Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова, Новая моментная оценка скорости сходимости в теореме Ляпунова, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 3, 577–582

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:55:46

5. *Busbridge I. W.* The Mathematics of Radiative Transfer. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960, 143 p. (Cambridge Tracts in Math. Phys., v. 50.)
6. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978, 496 с.
7. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. — Итоги науки и техники. Матем. анализ, т. 22. М.: ВИНТИ, 1984, с. 175–244.
8. *Енгибарян Н. Б., Мелконян Э. А.* О методе дискретных ординат. — Докл. АН СССР, 1987, т. 292, № 2, с. 322–326.
9. *Yengibarjan N. B.* Renewal equation on the whole line. — Stochastic Process. Appl., 2000, v. 85, p. 237–247.
10. *Енгибарян Н. Б.* Уравнения восстановления на полуоси. — Изв. РАН, сер. матем., 1999, т. 63, № 1, с. 61–76.

Поступила в редакцию
7.III.2008

© 2010 г.

КОРОЛЕВ В. Ю.* , ШЕВЦОВА И. Г.**

НОВАЯ МОМЕНТНАЯ ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ТЕОРЕМЕ ЛЯПУНОВА¹⁾

Для равномерного расстояния Δ_n между функцией распределения стандартного нормального закона и функцией распределения нормированной суммы произвольного числа $n \geq 1$ независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n$, имеющих нулевые средние, дисперсии $\sigma_i^2 = \mathbf{D}X_i > 0$ и третьи абсолютные моменты $\beta_i = \mathbf{E}|X_i|^3$, $i = 1, \dots, n$, доказано неравенство

$$\Delta_n \leq 0.3197 \cdot \sum_{i=1}^n (\beta_i + \sigma_i^3) \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right)^{-3/2}.$$

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, неравенство Берри–Эссеена, абсолютная константа.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ и удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{E}X_i = 0, \quad \mathbf{D}X_i = \sigma_i^2 > 0, \quad \mathbf{E}|X_i|^3 = \beta_i < \infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим $S_n = (X_1 + \dots + X_n) / \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}$. Функцию распределения случайной величины S_n и стандартную нормальную функцию распределения соответственно обозначим $F_n(x)$ и $\Phi(x)$. Для удобства введем векторные обозначения $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; Институт проблем информатики РАН; e-mail: vkorolev@cs.msu.su

** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: ishevtsova@cs.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00563, 08-01-00567, 08-07-00152 и 09-07-12032-офи-м), а также Министерства образования и науки (государственные контракты П1181, П779 и П958, грант МК-581.2010.1)

В 1941 г. Э. Берри [10] показал, что в сделанных выше предположениях

$$\Delta_n \equiv \sup_{x \in \mathbf{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C_0 \psi_1, \quad (1)$$

где C_0 — конечная положительная абсолютная постоянная,

$$\psi_1 = \psi_1(\vec{\sigma}, \vec{\beta}) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right)^{-1/2} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\beta_i}{\sigma_i^2}.$$

Независимо от Берри в 1942 г. К.-Г. Эсseen [11] доказал неравенство

$$\Delta_n \leq C_0 \psi_2, \quad (2)$$

где C_0 — конечная положительная абсолютная постоянная,

$$\psi_2 = \psi_2(\vec{\sigma}, \vec{\beta}) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right)^{-3/2} \sum_{i=1}^n \beta_i.$$

Несложно убедиться, что $\psi_2 \leq \psi_1$, причем в случае, когда слагаемые $X_1, \dots, X_n$ имеют одинаковые распределения, $\psi_2 = \psi_1 = \beta_1/(\sigma_1^3 \sqrt{n})$. В связи с этими обстоятельствами неравенство (2) принято называть *неравенством Берри–Эсseen*. При этом относительно константы C_0 в (2) известно, что

$$0.4097 \approx \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2}\pi} \leq C_0 \leq 0.5600.$$

Нижняя оценка установлена К.-Г. Эсseenом в 1956 г. [12], верхняя — недавно И. Г. Шевцовой [9]. Как показано в [4], если слагаемые имеют одинаковые распределения, то $C_0 \leq 0.4784$. Богатая результатами и коллизиями история уточнения верхних оценок для C_0 подробно описана в работах [2], [4], [13].

