение

$$\frac{\pi_u(P^n g)}{\pi_u(P^n f)} = \frac{\pi_g(\hat{P}^n u)}{\pi_f(\hat{P}^n u)} \quad (8.1)$$

стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. При этом $\pi_g \in \mathcal{P}_0$ в соответствии с (7.2) и замечанием 6.2. Отсюда и из умеренной стабильности T_0 следует, что правая, а с нею и левая части (8.1) действительно стремятся к 1, и (5.3) доказано.

Добавив к (7А) требование стабильности T_1 , можно в (5.3) заменить $\nu(P^n f)$ на $\varkappa(P^{n+m} f)$, где $\varkappa \in \mathcal{P}(\eta)$ и $m \geq 0$, откуда следует (5.1). При наличии еще и умеренной стабильности T_2 можно затем в (5.1) подставить $\nu_1(P^n g)$ вместо $\nu(P^n g)$, если $\nu_1 \in \mathcal{P}(\eta)$, чем и заканчивается рассмотрение пункта (а).

Перейдем к пункту (б). Ввиду (7.3) умеренная стабильность T_1 и T_2 влечет соотношения $\nu(P^n f) \sim \pi_u(P^n f)$ и $\nu(P^n g) \sim \pi_u(P^n g)$, благодаря чему доказательство (5.3) вновь сведено к вычислению предела левой части (8.1). Однако по уже доказанному этот предел равен 1, откуда и вытекает (5.3), и для завершения доказательства остается привлечь те же доводы, что и ранее.

С комментариями по поводу теоремы 7.1 (см. § 7) связано следующее замечание.

З а м е ч а н и е 8.1. Если выполняется (6А) и справедливо (5.3) с $\nu = \pi_u$ и любыми $g \in \mathcal{B}_+$, допускаемыми (7.1) и (7.2), то триплет T_0 умеренно стабилен. В самом деле, пусть $\mu_1 \in \mathcal{P}_0$ и потому (см. замечание 6.2) $\mu_1 = g\pi$, где $g \in \mathcal{B}_+$ удовлетворяет (7.2) с $C > 0$ и $\pi(g) = 1$. Ввиду (5.3) при $\pi(f) = 1$ левая часть (8.1) стремится к 1, когда $n \rightarrow \infty$, и, следовательно, то же происходит с правой частью, которая совпадает с $\mu_1(\hat{P}^n u)/\pi_f(\hat{P}^n u)$, что и ведет к нашему утверждению.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 7.2. Пусть снова $\pi(f) = \pi(g) = \pi(u) = 1$. Рассмотрим пункт (а). Так как $X \in \mathcal{X}_1$ и $\pi_u(P^n f) = \pi_f(\hat{P}^n u)$, то (6.2) влечет (2Б₂) с триплетом T_0 , откуда ввиду теоремы 2.2 вытекает стабильность T_0 . Кроме того, применима и оценка (7.2), поскольку $g \in \mathcal{S}$, и мы оказываемся в рамках условия (7А). Теперь теорема 7.1 влечет (5.3) с $\nu = \pi_u$. Чтобы получить (5.3) с произвольно выбранной функцией $f_1 \in \mathcal{S}$ вместо f , достаточно каждый член (5.3) разделить на соответствующий член такого же равенства, в котором вместо g взято f_1 .

Потребуем дополнительно, чтобы цепь X обладала π_u -свойством Лиувилля и выполнялось условие (2А). Как и в случае с T_0 , триплет T_1 оказывается стабильным, а с ним стабильным является и T_2 (см. следствие 6.1). Поэтому анализ пункта (а) завершается ссылкой на теорему 7.1.

Перейдем к пункту (б). По следствию 6.1 условие (7Б') влечет стабильность как T_1 , так и T_2 . Ввиду стабильности T_1 получаем (6.2) с $\nu = \pi_u$, откуда, как и в начале доказательства, вытекает стабильность T_0 . Таким образом, мы пришли к условию (7Б), и требуемое утверждение вытекает из теоремы 7.1.

