Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, А. Г. Барсегян, Случайные блуждания и смеси гамма-распределений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 3, 571–577

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4242>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 11:56:18

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2010 г.

ЕНГИБАРЯН Н. Б.* , БАРСЕГЯН А. Г.*

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ И СМЕСИ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Рассматривается интегральное уравнение Винера–Хопфа, описывающее случайное блуждание на полуоси в случае, когда плотность распределения случайной величины является двусторонней смесью гамма-распределений. Выявлена структура функции распределения первого вхождения в множество $x < 0$ или $x \geq 0$. Предложен простой способ построения этих функций и соответствующей функции восстановления в случае симметрического распределения с одной экспонентой. Результаты работы расширяют класс задач случайного блуждания, допускающих эффективное решение. Применяется метод нелинейных уравнений факторизации.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, смесь гамма-распределений, факторизация, построение решения.

1. Введение. Большой круг задач теории случайных процессов и их физических приложений сводится к интегральному уравнению Винера–Хопфа (см. [1]–[6]):

$$S(x) = g(x) + \lambda \int_0^\infty K(x-t)\lambda(t)S(t) dt, \quad (1.1)$$

где

$$0 < \lambda \leq 1, \quad 0 \leq K \in L_1(-\infty; \infty), \quad \int_{-\infty}^\infty K(x) dx = 1. \quad (1.2)$$

Условия (1.2) означают, что ядерная функция K представляет собой плотность распределения некоторой случайной величины ξ .

В диссипативном случае $\lambda < 1$ предполагается наличие несобственного поглощающего состояния.

В теории случайных блужданий на полупрямой основной интерес представляет однородное консервативное уравнение (когда $g = 0$ и $\lambda = 1$). В теории переноса излучения (см. [3]–[5]) функция g играет роль распределения первичных источников блуждающих частиц.

Теория уравнений (1.1), (1.2) разработана достаточно полно (см. [2], [7]). Однако все еще узок круг тех уравнений, которые допускают замкнутое решение или эффективное численно-аналитическое решение. В [1, гл. IV, § 4] подчеркивается трудность получения явных формул для ρ распределения первого вхождения блуждающей частицы (в множество $x < 0$ или $x \geq 0$). В качестве «примечательного исключения из

* Институт математики Национальной академии наук Армении, просп. Маршала Баграмяна 246, 0019 Ереван, Армения; e-mail: yengib@instmath.sci.am, bagrat@eif.am; anibarseghyan@mail.ru

этого правила» приводится пример распределения с одним показательно убывающим хвостом. Тогда $K(x) = ce^{xs}$, $x < 0$, $0 < c < s$.

В теории переноса излучения, в кинетической теории газов и др. важную роль играет плотность K , представленная в виде смеси двусторонних распределений Лапласа (см. [3]–[6]):

$$K(x) = \int_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s), \quad (1.3)$$

где

$$\sigma(s) \uparrow \text{ по } s, \quad 2 \int_a^b \frac{1}{s} d\sigma(s) = 1. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.1), (1.3) и его несимметрический аналог успешно решаются путем сочетания нелинейного уравнения Амбарцумяна с модифицированным методом дискретных ординат Чандрасекара (см. [2]–[5], [7], [8]).

Целью настоящей заметки является расширение круга эффективно решаемых уравнений (1.1), (1.2). Будет рассмотрен случай, когда ядро K представлено в виде конечной двусторонней смеси гамма-распределений.

2. Постановка задачи.

2.1. Смеси гамма-распределений. Гамма-распределение неотрицательной случайной величины задается плотностью (см. [1])

$$f_{s,\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} s^{\nu+1} x^\nu e^{-sx}, \quad x > 0, \quad s > 0, \quad \nu \geq 0,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. В теории массового обслуживания гамма-плотности с показателями $\nu \in \mathbf{N}$ известны как распределения Эрланга.