В 1966 г. была опубликована работа С. Цаля [18], в которой доказано неравенство

$$\Delta_n \leq 0.65 \cdot \psi_3, \quad (3)$$

где

$$\psi_3 = \psi_3(\vec{\sigma}, \vec{\beta}) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right)^{-3/2} \sum_{i=1}^n \beta'_i,$$

$$\beta'_i = \begin{cases} \beta_i, & \beta_i \geq \frac{3\sigma_i^2}{\sqrt{2}}, \\ \frac{3b\sigma_i^3}{\sqrt{2}b + 1 - \sqrt{2}\beta_i/(3\sigma_i^3)}, & \beta_i < \frac{3\sigma_i^2}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

$b = 1.07859$. Несложно проверить, что если

$$\sqrt{2}\beta_i\sigma_i^{-2} < 3 < \sqrt{2}\beta_i\sigma_i^{-3}, \quad i = 1, \dots, n,$$

то $\beta'_i < \beta_i$, $i = 1, \dots, n$, и, следовательно, в таком случае $\psi_3 < \psi_2$. Как показано в [18], в общем случае $\psi_3(\vec{\sigma}, \vec{\beta}) \leq 1.58 \cdot \psi_2(\vec{\sigma}, \vec{\beta})$, причем максимальное значение 1.58 отношения ψ_3/ψ_2 достигается на симметричных бернуллиевских распределениях. Поэтому, вообще говоря, функции $\psi_2(\vec{\sigma}, \vec{\beta})$ и $\psi_3(\vec{\sigma}, \vec{\beta})$ несравнимы. На момент опубликования работы [18] наилучшей верхней оценкой константы C_0 в (2) была $C_0 \leq 1.98$ [17], в то время как из (3) вытекает оценка $C_0 \leq 0.65 \cdot 1.58 = 1.027$. Поэтому неравенство (3) стало определенным продвижением в задаче оценивания точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых случайных величин в терминах моментов слагаемых. С другой стороны, значение работы [18], в частности, и в том, что в ней было продемонстрировано, что, выбирая форму зависимости мажоранты от моментов, отличную от простой и удобной классической функции $\psi_2(\vec{\sigma}, \vec{\beta})$, можно

заметно уточнить неравенство Берри–Эссеена, что особенно важно при практических расчетах.

Здесь уместно подробнее остановиться на вопросе о том, почему в данной работе мы сосредоточились на моментных оценках. Этот вопрос тесно связан с вопросом о том, что считать оценкой. Самой точной и правильной оценкой равномерного расстояния является, очевидно, само равномерное расстояние: $\Delta_n \leq \Delta_n$, но по своему смыслу *оценка* должна иметь более простой вид по сравнению с оцениваемой величиной и эффективно вычисляться, требуя лишь *некоторую наиболее доступную* информацию об исходных распределениях. Конечно же, неравенства в терминах псевдомоментов (см., например, [5]) или дзета-метрик (см., например, [7]) могут быть существенно точнее оценок, рассматриваемых в данной заметке. Однако чтобы вычислить характеристики, участвующие в указанных неравенствах (псевдомоменты или дзета-метрики), необходима полная информация о распределениях слагаемых. Но при этом, естественно, имея такую информацию и современные компьютеры, на практике вполне можно оценить погрешность нормальной аппроксимации численно, не прибегая к аналитическим методам. В неравенствах же моментного типа вся необходимая информация сосредоточена лишь в простых характеристиках интегрального типа (первых трех моментах), которые, как правило, можно эффективно оценить по выборке, особенно в случае одинаково распределенных слагаемых. Какими из перечисленных методов пользоваться для оценивания точности нормальной аппроксимации на практике — дело вкуса, но при этом ценой за использование более точных оценок является доступ к более полной информации о распределениях слагаемых.

В данной работе для случая не обязательно одинаково распределенных слагаемых предлагается альтернативная классическому неравенству Берри–Эссеена моментная оценка с уточненной структурой в духе идей, реализованных ранее в наших работах [2]–[4], [13] для случая, в котором слагаемые имеют одно и то же распределение.

