Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Бурнаев, О нелинейной минимаксной задаче скорейшего обнаружения разладки для броуновского движения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 3, 612–613

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4265>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 02:13:39

Бурнаев Е. В. (Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН; e-mail: burnaev@iitp.ru). **О нелинейной минимаксной задаче скорейшего обнаружения разладки для броуновского движения.** Предполагается, что на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ наблюдается случайный процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ со стохастическим дифференциалом $dX_t = \mu I(t - \theta) dt + \sigma dB_t$, $X_0 = 0$, где $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение, $I(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $I(x) = 0$ при $x < 0$. Момент $\theta \in [0, \infty]$ интерпретируется как момент появления «разладки» (по терминологии [1]) в ходе наблюдений за процессом X : при $t < \theta$ наблюдаемый процесс есть $X_t = \sigma B_t$, а при $t \geq \theta$ процесс имеет вид $X_t = X_\theta + \mu(t - \theta) + \sigma(B_t - B_\theta)$.

Пусть $\tau = \tau(\omega)$ обозначает момент подачи сигнала о появлении «разладки», т.е. пусть τ есть марковский момент со значениями в $[0, \infty]$ относительно потока $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, где $\mathcal{F}_t = \sigma\{\omega: X_s, s \leq t\}$, $t \geq 0$.

Пусть $\mathbf{P}_t$ — распределение вероятностей процесса X в предположении, что момент разладки θ есть t . Распределение $\mathbf{P}_\infty$ отвечает случаю отсутствия разладки ($\theta = \infty$). Обозначим $\mathfrak{M}_T = \{\tau: \mathbf{E}_\infty \tau = T\}$ — класс моментов остановки τ , для которых среднее время $\mathbf{E}_\infty \tau$ до подачи (ложной) тревоги равно T .

В настоящей работе доказываем оптимальность модификации непрерывной версии метода кумулятивных сумм (CUSUM), введенного Пэйджем [6] в случае дискретного времени, для следующего нелинейного обобщения критерия, предложенного Лорденом [4].

Качество системы наблюдения, отождествляемой с выбором момента $\tau \in \mathfrak{M}_T$, будем оценивать с помощью функции риска $D(T, \alpha; \tau) = \sup_{\theta \geq 0} \text{ess sup}_\omega \mathbf{E}_\theta((e^{\alpha[\tau - \theta]^+} - 1)/\alpha | \mathcal{F}_\theta)$, где $\alpha \geq 0$ — заданная константа, $x^+ = \max(x, 0)$. Момент $\tau_T^* \in \mathfrak{M}_T$ естественно называть *оптимальным* (в минимаксном смысле), если $\mathbf{D}(T, \alpha) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} D(T, \alpha; \tau) = D(T, \alpha; \tau_T^*)$.

Теорема. При каждом $T > 0$ в классе $\mathfrak{M}_T$ существует оптимальный момент τ_T^* такой, что $\tau_T^* = \inf\{t \geq 0: \gamma_t \geq B_T^*\}$, где

$$\gamma = (\gamma_t)_{t \geq 0} \quad \text{с} \quad \gamma_t = \max_{\theta \leq t} \frac{d(\mathbf{P}_\theta | \mathcal{F}_t)}{d(\mathbf{P}_\infty | \mathcal{F})} \frac{e^{\alpha t}}{e^{\alpha \theta}}$$

есть модифицированный «CUSUM»-процесс; $\frac{d(\mathbf{P}_\theta | \mathcal{F}_t)}{d(\mathbf{P}_\infty | \mathcal{F})}$ — производная Радона-Никодима сужения $\mathbf{P}_\theta | \mathcal{F}_t$ меры $\mathbf{P}_\theta$ относительно сужения $\mathbf{P}_\infty | \mathcal{F}$ меры $\mathbf{P}_\infty$ на $\mathcal{F}$.