Нами будет рассмотрено уравнение (1.1) в случае, когда плотность K имеет вид

$$K^\pm(x) = \sum_{j=1}^J \exp(-s_j^\pm x) P_{N,j}^\pm(x), \quad (2.1)$$

где $K^\pm(x) = K(\pm x)$, $x > 0$. Здесь $s_j^\pm > 0$, а $P_{N,j}^\pm$ суть полиномы порядка меньшего или равного N с неотрицательными коэффициентами:

$$P_{N,j}^\pm(x) = \sum_{m=0}^N a_{m,j}^\pm \frac{(s_j^\pm)^{m+1}}{m!} x^m, \quad a_{m,j}^\pm \geq 0, \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, J. \quad (2.2)$$

Условие нормировки в (1.2) означает выполнение равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = \sum_{j=1}^J \sum_{m=0}^N (a_{m,j}^+ + a_{m,j}^-) = 1.$$

Смеси гамма-плотностей вида (2.1) составляют достаточно широкий класс распределений. Они могут иметь «довольно немонотонное» поведение, в отличие от функций, представленных в виде (1.3), которые вполне монотонны на положительной и отрицательной полупрямых.

Метод будет подробно изложен в случае симметрической плотности с одной экспонентой:

$$K(x) = \exp(-s|x|) P_N(|x|), \quad (2.3)$$

где $0 < \lambda \leq 1$, а P_N — полином с неотрицательными коэффициентами:

$$P_N(x) = \sum_{m=0}^N a_m \frac{s^{m+1}}{m!} x^m, \quad a_N > 0, \quad a_m \geq 0, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad s > 0. \quad (2.4)$$

Предлагаемая процедура решения уравнения (1.1) имеет определенное сходство с методом уравнения Амбарцумяна.

2.2. Нелинейное уравнение факторизации. Приведем некоторые сведения о нелинейных уравнениях факторизации (НУФ) интегральных операторов Винера–Хопфа (см. [7]), которые будут использованы в дальнейшем изложении. НУФ ранее были использованы в вопросах изучения некоторых задач теории случайных процессов (см., например, [9]). Пусть $\hat{K}$ — интегральный оператор Винера–Хопфа:

$$(\hat{K}S)(x) = \int_0^\infty K(x-t)S(t) dt, \quad K \in L_1(-\infty, \infty).$$

Рассмотрим факторизацию

$$I - \hat{K} = (I - \hat{V}^-)(I - \hat{V}^+), \quad (2.5)$$

где $\hat{V}^\pm$ суть искомые вольтерровы операторы вида

$$(\hat{V}^+ f)(x) = \int_0^x V^+(x-t)f(t) dt, \quad (\hat{V}^- f)(x) = \int_x^\infty V^-(t-x)f(t) dt, \quad (2.6)$$

$V^\pm \in L_1^+ \equiv L_1(0, \infty)$.

Задача факторизации (2.5) эквивалентна следующим нелинейным уравнениям факторизации:

$$V^\pm(x) = \lambda K^\pm(x) + \int_0^\infty V^\mp(t)V^\pm(x+t) dt. \quad (2.7)$$

При выполнении условий (1.2) НУФ (2.7) имеет так называемое основное решение (V^+, V^-) , которое представляет собой предел в $L_1^+ \times L_1^+$ итерационных последовательностей $V_n^\pm$, определяемых посредством равенств

$$V_{n+1}^\pm(x) = \lambda K^\pm(x) + \int_0^\infty V_n^\mp(t)V_n^\pm(x+t) dt, \quad n = 0, 1, \dots, \quad V_0^\pm(x) = 0, \quad (2.8)$$

Функции $V_n^\pm$ и $V^\pm$ обладают следующими свойствами:

$$0 \leq V_n^\pm \in L_1^+, \quad V_n^\pm \uparrow \text{ по } n, \quad \gamma_n^\pm \equiv \int_0^\infty V_n^\pm(x) dx \leq \lambda; \quad (2.9)$$

$$0 \leq V^\pm \in L_1^+, \quad \gamma^\pm \equiv \int_0^\infty V^\pm(x) dx \leq \lambda, \quad (1 - \gamma^-)(1 - \gamma^+) = 1 - \lambda. \quad (2.10)$$

Пусть $m_1 = \int_{-\infty}^\infty xK(x) dx$ — математическое ожидание случайной величины ξ . Предполагается, что конечен хотя бы один из интегралов $\int_0^\infty xK(\pm x) dx$. При $\lambda = 1$ имеют место соотношения: (а) если $0 < m_1 \leq +\infty$, то $\gamma^+ = 1$, $\gamma^- < 1$; (б) если $-\infty \leq m_1 < 0$, то $\gamma^+ < 1$, $\gamma^- = 1$; (с) если $m_1 = 0$, то $\gamma^\pm = 1$.

