Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Шкляев, Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого уклонения максимума, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 3, 590–598

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:04:00

12. *Hall P.* On convergence rates of suprema. — *Probab. Theory Related Fields*, 1991, v. 89, № 4, p. 447–445.
13. *Конаков В. Д., Питербарг В. И.* Скорость сходимости распределений максимальных уклонений гауссовских процессов и эмпирических плотностей. I. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1982, т. 27, в. 4, с. 707–724.
14. *Конаков В. Д., Питербарг В. И.* Скорость сходимости распределений максимальных уклонений гауссовских процессов и эмпирических плотностей. II. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1983, т. 28, в. 1, с. 164–169.
15. *Konakov V. D., Piterbarg V. I.* On the convergence rate of maximal deviation distribution for kernel regression estimates. — *J. Multivariate Anal.*, 1984, v. 15, № 3, p. 279–294.
16. *Конаков В. Д.* Уточнение предельных теорем для максимума уклонения непараметрической оценки регрессии. — 3-я Международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов, т. 1, 1981, с. 241–242.
17. *Конаков В. Д.* О максимальных уклонениях эмпирической плотности и регрессии. Некоторые общие методы исследования. — *Seminarber. (Humboldt Univ., Berlin)*, 1983, v. 51, p. 106–125.
18. *Konakov V. D.* On convergence rate of suprema in the presence of nonnegligible trends. Preprint № 103. Berlin: Institut für Andewandte Analysis und Stochastik, 1994.
19. *Rosenblatt M.* Remarks on a multivariate transformation. — *Ann. Math. Statist.*, 1952, v. 23, p. 470–472.
20. *Konakov V. D.* Approximations of deviations fields of some nonparametric statistical estimates by Gaussian fields, invariance principles. — *Lecture Notes in Math.*, 1983, v. 1021, p. 302–314.
21. *Михалева Т. Л., Питербарг В. И.* О распределении максимума гауссовского поля с постоянной дисперсией на гладком многообразии. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, т. 41, в. 2, с. 438–451.

Поступила в редакцию
6.V.2009

Исправленный вариант
22.II.2010

© 2010 г.

ШКЛЯЕВ А. В.*

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ ПРИ УСЛОВИИ БОЛЬШОГО УКЛОНЕНИЯ МАКСИМУМА

1. Введение. Рассмотрим случайное блуждание $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n = 1, 2, \dots$, $S_0 = 0$, с шагами $X_1, X_2, \dots$ — независимыми одинаково распределенными случайными величинами, подчиненными условиям:

(A) $R(h) := \mathbf{E} e^{hX} < \infty$ при $0 < h < h^+$, $h^+ > 0$ (условие Крамера);

(B) $\mathbf{E} X = 0$, $0 < \mathbf{D} X = \sigma^2 < \infty$, и X невырождена,

где X — общее обозначение для случайных величин X_i .

По теореме Петрова [1] соотношение

$$\mathbf{P}(S_n \geq \theta n - u) \sim \frac{D(\theta)}{\sqrt{n}} e^{h_\theta u} e^{-\Lambda(\theta)n} =: \pi_n(\theta, u), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: ashklyayev@gmail.com

выполняется равномерно по θ из любого отрезка, содержащегося в $(0, m^+)$, где m^+ , $D(\theta) > 0$, $h_\theta > 0$, $\Lambda(\theta) > 0$ — определены ниже, символ $\sim$ связывает выражения, отношение которых стремится к единице. В [2] было показано, что с точностью до множителя, зависящего от θ , для вероятностей $P(M_n \geq \theta n)$ больших уклонений максимума $M_n = \max_{k \leq n} S_k$ имеет место с точностью до множителя, зависящего от θ , асимптотика (1). В настоящей заметке получены предельные теоремы для случайных блужданий при условии большого уклонения $M_n \geq \theta n$. Обозначим через τ_n момент первого достижения блужданием $(S_k, 0 \leq k \leq n)$ максимума M_n . Из теоремы Петрова нетрудно заключить, что величина $n - \tau_n$ при условии большого уклонения $S_n \geq \theta n$ ограничена по вероятности, а потому в функциональных условиях предельных теоремах в каждом из случаев $S_n \geq \theta n$ и $M_n \geq \theta n$ предельный процесс есть броуновский мост. Тот же предельный процесс при условии $M_n \geq \theta n$ получается и для отрезка случайного блуждания до момента τ_n . При этом допредельный процесс асимптотически независим от отрезка блуждания $S_{\tau_n+k} - S_{\tau_n}$, $0 \leq k \leq n - \tau_n$, после момента достижения максимума. Для последнего процесса в работе также найдено условное предельное распределение. Кроме того, получены условные предельные теоремы для отрезков блуждания S_j , $0 \leq j \leq m$, и S_{τ_n-j} , $0 \leq j \leq m$, при любом фиксированном m .

2. Основные результаты. Введем ряд величин, используемых в теории больших уклонений (см. [1]–[3]): $m(h) = R'(h)/R(h)$, $\sigma^2(h) = m'(h)$, $m^+ = \lim_{h \rightarrow h^+ - 0} m(h)$, h_θ — решение уравнения $m(h_\theta) = \theta$ (в силу монотонности $m(h)$ это решение единственно). В [2] показано, что

$$P_n(\theta, u) := \mathbf{P}(M_n \geq \theta n - u) \sim \frac{C(\theta)}{\sqrt{n}} e^{h_\theta u} e^{-\Lambda(\theta)n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

В нижеследующей теореме 1 соотношение (2) выводится заново, при этом установлена его равномерность по θ . Приводимое нами доказательство отличается от оригинального и дает иное по форме выражение для константы $C(\theta)$. Прямые вероятностные рассуждения, лежащие в основе нашего доказательства теоремы 1, используются в последующих условных предельных теоремах. Далее рассматривается случай нерешетчатого распределения вероятностей X . В решетчатом случае изменения несущественны. Условия (A), (B) будут считаться ниже выполненными.

