Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Богачев, О многочленах от гауссовских случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 3, 611

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4262>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:56:49

Кроме того, встают вопросы оценки параметров модели и адекватности модели в реальных ситуациях. Мы иллюстрируем их на примере котировок с российского фондового рынка.

Богачев В. И. [совм. с Агафонцевым Б. В.]. (МГУ; e-mail: vibogach@mail.ru). **О многочленах от гауссовских случайных величин.** Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин и $\{f_n\}$ — последовательность измеримых многочленов степени не выше d от гауссовского вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$. Нас интересуют оценки случайных величин f_n на основе информации о случайных величинах $f_n + g_n$, где случайная величина g_n измерима относительно σ -алгебры σ_n , порожденной величинами ξ_i , $i > n$. Результаты сформулированы в терминах измеримых функций на счетном произведении прямых $X := \mathbf{R}^\infty$ с гауссовской мерой γ , являющейся счетной степенью стандартной гауссовской меры γ_1 на прямой. Иначе говоря, мера γ есть распределение последовательности независимых стандартных гауссовских случайных величин. Напомним, что γ -измеримыми многочленами степени $d \geq 0$ называются γ -измеримые функции из замыкания $\mathcal{P}_d$ в $L^2(\gamma)$ множества всех многочленов степени d от конечного числа переменных. При этом функция от $x_1, \dots, x_n$ естественным образом рассматривается как функция на $\mathbf{R}^\infty$, причем многочлены степени $m < d$ считаются многочленами степени d . Например, степенью $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ считается $k_1 + \cdots + k_n$, а также всякое большее натуральное число. Пространство $\mathcal{P}_0$ состоит из констант. Известно, что $\mathcal{P}_d$ совпадает с замыканием множества многочленов степени не выше d от конечного числа переменных в топологии сходимости по мере γ . Через σ_n обозначим σ -алгебру, порожденную координатными функциями x_j с $j > n$. Пусть $\mathbf{E}(\psi | \sigma_n)$ — условное математическое ожидание γ -интегрируемой функции ψ относительно σ_n , т.е.

$$\mathbf{E}(\psi | \sigma_n)(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) = \int \psi(y_1, \dots, y_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \gamma_1(dy_1) \cdots \gamma_1(dy_n).$$

Теорема 1. Пусть последовательность функций $f_n + g_n$, где $f_n \in \mathcal{P}_d$ и γ -измеримая функция g_n зависит только от переменных x_i с $i > n$, имеет равномерно непрерывные в нуле характеристические функционалы $\varphi_{f_n + g_n}(t)$. Тогда последовательность функций $\psi_n := f_n - \mathbf{E}(f_n | \sigma_n)$ ограничена в каждом $L^p(\gamma)$.

Следствие 1. Заключение теоремы верно, если последовательность функций $f_n + g_n$ сходится по распределению.

Следствие 2. Пусть последовательность функций $\eta_n = f_n + g_n$, где $f_n \in \mathcal{P}_d$ и γ -измеримая функция g_n зависит только от переменных x_i с $i > n$, почти всюду имеет конечный предел η . Тогда $\eta \in \mathcal{P}_d$.

Напомним, что функция p на $\mathbf{R}^n$ является многочленом степени d в точности тогда, когда для всяких фиксированных векторов $a, b \in \mathbf{R}^n$ функция $t \mapsto p(a + tb)$ является многочленом степени d на прямой.

Следствие 3. Пусть γ -измеримая функция f обладает следующим свойством: для некоторого $d \geq 0$ для каждого $n \in \mathbf{N}$ при γ -почти всех x функция

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto f(x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots, x_n + t_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$$

является многочленом степени d . Тогда $f \in \mathcal{P}_d$. Более того, вместо этого достаточно, чтобы для каждого конечного набора целых чисел $b_1, \dots, b_n$ при γ -почти всех x функция

$$t \mapsto f(x_1 + tb_1, x_2 + tb_2, \dots, x_n + tb_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$$

была многочленом степени d .