В случае симметричного распределения K , когда $K^\pm(x) = K(x)$, $x > 0$, имеем $V_n^\pm = V_n \rightarrow V$, где V — основное решение уравнения

$$V(x) = \lambda K(x) + \int_0^\infty V(t)V(x+t) dt. \quad (2.11)$$

Функция V является пределом в L_1^+ монотонной итерационной последовательности V_n , определяемой посредством равенств:

$$V_0 = 0, \quad V_{n+1}(x) = \lambda K(x) + \int_0^\infty V_n(t)V_n(x+t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Она обладает следующими свойствами:

$$V(x) \geq 0, \quad \gamma = \int_0^\infty V(x) dx = 1 - \sqrt{1 - \lambda}. \quad (2.13)$$

Скорость сходимости итераций (2.12) описывается следующей оценкой величины $\delta_n = \|V - V_n\| = \int_0^\infty [V(x) - V_n(x)] dx$:

$$\delta_n \leq (1 - \sqrt{1 - \lambda})^{n+1} \text{ при } \lambda < 1, \quad \delta_n \leq \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \text{ при } \lambda = 1. \quad (2.14)$$

Если в симметрическом случае распределение обладает конечной дисперсией $m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x) dx < \infty$, то имеет место равенство

$$\nu_1 := \int_0^{\infty} x V(x) dx = \sqrt{\frac{1}{2} m_2}. \quad (2.15)$$

Факторизация (2.5) имеет прямую связь с известным факторизационным тождеством (см. [1]) теории случайных процессов. В задаче распределения частичных сумм одинаково распределенных случайных величин функции $V^{\pm}$ представляют собой плотности распределений первого выхода из полусей $x > 0$ и $x < 0$ соответственно.

Посредством факторизации (2.5) исходная задача случайного блуждания распадается на две задачи, связанные с распределением частичных сумм положительных случайных величин с плотностями V^+ и V^- , т.е. на два процесса восстановления. Соответствующие функции восстановления $\Phi^{\pm}$ являются резольвентными функциями $V^{\pm}$ и определяются из следующих уравнений:

$$\Phi^{\pm}(x) = V^{\pm}(x) + \int_0^x V^{\mp}(x-t) \Phi^{\pm}(t) dt. \quad (2.16)$$

Рассмотрение соотношений (2.7) как линейных уравнений относительно V^+ и V^- приводит к формулам

$$V^{\pm}(x) = K^{\pm}(x) + \int_0^{\infty} \Phi^{\mp}(t) K^{\pm}(x+t) dt. \quad (2.17)$$

Формулы (2.17) являются разновидностями одной известной формулы теории случайных блужданий (см. [1, гл. XII, формула (4.1)]). Они позволяют распространить на $V^{\pm}$ различные частные свойства функций $K^{\pm}$. Так, например, из (2.17) непосредственно следует, что финитность K^+ влечет за собой финитность V^+ . Если $K^+(x) = 0$ при $x > r$, то $V^+(x) = 0$ при $x > r$. Аналогично обстоит дело в случае финитности K^- .

3. Нелинейное уравнение факторизации в случае, когда K является смесью гамма-распределений.

3.1. Структура функций $V^{\pm}$. Пусть функции $K^{\pm}$ имеют вид (2.1). Тогда K обладает конечными моментами всех порядков. Используя выражения (2.1), из формул (2.17) прямыми выкладками проверяем справедливость следующей леммы:

Лемма 3.1. Пусть K^+ или K^- — функции вида (2.1). Тогда $V^{\pm}$ имеют аналогичную структуру с теми же экспонентами:

$$V^{\pm}(x) = \sum_{j=1}^J \exp(-s_j^{\pm} x) Q_{N,j}^{\pm}(x), \quad (3.1)$$

где

$$Q_{N,j}^{\pm}(x) = \sum_{m=0}^N b_{m,j}^{\pm} \frac{(s_j^{\pm})^{m+1}}{m!} x^m, \quad b_{m,j}^{\pm} \geq 0, \quad (3.2)$$

$m = 0, 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, J$. Имеют место формулы:

$$b_{m,j}^{\pm} = a_{m,j}^{\pm} + \sum_{k=m}^N a_{k,j}^{\pm} \frac{(s_j^{\pm})^{k-m}}{(k-m)!} \int_0^{\infty} \Phi^{\mp}(t) t^{k-m} \exp(-s_j^{\pm} t) dt. \quad (3.3)$$

Конечность и неотрицательность чисел $b_{m,j}^{\pm}$ очевидна.