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$ соотношение (см. (1))

$$P_n(\theta, u) \sim \pi_n(\theta, u) \mathbf{P}(S_j^\theta > 0, 1 \leq j \leq \infty) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_j < 0, 1 \leq j \leq k) R(h_\theta)^{-k},$$

выполняется равномерно по $|u| \leq \gamma_n = o(\sqrt{n})$ и по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$.

Для любого $\theta \in (0, m^+)$ введем сопряженную к $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ функцию распределения $F^\theta(x) = R(\theta)^{-1} \int_{-\infty}^x e^{h_\theta y} dF(y)$. Обозначим X^θ случайную величину с функцией распределения F^θ , а $X_1^\theta, X_2^\theta, \dots$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F^θ , $S_n^\theta = \sum_{i=1}^n X_i^\theta$.

Теорема 2. Для любых ограниченных замкнутых множеств Δ_1, Δ_2 соотношение

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(M_n \geq \theta n + c\sqrt{n} + u, \tau_n = n - l) \sim \pi_n(\theta, u) \mathbf{P}(S_i^\theta > 0, 1 \leq i < \infty) \\ & \times \mathbf{P}(S_i < 0, 1 \leq i \leq l) R(h_\theta)^{-l} e^{-c^2/\sigma^2(\theta)} e^{-h_\theta c\sqrt{n}} \end{aligned}$$

выполняется равномерно по $u \in \Delta_1$, $c \in \Delta_2$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Для любых натуральных k и ограниченных борелевских множеств $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ таких, что $P(X \in \partial\Delta_i) = 0$, $1 \leq i \leq k$, равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$ выполнено соотношение

$$\mathbf{P}(X_1 \in \Delta_1, \dots, X_k \in \Delta_k \mid M_n \geq \theta n) \longrightarrow \mathbf{P}(X_1^\theta \in \Delta_1) \cdots \mathbf{P}(X_k^\theta \in \Delta_k)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 4. Для любых натуральных k и ограниченных борелевских множеств $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ таких, что $\mathbf{P}(X \in \partial\Delta_i) = 0$, $1 \leq i \leq k$, равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$ выполнено соотношение:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_n \in \Delta_1, \dots, X_{n-k+1} \in \Delta_k \mid M_n \geq \theta n) \\ & \rightarrow \frac{\sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_j \in \Delta_j, S_j \leq 0, 1 \leq j \leq l) \mathbf{P}(X_j^\theta \in \Delta_{l+j}, S_j^\theta > 0, 1 \leq j \leq \infty) R(h_\theta)^{-l}}{\mathbf{P}(S_j^\theta > 0, 1 \leq j \leq \infty) \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_j < 0, 1 \leq j \leq l) R(h_\theta)^{-l}}, \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Введем вероятностное распределение

$$G(U) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_1 < 0, \dots, S_k < 0, S_k \in U) R(h_\theta)^{-k}}{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_1 < 0, \dots, S_k < 0) R(h_\theta)^{-k}}.$$

Теорема 5. Для любого интервала U с концами, не являющимися атомами распределения G , соотношение $\mathbf{P}((M_n - S_n) \in U \mid M_n \geq \theta n - y) \rightarrow G(U)$, $n \rightarrow \infty$, выполняется равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$.

Пусть k, l — натуральные параметры, $\Delta_1, \dots, \Delta_k, \Delta'_1, \dots, \Delta'_l$ — ограниченные борелевские множества в $\mathbf{R}^+$, $u > 0$. Введем события

$$\begin{aligned} B_0 &= \{\tau_n = n - l\}, \\ B_1 &= \{M_n - S_{\tau_n-1} \in \Delta_1, \dots, M_n - S_{\tau_n-k} \in \Delta_k\}, \\ B_2 &= \{M_n - S_{\tau_n-1} \in \Delta'_1, \dots, M_n - S_{\tau_n+l} \in \Delta'_l\}, \\ B &= \{M_n \geq \theta n + u\}. \end{aligned}$$

Теорема 6. При $n \rightarrow \infty$ соотношение

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(B_0 B_1 B_2 B \mid M_n \geq \theta n) \\ & \rightarrow e^{-h_\theta u} \frac{\mathbf{P}(S_j^\theta \in \Delta_j, 1 \leq j \leq k, S_i^\theta > 0, k < i \leq \infty)}{\mathbf{P}(S_i^\theta > 0, 1 \leq i \leq \infty)} \\ & \quad \times \frac{\mathbf{P}(-S_j \in \Delta'_j, 1 \leq j \leq l) R(h_\theta)^{-l}}{\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_j < 0, 1 \leq j \leq i) R(h_\theta)^{-i}} \end{aligned}$$

выполняется равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$ при $n \rightarrow \infty$.