Доказательство следствия 7.1. Положим $\nu = \pi_u$ и отметим два факта. Первый: меры $\eta = \nu G^\alpha$ и π эквивалентны, так как $\eta(A) = \int G^\alpha(x, A)u(x)\pi(dx) = \int_A G^\alpha u d\pi$, $A \in \mathcal{E}$, и $G^\alpha u > 0$ согласно определению малой функции; поэтому π - и γ -свойства Лиувилля равносильны. Второй факт: выполняется соотношение (6.2). Действительно, $\nu(P^{2n+2}f) \sim \nu(P^{2n}f)$ при $n \rightarrow \infty$ (ср. (4.1) из [20]), а, с другой стороны, по определению семейства $\mathcal{X}_1$ имеем $(1 - \varepsilon)\nu(P^{2n}f) \leq \nu(P^{2n+1}f) \leq (1 + \varepsilon)\nu(P^{2n+2}f)$, если n достаточно велико, а $\varepsilon > 0$ фиксировано. Поэтому $\nu(P^{2n+1}f) \sim \nu(P^{2n}f) \sim \nu(P^{2n+2}f)$, и (6.2) установлено. Сопоставив теорему 7.2 с этими фактами и с предложением 6.1, получаем требуемое.

Доказательство теоремы 7.3. Начнем с доказательства утверждения, касающегося (5.3). Задав подпоследовательность $\mathfrak{N}$ натурального ряда и повторив с некоторыми упрощениями доказательство леммы 3.2, извлечем из $\mathfrak{N}$ подпоследовательность $\mathfrak{M}$ такую, что $\varphi_n \xrightarrow{w} F$, $n \in \mathfrak{M}$, в $\mathcal{L}_m \equiv L(1_{E_m}\pi)$ при всех $m \geq 1$, где функции φ_n , $n \geq N$, — те же, что в (7.6), а функция $F \geq 0$ принадлежит всем $\mathcal{L}_m$, $m \geq 1$. Равенство $\pi_1(h) = (F, h)$, $h \in \mathcal{B}_+$, задает на $\mathcal{E}$ некоторую меру π_1 , причем $\pi_1(E_n) < \infty$, $n \geq 1$. Если $h \in \mathcal{S}$, то $Ph \in \mathcal{S}$ и по предложению 9.1 $h = Ph = 0$ вне какого-либо из множеств E_m . Вспомнив замечание 6.1 и взяв в теореме 6.1 $g = h$ и $\mu = \nu = \pi_u$, находим, что $(\hat{P}^{n+1}u, h) = (u, P^{n+1}h) \sim (u, P^n h) = (\hat{P}^n u, h)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \pi_1(Ph) &= (F, Ph) = \lim(\varphi_n, Ph) = \lim \frac{(\hat{P}^{n+1}u, h)}{(P^n f, u)} \\ &= \lim \frac{(\hat{P}^n u, h)}{(P^n f, u)} = \lim(\varphi_n, h) = \pi_1(h), \end{aligned}$$

где $n \rightarrow \infty$ вдоль $\mathfrak{M}$, откуда $\pi_1(Ph) = \pi_1(h)$ при любых $h \in \mathcal{S}$.

На самом деле последнее равенство справедливо для всех $h \in \mathcal{B}_+$. Например, оно вытекает из уже доказанного, если найдутся функции $h_1 \leq h_2 \leq \dots$ такие, что $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$ в E и $h_n \in \mathcal{S}$ при достаточно больших n , и, в частности, если $h \in \mathcal{B}_+$ и $\pi(h) > 0$ (в этом случае ввиду предложения 9.1 можно взять $h_n = 1_{E_n}h$). Поэтому оно применимо к функциям v и $h + v$, где $v \in \mathcal{S}$ и $h \in \mathcal{B}_+$, что позволяет без труда распространить его и на $h \in \mathcal{B}_+$ с $\pi(h) = 0$ и в итоге установить инвариантность π_1 для X .

По условию теоремы $\pi_1 = a\pi$ с некоторым $a \geq 0$, которое легко находится: так как $(\varphi_n, f) = 1$, $n \geq N$, то $\pi_1(F) = (F, f) = 1 = a\pi(f)$, т.е. $a = 1/\pi(f)$. Поэтому далее считаем $F \equiv 1/\pi(f)$, и независимость F от конкретного выбора $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ позволяет утверждать (ср. с доказательством теоремы 2.1), что $\varphi_n \xrightarrow{w} F$ в $\mathcal{L}_m$, $m \geq 1$, когда $n \rightarrow \infty$. Непосредственно отсюда следует (5.3) с $\nu = \pi_u$ и любыми $g \in \mathcal{S}$, а чтобы получить (5.3)

с любыми $f_1 \in \mathcal{S}$ вместо f , нужно лишь заметить, что по доказанному $\nu(P^n f_1)/\nu(P^n f) \rightarrow \pi(f_1)/\pi(f)$.