3.2. Случай ядра (2.3). Пусть теперь функция K задается посредством (2.3). Из леммы 3.1 следует, что основное решение НУФ (2.11) имеет вид

$$V(x) = e^{-sx} Q(x), \quad (3.4)$$

где

$$Q(x) = \sum_{m=0}^N b_m \frac{s^{m+1}}{m!} x^m, \quad b_N > 0, \quad b_m \geq 0, \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.5)$$

Займемся вопросом определения коэффициентов b_m . С учетом (2.3) и (3.4) из (2.11) получаем:

$$e^{-sx} \sum_{m=0}^N b_m \frac{s^{m+1}}{m!} x^m = e^{-sx} \sum_{m=0}^N a_m \frac{s^{m+1}}{m!} x^m + \sum_{k=0}^N b_k \frac{s^{k+1}}{k!} \int_0^\infty V(t)(x+t)^k e^{-s(x+t)} dt.$$

Сокращая e^{-sx} , раскрывая бином $(x+t)^k$ и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим:

$$b_m = a_m + \sum_{k=m}^N b_k c_{k-m}, \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (3.6)$$

где

$$c_k = \frac{s^k}{k!} \int_0^\infty V(t) t^k e^{-st} dt. \quad (3.7)$$

Используя представление (3.4), из (3.7) получаем:

$$c_k = \sum_{m=0}^N \frac{(k+m)!}{k! m!} \frac{b_m}{2^{k+m+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (3.8)$$

Итак, определение искомых коэффициентов (b_m) сводится к решению конечной нелинейной алгебраической системы (3.6), (3.8). Эта система достаточно просто решается численно с помощью следующих итераций:

$$\begin{aligned} c_k^{(n)} &= \sum_{m=0}^N \frac{(k+m)!}{k! m!} \frac{b_m^{(n)}}{2^{k+m+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \\ b_m^{(n+1)} &= a_m + \sum_{k=m}^N b_k^{(n)} c_{k-m}^{(n)}, \quad m = 0, 1, \dots, N, \\ b_m^{(0)} &= 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

Индукцией по n проверяется, что последовательности $b^{(n)}$ и $c^{(n)}$ покомпонентно возрастают по n . Для доказательства (покомпонентной) сходимости последовательности векторов $b^{(n)} = (b_0^{(n)}, \dots, b_N^{(n)})$ мы воспользуемся следующим соотношением между данной последовательностью и последовательностью V_n , определяемой согласно (2.12):

$$V_n = e^{-sx} \sum_{m=0}^N b_m^{(n)} \frac{s^{m+1}}{m!} x^m. \quad (3.10)$$

Проверка формулы (3.10) аналогична выводу уравнений (3.6) и (3.8) из НУФ (2.11).

Для оценки отклонения членов последовательности векторов $b^{(n)}$ от ее предела b можно воспользоваться оценкой (2.14). Эту оценку легко приспособить к последовательностям $b^{(n)}$, поскольку согласно (3.4) и (3.10) имеем $\sum_{m=0}^N [b_m - b_m^{(n)}] = \delta_n$.

Другой возможностью контроля результатов расчетов является равенство (2.15), которое в случае ядра вида (2.3) приобретает форму

$$\sum_{m=0}^N b_m (m+1) = \left(\sum_{m=0}^N a_m (m+1)(m+2) \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. В случае ядра (2.3), (1.2) основное решение НУФ (2.11) имеет вид (3.4), где вектор $(b_0, \dots, b_N)$ является покомпонентным пределом монотонной последовательности векторов $b^{(n)} = (b_0^{(n)}, \dots, b_N^{(n)})$, определяемой из итерационного процесса (3.9). Для величины $\sum_{m=0}^N [b_m - b_m^{(n)}] = \delta_n$ имеет место оценка (2.14).