Для упрощения выкладок всюду далее будем считать, что $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 = 1$. Обозначим

$$\ell_n = \sum_{i=1}^n \beta_i, \quad \tau_n = \sum_{i=1}^n \sigma_i^3, \quad \varepsilon_n = \ell_n + \tau_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Теорема 1. Для любого $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\Delta_n \leq C_1 \varepsilon_n. \quad (4)$$

При этом $C_1 \leq 0.3197$.

З а м е ч а н и е 1. Верхняя оценка константы C_1 , приведенная в теореме 1, оказывается меньше теоретически минимально возможного значения $0.4097\dots$ константы C_0 в (2). При этом $\tau_n/\ell_n \leq 1$ в силу неравенства Ляпунова. Если $\tau_n/\ell_n \leq 0.75$, то неравенство (4) с $C_1 \leq 0.3197$ устанавливает более точную оценку равномерного расстояния Δ_n , чем неравенство Берри–Эссеена (2) с наилучшей известной верхней оценкой константы $C_0 = 0.5600$; если же $\tau_n/\ell_n \leq 0.28$, то (4) точнее, чем (2) даже с теоретически минимально возможным значением константы $C_0 = 0.4097\dots$

З а м е ч а н и е 2. Если слагаемые $X_1, X_2, \dots$ имеют одинаковые распределения, то, как показано в работах [4] и [17], $C_1 \leq 0.3041$.

З а м е ч а н и е 3. Для C_1 справедлива нижняя оценка $C_1 \geq 2/(3\sqrt{2\pi}) = 0.2659\dots$ (см. [3], [8]).

Доказательство теоремы 1 основано на методе В. М. Золотарева, усовершенствованном при помощи неравенства сглаживания Х. Правитца [14] и некоторых оценок для характеристических функций [4], [7]. Ниже приведем лишь основные идеи, формулируя соответствующие утверждения в виде лемм.

Обозначим

$$f(t) = \mathbf{E} e^{itS_n} = \prod_{j=1}^n f_j(t), \quad f_j(t) = \mathbf{E} e^{itX_j}, \quad r(t) = |f(t) - e^{-t^2/2}|, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Лемма 1 (см. [14]). Для всех $t_0 \in (0, 1]$ и $T > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \Delta_n \leq & 2 \int_0^{t_0} |K(t)| r(Tt) dt + 2 \int_{t_0}^1 |K(t)| \cdot |f(Tt)| dt \\ & + 2 \int_0^{t_0} \left| K(t) - \frac{i}{2\pi t} \right| e^{-T^2 t^2/2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^\infty e^{-T^2 t^2/2} \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

где

$$K(t) = \frac{1}{2} (1 - |t|) + \frac{i}{2} \left[(1 - |t|) \operatorname{ctg} \pi t + \frac{\operatorname{sign} t}{\pi} \right], \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Оценки для характеристических функций устанавливаются следующими леммами. Пусть $\theta_0 \approx 3.995895$ — единственный корень уравнения

$$\theta^2 + 2\theta \sin \theta + 6(\cos \theta - 1) = 0, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$\varkappa \equiv \sup_{x>0} \frac{|\cos x - 1 + x^2/2|}{x^3} \approx 0.09916.$$

Можно убедиться, что супремум достигается в точке $x = \theta_0$. Для $t \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon > 0$ введем функцию

$$\Psi(t, \varepsilon) = \begin{cases} t^2/2 - \varkappa \varepsilon |t|^3, & \varepsilon |t| < \theta_0, \\ \frac{1 - \cos(\varepsilon t)}{\varepsilon^2}, & \theta_0 \leq \varepsilon |t| \leq 2\pi, \\ 0, & \varepsilon |t| > 2\pi. \end{cases}$$

Несложно убедиться, что функция $\Psi(t, \varepsilon)$ монотонно убывает по ε при каждом фиксированном $t \in \mathbf{R}$.

Лемма 2 (см. [15]). Для любого $t \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство $|f(t)| \leq \exp\{-\Psi(t, \varepsilon_n)\}$.