Введем обозначение $[x]$ для целой части числа x и положим

$$\begin{aligned} X^{(n)}(t) &= \frac{S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1} - \theta nt}{\sigma(\theta)\sqrt{n}}, \\ Y^{(n)}(t) &= X^{(n)}\left(\frac{t(n - \tau_n)}{n}\right), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Обозначим $Q^{(n)}, \hat{Q}^{(n)}$ распределения вероятностей случайных элементов $Y^{(n)}(t), X^{(n)}(t)$ в пространстве $C[0, 1]$ непрерывных функций с равномерной метрикой при условии $M_n \geq \theta n$, а Q_{W^0} распределение вероятностей броуновского моста. Слабую сходимость в пространстве $C[0, 1]$ будем отмечать символом $\Rightarrow$.

Теорема 7. $Q^{(n)} \Rightarrow Q_{W^0}$, $n \rightarrow \infty$.

Теорема 8. $\hat{Q}^{(n)} \Rightarrow Q_{W^0}$, $n \rightarrow \infty$.

3. Доказательство теоремы 1. Оценим вероятность $P_n(\theta, u)$ путем исключения из события $\{M_n \geq \theta n - u\}$ ряда зависящих от определяемых ниже параметров событий. При надлежащем выборе параметров вероятности исключаемых событий оказываются малыми по сравнению с остающимися после исключений событием. Вероятности исключаемых событий будут обозначаться буквой A с индексами; для упрощения записи зависимость от n, θ, u не указывается. Положим

$A_0^{n_1} := \mathbf{P}(M_n \geq \theta n - u, \tau_n < n - n_1)$, где $n_1 \leq n$ — натуральный параметр. Имеем:

$$\begin{aligned} P_n(\theta, u) - A_0^{n_1} \\ = \sum_{k=n-n_1}^n \int_{\theta n - u}^{\infty} \mathbf{P}(S_1 < y, \dots, S_{k-1} < y, S_k \in dy, S_{k+1} \leq y, \dots, S_n \leq y). \end{aligned} \quad (3)$$

Вводя натуральный параметр l , представим слагаемые суммы (3) в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_1 < y, \dots, S_{k-1} < y, S_k \in dy) \mathbf{P}(S_{k+1} - S_k \leq 0, \dots, S_n - S_k \leq 0) \\ = p_{n-k}^- \int_{\theta n - u}^{\infty} \int_{-\infty}^y \mathbf{P}(S_1 < y, \dots, S_{k-1} < y, S_k \in dy, S_{k-l} \in dx), \end{aligned}$$

где $p_j^- := P(S_1 < 0, \dots, S_j < 0)$. Вводя параметр $y_1 > 0$, положим

$$A_1^{n_1, l, y_1} := \sum_{k=n-n_1}^n p_{n-k}^- \int_{\theta n - u}^{\infty} \int_{-\infty}^{y-y_1} \mathbf{P}(S_1 < y, \dots, S_{k-1} < y, S_k \in dy, S_{k-l} \in dx) \quad (4)$$

и рассмотрим

$$\begin{aligned} P_n(\theta, u) - A_0^{n_1} - A_1^{n, l, y_1} \\ = \sum_{k=n-n_1}^n p_{n-k}^- \int_{\theta n - u}^{\infty} \int_{y-y_1}^y \mathbf{P}(S_i < y, 1 \leq i < k, S_k \in dy, S_{k-l} \in dx). \end{aligned}$$

Учитывая соотношение

$$\begin{aligned} \{S_1 < y, \dots, S_{k-1} < y\} \\ = \{S_{k-l} < y, \dots, S_{k-1} < y\} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-l-1} \{S_i \geq y, S_{k-l} < y, \dots, S_{k-1} < y\}, \end{aligned}$$

положим

$$\begin{aligned} A_2^{n_1, l, y_1} = \sum_{k=n-n_1}^n p_{n-k}^- \int_{\theta n - u}^{\infty} \int_{y-y_1}^y \mathbf{P}(\exists i < k-l: S_i \geq y, S_j < y, k-l < j < k, \\ S_k \in dy, S_{k-l} \in dx). \end{aligned} \quad (5)$$

Введем меру $P_k^+(U) := \mathbf{P}(S_0 < S_k, S_1 < S_k, \dots, S_{k-1} < S_k, S_k \in U)$ и запишем:

$$\begin{aligned} P_n(\theta, u) - A_0^{n_1} - A_1^{n, l, y_1} + A_2^{n, l, y_1} \\ = \sum_{k=n-n_1}^n p_{n-k}^- \int_{\theta n - u}^{\infty} \int_{y-y_1}^y \mathbf{P}(S_{k-l} \in dx) P_l^+(dy - x) \\ = \sum_{k=0}^{n_1} p_k^- \int_0^{y_1} \mathbf{P}(S_{n-k-l} \geq \theta n - u - z) P_l^+(dz). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя соотношение (3) в (6), получим для левой части (6) выражение:

$$\sum_{k=0}^{n_1} p_k^- \int_0^{y_1} \frac{D(\theta)}{\sqrt{n-k-l}} e^{-\Lambda(\theta)(n-k-l)} e^{-h_\theta(\theta(k+l)-z-u)} P_l^+(dz) + R_n, \quad (7)$$

где $R_n = o(\pi_n(\theta, u))$, при $n \rightarrow \infty$, $\pi_n(\theta, u)$ определено в (1). Используя равенство $e^{\Lambda(\theta)(k+l)} e^{-h_\theta \theta(k+l)} = R(h_\theta)^{-(k+l)}$, перепишем (7) в виде

$$\pi_n(\theta, u) \sum_{k=0}^{n_1} p_k^- R(h_\theta)^{-k} R(h_\theta)^{-l} \int_0^{y_1} e^{h_\theta z} p_l^+(dz) + R_n.$$