3.3. Построение резольвентной функции. Резольвентная функция Φ определяется из уравнения восстановления:

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi(t) dt. \quad (3.12)$$

Обозначим

$$\Psi(x) = e^{sx}\Phi(x). \quad (3.13)$$

Учитывая (3.12), приходим к следующему уравнению относительно функции Ψ :

$$\Psi(x) = Q(x) + \int_0^x Q(x-t)\Psi(t) dt, \quad (3.14)$$

где полином Q определяется согласно (3.5). Уравнение (3.14) имеет единственное решение, локально интегрируемое на $[0, \infty)$. Это решение может быть построено в виде суммы степенного ряда с неотрицательными коэффициентами:

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \frac{s^{k+1}}{k!} x^k, \quad \psi_k \geq 0. \quad (3.15)$$

Коэффициенты ψ_k определяются из следующих рекуррентных соотношений:

$$\psi_0 = b_0, \quad \psi_i = b_i + \sum_{j=0}^{i-1} b_j \psi_{i-j-1}, \quad i = 1, 2, \dots;$$

здесь $b_i = 0$ при $i > N$. При $\lambda < 1$ имеет место равенство $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k = (1 - \lambda)^{-1/2} - 1$, которое следует из равенства $\int_0^{\infty} \Phi(x) dx = (1 - \lambda)^{-1/2} - 1$.

Данная процедура вычисления коэффициентов ψ_k равносильна разложению рациональной функции $\bar{\Psi}(p) = \bar{Q}(p)/(1 - \bar{Q}(p))$ в ряд по отрицательным степеням p . Черточкой сверху отмечается переход к преобразованию Лапласа. Имеем

$$\bar{\Psi}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \left(\frac{s}{p}\right)^{k+1}, \quad \bar{Q}(p) = \sum_{k=0}^N b_k \left(\frac{s}{p}\right)^{k+1}.$$

Асимптотическое поведение функции Φ в бесконечности при $\lambda = 1$ можно описать с помощью формулы Блекуэлла (см. [1]). Эта функция имеет следующую структуру (см. [10]):

$$\Phi(x) = c + \rho(x) + \omega(x),$$

где $c = [\int_0^{\infty} xV(x) dx]^{-1}$, $\rho \in C_0[0, \infty)$, $\omega \in L_1(0, \infty)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
2. Spitzer F. The Wiener-Hopf equation whose kernel is the probability density. I, II. — Duke Math. J., 1957, v. 24, p. 327–343; 1960, v. 27, p. 363–372.
3. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М.: ИЛ, 1953, 432 с.
4. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М.: Гостехиздат, 1956, 391 с.

5. *Busbridge I. W.* The Mathematics of Radiative Transfer. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960, 143 p. (Cambridge Tracts in Math. Phys., v. 50.)
6. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978, 496 с.
7. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. — Итоги науки и техники. Матем. анализ, т. 22. М.: ВИНТИ, 1984, с. 175–244.
8. *Енгибарян Н. Б., Мелконян Э. А.* О методе дискретных ординат. — Докл. АН СССР, 1987, т. 292, № 2, с. 322–326.
9. *Yengibarjan N. B.* Renewal equation on the whole line. — Stochastic Process. Appl., 2000, v. 85, p. 237–247.
10. *Енгибарян Н. Б.* Уравнения восстановления на полуоси. — Изв. РАН, сер. матем., 1999, т. 63, № 1, с. 61–76.

Поступила в редакцию
7.III.2008

© 2010 г.

КОРОЛЕВ В. Ю.* , ШЕВЦОВА И. Г.**

НОВАЯ МОМЕНТНАЯ ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ТЕОРЕМЕ ЛЯПУНОВА¹⁾

Для равномерного расстояния Δ_n между функцией распределения стандартного нормального закона и функцией распределения нормированной суммы произвольного числа $n \geq 1$ независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n$, имеющих нулевые средние, дисперсии $\sigma_i^2 = \mathbf{D}X_i > 0$ и третьи абсолютные моменты $\beta_i = \mathbf{E}|X_i|^3$, $i = 1, \dots, n$, доказано неравенство

$$\Delta_n \leq 0.3197 \cdot \sum_{i=1}^n (\beta_i + \sigma_i^3) \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right)^{-3/2}.$$

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, неравенство Берри–Эссеена, абсолютная константа.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ и удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{E}X_i = 0, \quad \mathbf{D}X_i = \sigma_i^2 > 0, \quad \mathbf{E}|X_i|^3 = \beta_i < \infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим $S_n = (X_1 + \dots + X_n) / \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}$. Функцию распределения случайной величины S_n и стандартную нормальную функцию распределения соответственно обозначим $F_n(x)$ и $\Phi(x)$. Для удобства введем векторные обозначения $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; Институт проблем информатики РАН; e-mail: vkorolev@cs.msu.su

** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: ishevtsova@cs.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00563, 08-01-00567, 08-07-00152 и 09-07-12032-офи-м), а также Министерства образования и науки (государственные контракты П1181, П779 и П958, грант МК-581.2010.1)