Пусть соблюдаются условия из последней фразы теоремы. Если меры $\mu, \varkappa \in \mathcal{P}$ малы и $f, g \in \mathcal{S}$, то по следствию 6.1 триплеты $\{f, \mu, P\}$ и $\{g, \mu, P\}$ стабильны и, следовательно, $\mu(P^n f) \sim \pi_u(P^n f) \sim \varkappa(P^{n+m} f)$ и $\mu(P^n g) \sim \pi_u(P^n g)$. Отсюда и из уже доказанной части теоремы вытекает ее последнее утверждение.

Доказательство теоремы 7.4. Пусть X обладает ν -свойством Лиувилля в $\mathcal{H}_1$ и реализуются (2А) и (2Б₁). Как и при доказательстве теоремы 2.1, рассмотрим подпоследовательность $\mathfrak{N}$ натурального ряда и из нее извлечем подпоследовательность $\mathfrak{M}$ такую, что $P^m f_n \xrightarrow{w} P^m F$ в $L(\mu)$, $n \in \mathfrak{M}$, при всех $m \geq 0$, где функции f_n те же, что и в (2А), $F \geq 0$ — некоторая супергармоническая функция, а μ пробегает $\mathcal{P}_1(\nu)$. Если $v \in \mathcal{B}_+$, то $\nu P^m(v f_n 1_{A_n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (см. (2А) и (7Д)), где A_n взято из (7Д), и $\nu P^m(v f_n 1_{X-A_n}) \leq M \nu P^m(v)$. Таким образом,

$$\nu P^m(v F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu P^m(v f_n) \leq M \nu P^m(v)$$

для всех $v \in \mathcal{B}_+$, т.е. $F \leq M \nu P^m$ -п.в., и, более того, $F \leq M \mu$ -п.в., если $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$. Заменив при необходимости F на $\min(F, M)$, можем считать функцию F ограниченной, и теперь те же доводы, что и в конце доказательства теоремы 2.1, устанавливают достаточность (2А) и (2Б₁) для справедливости (1.5) с $\mu \in \mathcal{P}(\eta)$ и в рассматриваемой здесь ситуации. Доказательство же необходимости (2А) и (2Б₁) не требует новшеств.

Итак, требуемый вариант теоремы 2.1 установлен. Сходные соображения приводят к аналогичному варианту теоремы 2.2, и для завершения теперешнего доказательства остается внести очевидные изменения в доказательство теоремы 7.2.

Доказательству теоремы 7.5 предположим две леммы, в которых подразумевается выполненным условие (7Е), хотя при желании в них можно было бы считать пространство E локально компактным, но, возможно, не σ -компактным.

Лемма 8.1. *Оператор P обладает усиленным феллеровским свойством: он отображает в себя пространство всех функций, непрерывных на E .*

Доказательство. Зададим функцию w , непрерывную на E , и компакт $A \subset E$. В силу (7Е) найдется компакт $B \subset E$, вне которого $p(\cdot, A) = 0$, а по теореме Титце–Урысона [17] существует функция $w_1 \in \mathcal{C}_K(E)$, совпадающая с w на B . Так как функция Pw_1 непрерывна и $Pw(x) = \int_B w(y) p(x, dy) = Pw_1(x)$ для $x \in A$, то и сужение Pw на A непрерывно на A , и лемма доказана.

Лемма 8.2. *Пусть W — некоторое семейство функций, равномерно непрерывное и равномерно ограниченное на каждом ком-*

пакте в E . Тогда те же свойства имеет и $PW = \{Pw: w \in W\}$.

Доказательство. Снова с некоторым компактом $A \subset E$ свяжем компакт $B \subset E$, вне которого $p(\cdot, A) = 0$. Пространство $\mathcal{C}(B)$ функций, непрерывных на B , наделим обычной топологией равномерной сходимости. По теореме Арцела [18], задав $\varepsilon > 0$, можно найти ε -сеть в $\mathcal{C}(B)$, составленную из функций $\tilde{w}_i$, $1 \leq i \leq m$, каждая из которых является сужением на B подходящей функции $w_i \in W$. Если $w \in W$, то при должном выборе i имеем $|w(y) - \tilde{w}_i(y)| < \varepsilon$ при всех $y \in B$, и поэтому для $x \in A$

$$|Pw(x) - Pw_i(x)| \leq \int_B |w(y) - \tilde{w}_i(y)| p(x, dy) < \varepsilon.$$

Иными словами, сужения на A функций PW_i , $1 \leq i \leq m$, образуют ε -сеть для множества, состоящего из сужений на A функций из PW , и остается вновь сослаться на теорему Арцела.