Учитывая равенство $\int_0^{y_1} e^{h_\theta z} P_l^+(dz) = \mathbf{P}(S_1^\theta > 0, \dots, S_l^\theta > 0, S_l^\theta \leq y_1)$, представим событие $\{S_1^\theta > 0, \dots, S_l^\theta > 0, S_l^\theta \leq y_1\}$ в виде $\{S_1^\theta > 0, \dots, S_l^\theta > 0\} \setminus \{S_1^\theta > 0, \dots, S_l^\theta > 0, S_l^\theta > y_1\}$ и положим

$$A_3^{n_1, l, y_1} := \pi_n(\theta, u) \mathbf{P}(S_1^\theta > 0, \dots, S_l^\theta > 0, S_l^\theta > y_1) \sum_{k=0}^{n_1} p_k^- R(h_\theta)^{-k}. \quad (8)$$

Запишем $P_n(\theta, u) - A_0^{n_1} - A_1^{n_1, l, y_1} + A_2^{n_1, l, y_1} + A_3^{n_1, l, y_1} - R_n$ в виде

$$\pi_n(\theta, u) \mathbf{P}(S_1^\theta > 0, \dots, S_l^\theta > 0) \sum_{k=0}^{n_1} p_k^- R(h_\theta)^{-k}.$$

Учитывая равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_1^\theta > 0, \dots, S_l^\theta > 0) \\ &= \mathbf{P}(S_i^\theta > 0, i > 0) + \mathbf{P}(\exists i > l: S_i^\theta \leq 0, S_1^\theta > 0, \dots, S_l^\theta > 0), \end{aligned}$$

введем

$$A_4^{n_1, l, y_1} := \pi_n(\theta, u) \mathbf{P}(\exists i > l: S_i^\theta \leq 0, S_1^\theta > 0, \dots, S_l^\theta > 0) \sum_{k=0}^{n_1} p_k^- R(h_\theta)^{-k}. \quad (9)$$

Представим $P_n(\theta, u) - A_0^{n_1} - A_1^{n_1, l, y_1} + A_2^{n_1, l, y_1} + A_3^{n_1, l, y_1} - A_4^{n_1, l, y_1} - R_n$ в виде $\pi_n(\theta, u) \mathbf{P}(S_i^\theta > 0, i > 0) \sum_{k=0}^{n_1} p_k^- R(h_\theta)^{-k}$. Дополним сумму $\sum_{k=0}^{n_1} p_k^- R(h_\theta)^{-k}$ до ряда и положим

$$A_5^{n_1, l, y_1} := \pi_n(\theta, u) \mathbf{P}(S_i^\theta > 0, i > 0) \sum_{k=n_1+1}^{\infty} p_k^- R(h_\theta)^{-k}. \quad (10)$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} P_n(\theta, u) &= \pi_n(\theta, u) \sum_{k=0}^{\infty} p_k^- R(h_\theta)^{-k} \mathbf{P}(S_i^\theta > 0, i > 0) \\ &\quad + A_0^{n_1} + A_1^{n_1, l, y_1} - A_2^{n_1, l, y_1} - A_3^{n_1, l, y_1} \\ &\quad + A_4^{n_1, l, y_1} - A_5^{n_1, l, y_1} + R_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Покажем, что за счет выбора параметров n_1, y_1, l все слагаемые в правой части (11), начиная со второго, можно сделать малыми по сравнению с первым.

Лемма 1. Для некоторых положительных постоянных $C_0, C_1, C_2, C_3, C_2 < 1$ при всех n_1, l, y_1 верны следующие оценки:

- 1) $A_1^{n_1, l, y_1} \leq n_1 \pi_n(\theta, u) C_0 l (y_1 - \theta l)^{-2} (1 + r_n)$, где $r_n = o(1)$, $n \rightarrow \infty$;
- 2) $A_2^{n_1, l, y_1} \leq A_0^l$ (см. (3));
- 3) $A_3^{n_1, l, y_1} \leq \pi_n(\theta, u) C_1 l (y_1 - \theta l)^{-2}$;
- 4) $A_4^{n_1, l, y_1} \leq \pi_n(\theta, u) \varepsilon(l)$, где $\varepsilon(l) = o(1)$, $l \rightarrow \infty$;
- 5) $A_5^{n_1, l, y_1} \leq \pi_n(\theta, u) C_2 C_3^{-n_1}$.

Доказательство. Отметим, что все величины A_i в лемме 1 положительны.

1) Отбрасывая из события под знаком вероятности в (4) событие $\{S_1 < y, \dots, S_{k-1} < y\}$, имеем:

$$A_1^{n_1, l, y_1} \leq \sum_{k=n-n_1}^n p_{n-k}^- \int_{\theta n-u}^{\infty} \int_{-\infty}^{y-y_1} \mathbf{P}(S_k \in dy, S_{k-l} \in dx). \quad (12)$$

Используя соотношение $\mathbf{P}(S_k \in dy, S_{k-l} \in dx) = \mathbf{P}(S_k \in dy, S_l \in y - dx)$ и проводя интегрирование по x , приведём слагаемые в (12) к виду

$$\mathbf{P}(S_k \geq \theta n - u, S_l \geq y_1) = \mathbf{P}(S_k \geq \theta k + (\theta(n-k) - u), S_l \geq y_1). \quad (13)$$

