Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Житлухин, Максимальное неравенство для косо́го броуновского движения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 3, 613–614

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:14:28

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения. — Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, в. 1, с. 26–51.
2. *Ширяев А. Н.* Минимаксная оптимальность метода кумулятивных сумм (CUSUM) в случае непрерывного времени. — Успехи матем. наук, 1996, т. 51, № 4, с. 173–174.
3. *Beibel M.* A note on Ritov's Bayes approach to the minimax property of the cusum procedure. — Ann. Statist., 1996, v. 24, p. 1804–1812.
4. *Lorden G.* Procedures for reacting to a change in distribution. — Ann. Math. Statist., 1971, v. 42, p. 1897–1908.
5. *Moustakides G. V.* Optimal stopping times for detecting changes in distributions. — Ann. Statist., 1986, v. 14, p. 1379–1387.
6. *Page E. S.* Continuous inspection schemes. — Biometrika, 1954, v. 41, p. 100–115.
7. *Poor H. V.* Quickest detection with exponential penalty for delay. — Ann. Statist., 1998, v. 26, p. 2179–2205.

Гущин А. А. (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН; *e-mail*: gushchin@mi.ras.ru). **Максимизация полезности на некоторых рынках, допускающих арбитраж.** Д. О. Крамков и В. Шахермайер в своей выдающейся работе [1] решают задачу максимизации полезности для конечного временного горизонта при условии отсутствия бесплатного ленча с исчезающим риском (NFLVR). Мы рассматриваем ту же задачу в случае, когда временной горизонт бесконечен. Оказывается, что теперь естественно включить в рассмотрение также некоторые модели, допускающие арбитраж. А именно, мы показываем, что результаты Крамкова и Шахермайера остаются верными, если предположить условие отсутствия арбитража (NA) на каждом конечном временном интервале и условие отсутствия неограниченной прибыли с ограниченным риском (NUPBR) на всем временном интервале $[0, \infty)$. Более точно, пусть S — семимартингал со значениями в $\mathbf{R}^d$. Положим

$$\mathcal{X}(1) = \left\{ X \geq 0: X = 1 + H \cdot S, X_\infty = \lim_{t \uparrow +\infty} X_t \text{ существует п.н.} \right\},$$

где H пробегает класс d -мерных предсказуемых S -интегрируемых процессов. Тогда наши условия таковы:

- NA для каждого конечного t : $\{X_t: X \in \mathcal{X}(1), X_t \geq 1 \text{ п.н., } \mathbf{P}(X_t > 1) > 0\} = \emptyset$ для каждого $t \in \mathbf{R}_+$;
- NUPBR: множество $\{X_\infty: X \in \mathcal{X}(1)\}$ ограничено по $\mathbf{P}$ -вероятности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kramkov D., Schachermayer W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. — Ann. Appl. Probab., 1999, v. 9, № 3, p. 904–950.

Житлухин М. В. (МГУ, *e-mail*: zhitlukhin@gmail.com). **Максимальное неравенство для косо́го броуновского движения.** Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение. В работах [1]–[3] было доказано, что для произвольного момента остановки τ

$$\mathbf{E} \max_{s \leq \tau} |B_s| \leq \sqrt{2\mathbf{E}\tau}, \quad \mathbf{E} \left[\max_{s \leq \tau} B_s - \min_{s \leq \tau} B_s \right] \leq \sqrt{3\mathbf{E}\tau}.$$

В настоящей работе доказывается обобщение этих неравенств на случай косо́го броуновского движения, а именно, на случай случайного процесса $X^\nu = (X_t^\nu)_{t \geq 0}$, удовлетворяющего уравнению

$$X_t^\nu = B_t + \nu L_t^0,$$

где L_t^0 — локальное время процесса X_t^ν в нуле. В [4] показано, что это уравнение имеет единственное сильное решение, называемое *косым броуновским движением*.

Основным результатом является следующее максимальное неравенство.

Теорема. Для любого $\nu \in (-1, 1)$ и любого момента остановки τ выполнено неравенство

$$\mathbf{E} \left[\max_{s \leq \tau} X_s^\nu - \min_{s \leq \tau} X_s^\nu \right] \leq \sqrt{K_\nu \mathbf{E} \tau} \quad (*)$$

с константой K_ν , допускающей представление $K_\nu = I_\nu + I_{-\nu}$, где

$$I_\nu = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{R_\nu^2(1+\nu)}{1-\nu} - 2R_\nu - (1+\nu) \int_{R_\nu}^0 \frac{(1+\nu)x + \nu - 1}{2\nu e^x - \nu - 1} dx \right],$$

а R_ν является единственным отрицательным решением уравнения

$$\frac{4\nu}{(1+\nu)^2} e^{R_\nu} - 1 = R_\nu.$$

Неравенство (*) является точным в том смысле, что для любого $T \geq 0$ существует момент остановки τ с $\mathbf{E} \tau = T$ такой, что

$$\mathbf{E} \left[\max_{s \leq \tau} X_s^\nu - \min_{s \leq \tau} X_s^\nu \right] = \sqrt{K_\nu \mathbf{E} \tau}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dubins L. E., Schwarz G. A sharp inequality for sub-martingales and stopping times. — *Astérisque*, 1988, № 157/158, p. 129–145.
2. Дубинс Л. Е., Шенн Л. А., Ширяев А. Н. Оптимальные правила остановки и максимальные неравенства для процессов Бесселя. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1993, т. 38, в. 2, с. 288–330.
3. Dubins L. E., Gilat D., Meilijson I. On the expected diameter of an L_2 -bounded martingale. arXiv: 0807.3571v1 [math.PR].
4. Harrison J. M., Shepp L. A. On skew Brownian motion. — *Ann. Probab.*, 1981, v. 9, № 2, p. 309–313.

Каменов А. А. (МГУ; e-mail: kamenov@cnt.ru). **Башелье-версия «Русского опциона» на конечном интервале.** Термин «Русский опцион» был впервые введен Л.-А. Шепом и А. Н. Ширяевым в работе [1]. В случае бесконечного временного горизонта оптимальное правило остановки формулируется просто: необходимо остановиться, как только разность (в случае модели Башелье) или отношение (в случае модели Блэка–Шоулса) максимума цены актива до настоящего момента и текущей цены достигнет определенного значения.

В том случае, если временной горизонт конечен (иными словами, если остановка наблюдений должна произойти не позже некоторого фиксированного момента времени T), задача несколько усложняется. Как показано (для случая модели Блэка–Шоулса) в [2] и [3], оптимально останавливаться тогда, когда указанное отношение достигает некоторой границы, непрерывно зависящей от времени. Данная работа посвящена исследованию вида этой кривой для модели Башелье.

Мы получаем явное интегральное уравнение, решение которого и дает нам искомую кривую. Хотя это уравнение и возможно решить численно, оно достаточно сложно и найти решение в явном виде не представляется возможным. Более того, из этого уравнения не удастся даже получить асимптотическое поведение искомой кривой в нуле и на бесконечности. Асимптотика кривой вблизи нуля может быть найдена аналогично случаю Американского опциона — рассуждения очень похожи на рассуждения в работе [3] и мы приводим их только для полноты изложения. Что же касается асимптотики на бесконечности, то, хотя мы используем ту же самую главную идею, что была использована в [4], сами рассуждения значительно отличаются от проведенных в этой работе.