Доказательство теоремы 7.5. Как и при доказательстве теоремы 7.4, ограничимся сравнительно подробным обоснованием лишь достаточности (2A) и (2B₁) для выполнения (1.5). Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторая подпоследовательность натурального ряда, и пусть компакты $E_n \subset E$, $n \geq 1$, таковы, что $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ и каждая точка из E_n является внутренней для E_{n+1} . Согласно теореме Арцела, найдутся такие подпоследовательности $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ и непрерывная в E функция $F \geq 0$, что на каждом E_m , $m \geq 1$, функции $f_n \in \mathcal{F}$ равномерно сходятся к F , когда $n \rightarrow \infty$ вдоль $\mathfrak{M}$. При этом $P^m f_n \xrightarrow{w} P^m F$ в $L(\mu)$, $n \in \mathfrak{M}$, если $m \geq 1$ и $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$.

Отсюда, следуя доказательству теоремы 2.1, выводим неравенство (3.8), а следовательно, и неравенство $PF \leq F$ η -п.в. На самом деле $PF \leq F$ всюду в E , так как мера η плотна в E , а функция PF непрерывна в силу леммы 8.1. Поэтому функция F супергармонична, а множество D , участвующее в доказательстве теоремы 2.1, пусто, что позволяет повторить в упрощенной форме конец того же доказательства и установить упомянутую достаточность условий (2A) и (2B₁).

9. Добавление: некоторые свойства малых функций и мер.

Параграф содержит три предположения. Согласно первому из них, в некоторых ситуациях семейство $\mathcal{S}$ всех функций, малых для цепи X , допускает очень простое описание. Из второго видно, что используемый нами вариант определения малой меры при широких условиях совпадает со своим аналогом из [8]. Наконец, в третьем отмечено одно полезное свойство малых функций и мер, отвечающих аperiодическим цепям Маркова.

Предложение 9.1. Пусть выполняется условие (7B), хотя бы и без требования из (6A), касающегося $\hat{X}$. Пусть семейство $\mathcal{S}_1$ состоит из всех функций $v \in \mathcal{B}_+$ с $\pi(v) > 0$, обращающихся в 0 вне

некоторого E_j , где $j = j(v) \geq 1$. Тогда $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}$, а если множества E_n , $n \geq 1$, малы и мера π из условия (6А) служит мерой неприводимости для X , то $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$.

Доказательство. Учитывая (6.6), подберем $m \geq 1$ так, чтобы $\xi(E_m) > 0$ для $\xi \in \mathcal{M}_0$. Если $w \in \mathcal{S}$, то $\pi(w) > 0$ согласно предложению 6.2 и $w \leq aP^n 1_{E_m}$ при некоторых $a > 0$ и $n \geq 1$. Отсюда ввиду условия (7В) следует, что $w \in \mathcal{S}_1$, т.е. $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}$. Если же реализуются условия, введенные в конце доказываемого предложения, то $\pi \in \mathcal{M}_0$ (см. предложение 6.2), так что $\xi(v) > 0$ для всех $v \in \mathcal{S}_1$ и к тому же $v \leq b1_{E_j}$ при подходящих $b > 0$ и $j \geq 1$. Таким образом, $v \in \mathcal{S}$ и $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$.

Теперь немного о малых мерах. Мере ν назовем *малой* (для X), если всякой конечной нетривиальной мере μ можно сопоставить такие $b > 0$ и $m \geq 0$, что $\nu \leq b\mu P^m$. Для такой меры ν семейство $\mathcal{P}_1(\nu)$ из § 2 совпадает с множеством всех малых мер из $\mathcal{P}$. В случае малых мер μ и ν меры μG^α и νG^α эквивалентны, а потому μ - и ν -свойства Лиувилля равносильны друг другу.

Покажем, что при широких условиях приведенное определение малой меры совпадает со второй частью определения 2.3 [8].