Воспользовавшись следующим утверждением из [3]: $\mathbf{P}(S_n \geq \theta n + y_0, X_1 \leq y_1, \dots, X_k \leq y_k | S_n \geq \theta n) \rightarrow e^{-\theta y_0} \mathbf{P}(X_1^\theta \leq y_1) \cdots \mathbf{P}(X_k^\theta \leq y_k)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$, делаем вывод, что правая часть в (12) есть $(1 + o(1)) \mathbf{P}(S_l^\theta \geq y_1) \pi_n(\theta, u) e^{-h_\theta \theta(n-k)}$. Таким образом, сумма в (12) не превосходит $n_1 \pi_n(\theta, u) \mathbf{P}(S_l^\theta \geq y_1) (1 + o(1))$. Используя неравенство Чебышёва, вероятность $\mathbf{P}(S_l^\theta > y_1)$ оценим величиной $\sigma^2(\theta)l/(y_1 - \theta l)^2$. Остается воспользоваться ограниченностью непрерывной функции $\sigma^2(\theta)$ на $[\theta_1, \theta_2]$.

2) Заменяя нижний предел в сумме (5) на 0, а нижний предел во внутреннем интеграле на $-\infty$, получаем, что величина $A_2^{n_1, l, y_1}$ не превосходит

$$\int_{\theta n - u}^{\infty} \sum_{k \leq n} \mathbf{P}(\exists i < n - l: S_i \geq y, S_j < y, k - l \leq j < k, S_k \in dy) \leq \mathbf{P}(\tau_n < n - l, M_n \geq \theta n - u) = A_0^l.$$

3) Непрерывная по θ функция $R(h_\theta)$ достигает на отрезке $[\theta_1, \theta_2]$ минимума в некоторой точке $\tilde{\theta}$. Из неравенства Иенсена получаем $R(h_{\tilde{\theta}}) = \mathbf{E} e^{h_{\tilde{\theta}} X} \geq e^{h_{\tilde{\theta}} \mathbf{E} X} = 1$. Равенство может достигаться, только если функция $e^{h_{\tilde{\theta}} X}$ п.н. линейна. Это может произойти только при $h_{\tilde{\theta}} = 0$, т.е. при $\tilde{\theta} = m(h_{\tilde{\theta}}) = m(0) = 0$. Поскольку $0 < \theta_1 < \tilde{\theta}$, то неравенство Иенсена строгое и $C := R(h_{\tilde{\theta}}) > 1$, так что $R(\theta) \geq C$ при всех θ . Подставляя полученное неравенство в (8) и отбрасывая под знаком вероятности в (8) событие $\{S_1^\theta \geq 0, \dots, S_l^\theta \geq 0\}$, получаем $A_3^{n_1, l, y_1} \leq \pi_n(\theta, u) \sum_{k=0}^{n_1} C^{-k} \mathbf{P}(S_l^\theta > y_1)$. Оценивая, как и выше, вероятность $\mathbf{P}(S_l^\theta > y_1)$ с помощью неравенства Чебышёва и заменяя n_1 на бесконечность, получаем: $A_3^{n_1, l, y_1} \leq \pi_n(\theta, u) C(C-1)^{-1} \sigma^2(\theta) l (y_1 - \theta l)^{-2}$. Так как $\sigma^2(\theta) \leq C_0$, то для $C_1 = C C_0 (C-1)^{-1}$ верно неравенство $C \sigma^2(\theta) (C-1)^{-1} \leq C_1$, откуда и получается нужная оценка.

4) Подставляя неравенство $R(\theta) \geq C$ в (9) и отбрасывая под знаком вероятности событие $\{S_1^\theta \geq 0, \dots, S_l^\theta \geq 0\}$, получаем требуемое неравенство с $\varepsilon(l) = C(C-1)^{-1} \mathbf{P}(\exists i > l: S_i^\theta < 0)$, вероятность $\mathbf{P}(\exists i > l: S_i^\theta < 0)$ стремится к 0 при $l \rightarrow \infty$.

5) Подставляя неравенство $R(\theta) \geq C$ в (10) и оценивая вероятность в правой части (10) единицей, получаем: $A_5^{n_1, l, y_1} \leq \pi_n(\theta, u) C^{-n_1} C(C-1)^{-1}$. Полагая здесь $C_2 = C(C-1)^{-1}$, $C_3 = C^{-1}$, получаем требуемый результат.

Лемма 2. *Существуют постоянные $0 < \tilde{C}_1 < 1$, $\tilde{C}_2 > 0$, N_1 такие, что для всех $n > N_1$*

$$A_0^{n_1} \leq (\tilde{r}_n + \tilde{C}_2 \tilde{C}_1^{-n_1}) \pi_n(\theta, u),$$

где $\tilde{r}_n = o(1)$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Оценим $A_0^{n_1} = \mathbf{P}(M_n \geq \theta n - u, \tau_n \leq n - n_1)$ сверху вероятностью $\mathbf{P}(M_{n-n_1} \geq \theta n - u) = \mathbf{P}(M_{n-n_1} \geq \theta(n-n_1) + \theta n_1 - u)$, которую в свою очередь оценим при помощи (11). Для этого выберем числа n_1 и l такие, что $\varepsilon(l) \leq 1$, число $y_1 = y_1(n_1, l)$ такое, что $C_0 l (y_1 - \theta l)^{-2} \leq 1$, и число N такое, что для любого $n > N$ выполнены соотношения $R_n \leq 1$, $r_n \leq 1$. Применяя лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_n \geq \theta n - u) &\leq \pi_n(\theta, u) \sum_{k=0}^{\infty} p_k^- R(h_\theta)^{-k} \mathbf{P}(S_i^\theta > 0, i > 0) + A_0^{n_1} + A_1^{n_1, l, y_1} + A_4^{n_1, l, y_1} + R_n \\ &\leq \tilde{C} \pi_n(\theta, u) + A_0^{n_1}, \end{aligned}$$