Лемма 3. Для любого $t \in \mathbf{R}$

$$r(t) \leq 2e^{-t^2/2} \int_0^{|t|} \sin\left(\frac{u\varepsilon_n}{4} \wedge \frac{\pi}{2}\right) u \exp\left\{2\varkappa \ell_n u^3 + g\left(\left(\frac{\varepsilon_n}{2}\right)^{1/3} u \wedge \frac{1}{6\varkappa}\right)\right\} du,$$

где $g(u) = u^2/2 - 2\varkappa u^3$, $u \geq 0$, причем $g(u)$ монотонно возрастает при $0 \leq u \leq (6\varkappa)^{-1}$.

Данная лемма является следствием оценок, полученных в работах [4], [6], и замечания о том, что $\ell_n \leq \varepsilon_n$,

$$\sigma_k \leq \left(\frac{\beta_k + \sigma_k^3}{2}\right)^{1/3} \leq \left(\frac{\varepsilon_n}{2}\right)^{1/3}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Лемма 4 (см. [1]). Для любой функции распределения F с нулевым средним и единичной дисперсией

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |F(x) - \Phi(x)| \leq \sup_{x>0} \left(\Phi(x) - \frac{x^2}{1+x^2} \right) = 0.54093 \dots$$

Лемма 4 позволяет не рассматривать область значений $\varepsilon_n \geq 0.54094/0.3197 \approx 1.692$.

Лемма 5 (см. [16]). При условии $(1 - \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2)^{-3/2} \varepsilon_n \leq 0.2$ справедлива оценка

$$\Delta_n \leq (0.2731\ell_n + 0.2420\tau_n) \left(1 - \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2\right)^{-3/2}.$$

Поскольку $\sup_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2 \leq (\varepsilon_n/2)^{2/3}$, при $\varepsilon_n \leq 0.06$ из леммы 5 получаем оценку $\Delta_n \leq 0.3181 \cdot \varepsilon_n$, что позволяет при доказательстве теоремы 1 не рассматривать область $\varepsilon_n \leq 0.06$.

Подставляя оценки для $|f(t)|$ и $r(t)$ из лемм 2 и 3 в правую часть неравенства сглаживания Правитца из леммы 1, получаем некоторую функцию $D(\varepsilon_n, t_0, T)$, мажорирующую равномерное расстояние Δ_n при всех $t_0 \in (0, 1]$, $T > 0$ и $\varepsilon_n > 0$. Таким образом, константу C_1 оказывается возможным искать в виде

$$C_1 = \max_{0.06 \leq \varepsilon \leq 1.7} C(\varepsilon), \quad C(\varepsilon) = \inf_{t_0, T} \frac{D(\varepsilon, t_0, T)}{\varepsilon}.$$

Основываясь на монотонности используемых мажорант для $|f(t)|$ и $r(t)$ по ε_n , заключаем что функция $\varepsilon C(\varepsilon)$ монотонно не убывает, а это позволяет записать неравенство

$$C(\varepsilon) \leq \frac{C(\varepsilon_2)\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2,$$

и оценить $\sup C(\varepsilon)$ по значениям ε лишь в конечном числе точек.

Все необходимые вычисления были произведены в среде Matlab R2006b. Оказалось, что экстремальное значение 0.31965 функции $C(\varepsilon)$ доставляет $\varepsilon \approx 0.964$ ($t_0 \approx 0.3047$, $T \approx 6.2730$), что и доказывает теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением. М.: Наука, 1982, 286 с.
2. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. О верхней оценке абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 4, с. 671–695.
3. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена. — Докл. РАН, 2010, т. 430, № 6, с. 738–742.
4. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам. — Обзорные прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 1, с. 25–56.
5. Паулаускас В. И. Об одном усилении теоремы Ляпунова. — Литов. матем. сб., 1969, т. 9, № 2, с. 173–179.
6. Тюрин И. С. О точности гауссовской аппроксимации. — Докл. РАН, 2009, т. 429, № 3, с. 312–316.
7. Тюрин И. С. Уточнение верхних оценок констант в теореме Ляпунова. — Успехи матем. наук, 2010, т. 65, в. 3(393), с. 201–202.
8. Шевцова И. Г. Нижняя асимптотически правильная постоянная в центральной предельной теореме. — Докл. РАН, 2010, т. 430, № 4, с. 466–469.
9. Шевцова И. Г. Уточнение оценок скорости сходимости в теореме Ляпунова. — Докл. РАН, 2010 (в печати).
10. Berry A. C. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variables. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, v. 49, p. 122–136.
11. Esseen C.-G. On the Liapunoff limit of error in the theory of probability. — Ark. Mat. Astron. Fys., 1942, v. A28, № 9, p. 1–19; <http://www.inframaworld.com/10.1080/03461238.2010.485370>.
12. Esseen C.-G. A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.