Предложение 9.2. Если σ -алгебра $\mathcal{E}$ счетнопорождена, а цепь X неприводима, то мера $\nu \in \mathcal{P}$ мала тогда и только тогда, когда существуют мера $\xi \in \mathcal{M}_0$, множество $B \in \mathcal{E}$ с $\xi(B) > 0$ и числа $b > 0$ и $m \geq 1$ такие, что

$$\nu(A) \leq bp_m(x, A) \quad (9.1)$$

для всех $x \in B$ и $A \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Выделим не более чем счетную алгебру $\mathcal{A} = \{A_n; n \geq 1\}$, порождающую $\mathcal{E}$ [19, гл. 1, § 5]. Фиксировав $\xi \in \mathcal{M}_0$ и малую меру $\nu \in \mathcal{P}$, предъявим B , m и b с нужными свойствами. Пусть $A_{m,i} \in \mathcal{E}$ ($m, i \geq 1$) образовано из всех $x \in E$, для которых справедливо (9.1) с $b = i$ и каждым $A \in \mathcal{A}$. Если в роли меры μ из определения малой меры взять $p(x, \cdot)$ с каким-либо $x \in E$, то очевидным образом получим (9.1) с некоторыми $b > 0$ и $m \geq 1$ и любыми $A \in \mathcal{E}$. Следовательно, $E = \bigcup_{m,i \geq 1} A_{mi}$ и $\xi(A_{mi}) > 0$ при подходящих m и i , которые далее фиксируются. Положив $B = A_{mi}$, отметим, что $\xi(B) > 0$ и что при всех $x \in B$ и $A \in \mathcal{A}$ применимо (9.1) с $b = i$, причем эта картина не изменится, если в (9.1) меры ν и $p(x, \cdot)$ заменить их сужениями на $\mathcal{A}$. Однако всякая конечная мера, заданная на $\mathcal{A}$, единственным образом продолжается до меры, заданной на $\mathcal{E}$, и это продолжение совпадает с сужением на $\mathcal{A}$ соответствующей внешней меры [19, §§ 11–13]. Это значит, что (9.1) выполняется для любых $x \in B$ и $A \in \mathcal{E}$ при $b = i$, так что искомые B , m и b найдены.

Наоборот, пусть $\mu, \nu \in \mathcal{P}$ и имеются ξ , B , m и b с надлежащими свойствами. Так как $\mu G^\alpha(B) > 0$, $\alpha > 0$, то $\mu P^n(B) > 0$ при некотором $n \geq 1$. Проинтегрировав обе части (9.1) по μP^n , приходим к неравенству $\nu(A) \leq b_1 \mu P^{n+m}(A)$, $A \in \mathcal{E}$, где $b_1 > 0$, в силу которого мера ν мала, что и требовалось доказать.

Предложение 9.3. Пусть цепь X неприводима и апериодична, а σ -алгебра $\mathcal{E}$ счетнопорождена. Пусть функции f и g и меры μ и ν малы. Тогда при всех достаточно больших $n \geq 1$ имеют место неравенства $g \leq b_n P^n f$ и $\nu \leq \beta_n \mu P^n$ с некоторыми $b_n, \beta_n > 0$.

Доказательство. Если мера $\nu_1 \in \mathcal{P}$ мала и $\nu_1(g) > 0$, то $p_m(\cdot, dy) \geq a_m g(\cdot) \nu_1(d)$ при всех достаточно больших $m \geq 1$, где $a_m > 0$ [8, § 24]. С другой стороны, $P^i f \geq cg$ при некоторых $i \geq 0$ и $c > 0$, и поэтому при указанных m находим:

$$P^{m+i} f = P^m P^i f \geq a_m \nu_1(P^i f) g \geq c a_m \nu_1(g) g,$$

откуда вытекает первое из требуемых неравенств.

Если же $\nu_1 = \nu$, то аналогичным образом при любом достаточно большом m получаем:

$$\mu P^{m+j}(A) = \int \left[\int p_j(x, dy) p_m(y, A) \right] \mu(dx) \geq a_m \nu(A) \mu P^j(g),$$

где $A \in \mathcal{E}$, а $j \geq 0$ следует выбрать так, чтобы $\mu P^j(g) > 0$. Тем самым доказано и второе из требуемых неравенств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

17. Александрян Р. А., Мирзаян Э. А. Общая топология. М.: Высшая школа, 1979, 336 с.
18. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988, 397 с.
19. Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953, 291 с.
20. Шур М. Г. Предельные теоремы для отношений, ассоциированных с самосопряженными операторами и симметричными цепями Маркова. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 2, с. 268–288.
21. Шур М. Г. Квазифеллеровские расширения марковских цепей и существование двойственных цепей. I. — Матем. заметки, 2001, т. 69, № 1, с. 133–143.
22. Шур М. Г. Условия равномерной интегрируемости в сильных предельных теоремах для отношений. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 3, с. 517–532.
23. Шур М. Г. Мажорирующие потенциалы в сильных предельных теоремах для отношений. В печати.
24. Woess W. Random Walks on Infinite Graphs and Groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000, 334 p.

Поступила в редакцию
19.V.2009