где $\tilde{C} = \mathbf{P}(S_i^\theta > 0, i > 0) \sum_{k=0}^{\infty} p_k^- R(h_\theta)^{-k} + 4$. Отсюда при $n > N + kn_1$ имеем $\mathbf{P}(M_{n-kn_1} \geq \theta n - u) \leq \tilde{C} \pi_n(\theta, u) e^{-h_\theta \theta kn_1} + \mathbf{P}(M_{n-(k+1)n_1} \geq \theta n - u) = \tilde{C} \pi_n(\theta, u) e^{-h_\theta \theta kn_1} + A_0^{(k+1)n_1}$. Таким образом,

$$A_0^{n_1} \leq \mathbf{P}(M_n \geq \theta n - u, \tau_n \leq n - 2n_1) + \tilde{C} \pi_n(\theta, u - \theta n_1)$$

$$\begin{aligned}
&= A_0^{2n_1} + \tilde{C}\pi_n(\theta, u)e^{-h_\theta\theta n_1} \leq A_0^{3n_1} + \tilde{C}\pi_n(\theta, u)e^{-2h_\theta\theta n_1} \\
&\leq \dots \leq \tilde{C}\pi_n(\theta, u) \sum_{k=1}^{[(n-N)/n_1]} e^{-h_\theta\theta n_1 k} + A_{n_1([(n-N)/n_1] + 1)}.
\end{aligned}$$

Пользуясь тем, что непрерывная по θ функция h_θ на $[\theta_1, \theta_2]$ достигает своего минимума (большее 0), и выбирая $\tilde{C}_1$ такое, что $e^{-h_\theta\theta} \leq \tilde{C}_1 < 1$, оценим сумму в правой части полученного неравенства сверху величиной $\sum_{k=1}^{[(n-N)/n_1]} e^{-h_\theta\theta n_1 k} \leq \tilde{C}_1^{n_1} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{C}_1^{n_1 k} \leq \tilde{C}_1^{n_1} (1 - \tilde{C}_1)^{-1}$ и проведем оценку:

$$\begin{aligned}
A_{n_1([(n-N)/n_1] + 1)} &= \mathbf{P}\left(M_n \geq \theta n - u, \tau_n \leq n - n_1 \left(\left[\frac{n-N}{n_1}\right] + 1\right)\right) \\
&\leq \mathbf{P}(M_n \geq \theta n - u, \tau_n \leq N) \\
&\leq \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(S_k \geq \theta n - u) = o(1), \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Полагая $\tilde{C}_2 = (1 - \tilde{C}_1)^{-1}$ и учитывая полученные оценки, приходим к лемме 2.

С учетом лемм 1 и 2 модуль разности

$$P_n(\theta, u) - \pi_n(\theta, u) \sum_{k=0}^{\infty} p_k^- R(h_\theta)^{-k} P(S_i^\theta > 0, i > 0)$$

оценивается сверху величиной $\pi_n(\theta, u)(\mathbf{P}(S_l^\theta \geq y_1) + C_1 l(y_1 - \theta l)^{-2} + \varepsilon(l) + C_2 C_3^{-n_1} + \tilde{C}_1 \tilde{C}_3^{-n_1} + o(1))$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем число n_1 такое, что $\tilde{C}_1 \tilde{C}_3^{-n_1} \leq \varepsilon/6$, $C_2 C_3^{-n_1} \leq \varepsilon/6$, число l такое, что $\varepsilon(l) < \varepsilon/6$, число y_1 такое, что $C_1 l(y_1 - \theta l)^{-2} \leq \varepsilon/6$, $C_0 l(y_1 - \theta l)^{-2} \leq \varepsilon/6$, и число $N_2 > \max(n_1 + l, N_1)$, где N_1 введено в лемме 2 такое, что для любого $n > N_2$ величина $\tilde{r}_n$ в лемме 2 меньше $\varepsilon/6$. Имеем для всех $n \geq N_2$ неравенство

$$\left| \frac{P_n(\theta, u)}{\pi_n(\theta, u)} - \sum_{k=0}^{\infty} p_k^- R(h_\theta)^{-k} \mathbf{P}(S_i^\theta > 0, i > 0) \right| \leq \varepsilon.$$

Остается заметить, что $\mathbf{P}(S_i^\theta > 0, i > 0) > 0$.

Доказательство теоремы 7. Для доказательства нам потребуется следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(M_n \geq \theta n + c\sqrt{n} + u, \tau_n = n - l) \\
&\sim \pi_n(\theta, u) \mathbf{P}(S_i^\theta > 0, 1 \leq i < \infty) p_-(l) R(h_\theta)^{-l} e^{-c^2/\sigma^2(\theta)} e^{-h_\theta c\sqrt{n}}, \quad (14)
\end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, причем эквивалентность равномерна по $y \in \Delta_1$, $c \in \Delta_2$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$, где Δ_1, Δ_2 — ограниченные замкнутые множества, l — натуральное. Это утверждение обобщает теорему 2, а его доказательство, которое мы опускаем, опирается на теорему 5. Докажем сходимости конечномерных распределений процесса $Y^{(n)}(t)$ и плотность семейства мер $Q^{(n)}$, откуда и будет следовать теорема 7.