13. Korolev V. Yu., Shevtsova I. G. An improvement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums. — Scand. Actuar. J., 2010 (to appear).
14. Prawitz H. Limits for a distribution, if the characteristic function is given in a finite domain. — Scand. Aktuarietidskr., 1972, № 2, P. 138–154.
15. Prawitz H. Weitere Ungleichungen für den absoluten Betrag einer charakteristischen Funktion. — Scand. Actuar. J., 1975, № 1, p. 21–28.
16. Prawitz H. On the remainder in the central limit theorem. — Scand. Actuar. J., 1975, № 3, p. 145–156.
17. Wallace D. L. A corrected computation of Berry’s bound for the central limit theorem error. — Chicago: Stat. Res. Cent., University of Chicago, 1959.
18. Zahl S. Bounds for the central limit theorem error. — SIAM J. Appl. Math., 1966, v. 14, № 6, p. 1225–1245.

Поступила в редакцию
1.VI.2010

© 2010 г.

МУМИНОВ М. С.*

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО УКЛОНЕНИЯ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ФУНКЦИИ РЕГРЕССИИ. I.

В работе для неизвестной плотности распределения $f(t)$, $t \in \mathbf{R}^\nu$, случайного вектора $X \in \mathbf{R}^\nu$ и функции регрессии $r(t) = \mathbf{E}(Y | X = t)$ случайного вектора (X, Y) , $X \in \mathbf{R}^\nu$, $Y \in \mathbf{R}^1$, построены непараметрические ядерные оценки $f_n(t)$ и $r_n(t)$ соответственно. Доказано, что распределение максимального отклонения этих оценок от истинных плотности распределения $f(t)$ и функции регрессии $r(t)$ стремится к двойному экспоненциальному закону при $n \rightarrow \infty$. С помощью построенных оценок найдена доверительная область для $f(t)$ и $r(t)$, отвечающая заданному коэффициенту доверия α ($0 < \alpha < 1$), и построен критерий для проверки гипотезы $H_0: f(t) = f_0(t)$ (соответственно $H'_0: r(t) = r_0(t)$), где $f_0(t)$ — заранее заданная плотность распределения вероятностей, $r_0(t)$ — некоторая заданная функция.

Ключевые слова и фразы: последовательность случайных векторов, плотность распределения вероятностей, функция регрессии, непараметрические ядерные оценки, винеровский процесс с многомерным параметром, локальная стационарность случайных полей, доверительная область, проверка статистических гипотез.

1. Введение. Пусть ν -мерный случайный вектор X имеет неизвестную плотность распределения вероятностей $f(t)$, $t \in \mathbf{R}^\nu$, а $(\nu + 1)$ -мерный случайный вектор (X, Y) , $X \in \mathbf{R}^\nu$, $Y \in \mathbf{R}^1$, имеет неизвестную функцию регрессии $r(t) = \mathbf{E}(Y | X = t)$. Пусть далее $X_1, \dots, X_n$ и $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ — простые выборки объема n из генеральных совокупностей X и (X, Y) соответственно.

В качестве приближений для неизвестных плотности распределения $f(t)$ и функции регрессии $r(t)$ примем статистики

$$f_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_n(t, X_i), \quad (1.1)$$

* Институт математики и информационных технологий АН РУз, отдел теории вероятностей и математической статистики, ул. Ф. Ходжаева, 29, 100125, Ташкент, Узбекистан; e-mail: m.muhammad@rambler.ru