Фиксируем параметры $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < 1$ и ограниченные замкнутые подмножества прямой Δ_i , $1 \leq i \leq k$, предполагая для простоты, что nt_i целые. Требуется показать, что конечномерные распределения $\mathbf{P}(Y_{t_i}^{(n)} \in \Delta_i, 1 \leq i \leq k | M_n \geq \theta n)$ сходятся к $\mathbf{P}(W_{t_i}^0 \in \Delta_i, 1 \leq i \leq k)$ при $n \rightarrow \infty$. Введем обозначение $a + b\Delta := \{x: \exists y \in \Delta: x = a + by\}$, где a и b — действительные числа, а Δ — подмножество прямой. Разложим вероятность $\mathbf{P}(Y_{t_i}^{(n)} \in \Delta_i, 1 \leq i \leq k | M_n \geq \theta n)$ в сумму по значениям τ_n :

$$\sum_{l=0}^n \mathbf{P}\left(S_{t_i(n-l)} \in \theta t_i(n-l) + \sigma(\theta)\sqrt{n}\Delta_i, 1 \leq i \leq k, \tau_n = n-l | M_n \geq \theta n\right). \quad (15)$$

Положим $\Delta'_i = \theta t_i(n-l) + \sigma(\theta)\sqrt{n}\Delta_i$. Из лемм 1 и 2 следует, что условные вероятности событий $\{\tau_n \leq t_k(n-\tau_n)\}$, $\{\tau_n \leq n/2\}$ и $\{\exists i \leq t_k(n-l): S_i \geq \theta n\}$ при условии $M_n \geq \theta n$ и стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. С учетом этого, преобразуем (15) к виду

$$\begin{aligned} o(1) + \mathbf{P}(M_n \geq \theta n)^{-1} \sum_{l=0}^{n/2} \int_{\Delta'_1} \dots \int_{\Delta'_k} \mathbf{P}(\tau_{n-(n-l)t_k} = (n-l)(1-t_k), \\ M_{n-(n-l)t_k} \geq \theta n - y_k) \\ \times \prod_{i=1}^k \mathbf{P}(S_{(t_i-t_{i-1})(n-l)} \in d(y_i - y_{i-1})), \end{aligned} \quad (16)$$

где y_0 полагается равным нулю. Производя в интегралах (16) замену переменных $x_i = (y_i - \theta t_i(n-l))n^{-1/2}\sigma^{-2}(\theta)$, $1 \leq i \leq k$, и полагая $x_0 = 0$, преобразуем $\mathbf{P}(\tau_{n-(n-l)t_k} = (n-l)(1-t_k), M_{n-(n-l)t_k} \geq \theta n - y_k)$ к виду $\mathbf{P}(\tau_{n-(n-l)t_k} = (n-l)(1-t_k), M_{n-(n-l)t_k} \geq \theta(n-t_k(n-l)) - \sqrt{n}\sigma(\theta)x_k)$. Применяя (14) к последнему выражению, представим его в виде

$$(1 + o(1))\pi_{n(1-t_k)+lt_k}(\theta, 0) \mathbf{P}(S_i^\theta > 0, 1 \leq i < \infty) p_l^- R(h_\theta)^{-l} e^{-x_k^2/(2(1-t_k))} e^{h_\theta x_k \sigma(\theta)\sqrt{n}}.$$

Используя соотношение $\pi_{n(1-t_k)+lt_k}(\theta, 0) = (1+o(1))e^{-\Lambda(\theta)n}e^{\Lambda(\theta)(n-l)t_k}(nt_k)^{-1/2} = (1+o(1))\pi_n(\theta, 0)e^{\Lambda(\theta)(n-l)t_k}t_k^{-1/2}$ и теорему 1, преобразуем выражение (16) к виду

$$\begin{aligned} o(1) + t_k^{-1/2} \left(\sum_{l=0}^{\infty} p_l^- R(h_\theta)^{-l} \right)^{-1} \sum_{l=0}^{n/2} p_l^- R(h_\theta)^{-l} \\ \times \int_{\Delta_1} \dots \int_{\Delta_k} e^{\Lambda(\theta)(n-l)t_k} e^{-x_k^2/(2(1-t_k))} e^{h_\theta x_k \sigma(\theta)\sqrt{n}} \\ \times \prod_{i=1}^k \mathbf{P}\left((S_{(t_i-t_{i-1})(n-l)} - \theta(t_i-t_{i-1})(n-l))\sigma^{-1}(\theta)n^{-1/2} \in dx_i - x_{i-1}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Представляя $e^{\Lambda(\theta)(n-l)t_k}e^{h_\theta x_k \sqrt{n}\sigma(\theta)}$ в виде произведения величин

$$e^{h_\theta \theta(t_i-t_{i-1})(n-l) + \sqrt{n}(x_i-x_{i-1})} R(h_\theta)^{-(n-l)(t_i-t_{i-1})}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

и пользуясь тем, что $\mathbf{P}(S_n \in dx)e^{h_\theta x R(h_\theta)^{-n}} = \mathbf{P}(S_n^\theta \in dx)$, перепишем (17) в виде:

$$\begin{aligned} o(1) + t_k^{-1/2} \left(\sum_{l=0}^{\infty} p_l^- R(h_\theta)^{-l} \right)^{-1} \sum_{l=0}^{n/2} p_l^- R(h_\theta)^{-l} \int_{\Delta_1} \dots \int_{\Delta_k} e^{-x_k^2/(2(1-t_k))} \\ \times \prod_{i=1}^k \mathbf{P}\left((S_{(t_i-t_{i-1})(n-l)}^\theta - \theta(t_i-t_{i-1})(n-l))\sigma^{-1}(\theta)n^{-1/2} \in dx_i - x_{i-1}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Пользуясь тем, что согласно центральной предельной теореме вероятности под знаком произведения в правой части (18) стремятся к $(2\pi(t_i-t_{i-1}))^{-1/2}e^{-(x_i-x_{i-1})^2/(2(t_i-t_{i-1}))}$ равномерно по $x_i \in \Delta_i$, преобразуем (18) к виду

$$o(1) + t_k^{-1/2} \int_{\Delta_1} \dots \int_{\Delta_k} e^{-x_k^2/(2(1-t_k))} \prod_{i=1}^k (2\pi(t_i-t_{i-1}))^{-1/2} e^{-(x_i-x_{i-1})^2/(2(t_i-t_{i-1}))}. \quad (19)$$

Учитывая, что выражение (19) с точностью до $o(1)$ есть $\mathbf{P}(W_{t_i}^0 \in \Delta_i, 1 \leq i \leq k)$, получаем требуемый результат.

Докажем, что семейство мер $Q^{(n)}$ плотно. Так как семейство мер $\tilde{Q}^{(n)}(A) := \mathbf{P}(X^{(n)} \in A | S_n \geq \theta n)$ плотно в пространстве $C[0,1]$ (см. [4]), рассмотрим семейство компактов $\tilde{K}_\varepsilon \subset C[0,1]$ таких, что $\tilde{Q}^{(n)}(\tilde{K}_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ для всех n . Фиксируя

$\varepsilon > 0$, согласно лемме 2 найдем n_1 такое, что при всех n выполнено неравенство $\mathbf{P}(\tau_n \leq n - n_1 | M_n \geq \theta n) \leq \varepsilon/2$. Рассматривая для каждого $l \leq n_1$ компакт $L_{l,\varepsilon} := \sqrt{(n_1 + 1)/(n_1 + 1 - l)} K_{C_l \varepsilon} \supseteq (\sqrt{n}/\sqrt{n-l}) K_{C_l \varepsilon}$, где $C_l := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_n \geq \theta n) \mathbf{P}(S_{n-l} \geq \theta n)^{-1}/2^{l+4}$, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_n = n - l, Y^{(n)} \notin L_{l,\varepsilon} | M_n \geq \theta n) &\leq \frac{\mathbf{P}(S_{n-l} \geq \theta n, X^{(n-l)} \notin K_{C_l \varepsilon/2^{l+4}})}{\mathbf{P}(M_n \geq \theta n)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(S_{n-l} \geq \theta(n-l))}{\mathbf{P}(M_n \geq \theta n)} C_l \varepsilon. \end{aligned}$$

Выберем такое N , что $\mathbf{P}(S_{n-l} \geq \theta(n-l))/\mathbf{P}(M_n \geq \theta n) \leq 2C_l$ при всех $n > N$. Имеем $\mathbf{P}(\tau_n = n - l, Y^{(n)} \notin L_{l,\varepsilon} | M_n \geq \theta n) \leq \varepsilon/2^{l+3}$. Вводя компакт $L_\varepsilon = \bigcup_{0 \leq l \leq n_1} L_{l,\varepsilon}$, при всех $n \geq N$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y^{(n)} \notin L_\varepsilon | M_n \geq \theta n) &\leq \mathbf{P}(\tau_n \leq n - n_1, | M_n \geq \theta n) \\ &+ \sum_{l=0}^{n_1} \mathbf{P}(\tau_n = n - l, Y^{(n)} \notin L_l | M_n \geq \theta n) \leq 3\varepsilon/4. \end{aligned}$$

Выбирая компакт $K_\varepsilon \supset L_\varepsilon$ так, чтобы при всех $n \leq N$ выполнялось неравенство $\mathbf{P}(Y^n \notin K_\varepsilon) \leq \varepsilon/4$, выводим, что семейство мер $Q^{(n)}$ плотно. Теорема 7 доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю М. В. Козлову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров В. В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 310–322.
2. Боровков А. А., Коршунов Д. А. Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 2. Дастационарные распределения в экспоненциальном случае. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 437–468.
3. Komlos J., Tusnady G. On sequence of «pure heads». — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 4, p. 608–617.
4. Боровков А. А. О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности. — Сиб. матем. журн., 1995, т. 36, № 3, с. 493–509.

Поступила в редакцию
11.11.2010

© 2010 г.

WITHERS C. S.*, NADARAJAH S.**

MAXIMUM OF CONTINUOUS VERSIONS OF POISSON AND NEGATIVE BINOMIAL TYPE DISTRIBUTIONS

Пусть M_n — максимум случайной выборки из $F(x)$ на R . Известно, что существует функция $g_n: R \rightarrow R$ такая, что $g_n(M_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, $n \rightarrow \infty$, где случайная величина Y невырождена тогда и только тогда, когда $\bar{F}(x)/\bar{F}(x-) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$, где $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Это условие выполнено для непрерывных F , но не выполнено, например, когда F —

* Applied Mathematics Group, Industrial Research Limited, Lower Hutt, New Zealand.

** School of Mathematics University of Manchester, Manchester M13 9PL, UK; e-mail: mbbssn2@manchester.ac.uk