При этом $\gamma_t = \max_{\theta \leq t} L_t e^{\alpha t} (I_\theta e^{\theta t})^{-1}$, где $L_t = \exp\{(\mu/\sigma^2)X_t - (\mu^2/(2\sigma^2))t\}$; порог B_T^* определяется (в предположении $\mu^2/(2\sigma^2) = 1$, что не ограничивает общности) как корень уравнения $T = (\alpha - 1)^{-1} \ln B + (\alpha - 1)^{-2} (B^{1-\alpha} - 1)$; минимаксный риск вычисляется по формуле

$$D(T, \alpha; \tau_T^*) = \mathbf{E}_0 \tau_T^* = \frac{(\alpha - 1)(B_T^*)^\alpha}{\alpha(\alpha(B_T^*)^\alpha - 1)} - \frac{1}{\alpha}.$$

З а м е ч а н и е. В случае дискретного времени вопрос об асимптотической оптимальности метода CUSUM для линейного критерия (при $\alpha = 0$) рассматривался в [4], позже в [5] была доказана «точная» оптимальность метода CUSUM. Случай нелинейной функции риска был впервые рассмотрен в [7], где была доказана оптимальность метода на основе специальным образом модифицированного процесса CUSUM.

В случае непрерывного времени для модели с броуновским движением оптимальность метода CUSUM была доказана в [2] и [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 09-07-00180-а, 09-01-12173-офи_м, 08-01-00740-а, 08-01-91205-ЯФ_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения.— Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, в. 1, с. 26–51.
2. *Ширяев А. Н.* Минимаксная оптимальность метода кумулятивных сумм (CUSUM) в случае непрерывного времени.— Успехи матем. наук, 1996, т. 51, № 4, с. 173–174.
3. *Beibel M.* A note on Ritov's Bayes approach to the minimax property of the cusum procedure. — Ann. Statist., 1996, v. 24, p. 1804–1812.
4. *Lorden G.* Procedures for reacting to a change in distribution. — Ann. Math. Statist., 1971, v. 42, p. 1897–1908.
5. *Moustakides G. V.* Optimal stopping times for detecting changes in distributions. — Ann. Statist., 1986, v. 14, p. 1379–1387.
6. *Page E. S.* Continuous inspection schemes. — Biometrika, 1954, v. 41, p. 100–115.
7. *Poor H. V.* Quickest detection with exponential penalty for delay. — Ann. Statist., 1998, v. 26, p. 2179–2205.

Гущин А. А. (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН; *e-mail*: gushchin@mi.ras.ru). **Максимизация полезности на некоторых рынках, допускающих арбитраж.** Д. О. Крамков и В. Шахермайер в своей выдающейся работе [1] решают задачу максимизации полезности для конечного временного горизонта при условии отсутствия бесплатного ленча с исчезающим риском (NFLVR). Мы рассматриваем ту же задачу в случае, когда временной горизонт бесконечен. Оказывается, что теперь естественно включить в рассмотрение также некоторые модели, допускающие арбитраж. А именно, мы показываем, что результаты Крамкова и Шахермайера остаются верными, если предположить условие отсутствия арбитража (NA) на каждом конечном временном интервале и условие отсутствия неограниченной прибыли с ограниченным риском (NUPBR) на всем временном интервале $[0, \infty)$. Более точно, пусть S — семимартингал со значениями в $\mathbf{R}^d$. Положим

$$\mathcal{X}(1) = \left\{ X \geq 0: X = 1 + H \cdot S, X_\infty = \lim_{t \uparrow +\infty} X_t \text{ существует п.н.} \right\},$$

где H пробегает класс d -мерных предсказуемых S -интегрируемых процессов. Тогда наши условия таковы:

- NA для каждого конечного t : $\{X_t: X \in \mathcal{X}(1), X_t \geq 1 \text{ п.н., } \mathbf{P}(X_t > 1) > 0\} = \emptyset$ для каждого $t \in \mathbf{R}_+$;
- NUPBR: множество $\{X_\infty: X \in \mathcal{X}(1)\}$ ограничено по $\mathbf{P}$ -вероятности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kramkov D., Schachermayer W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. — Ann. Appl. Probab., 1999, v. 9, № 3, p. 904–950.

Житлухин М. В. (МГУ, *e-mail*: zhitlukhin@gmail.com). **Максимальное неравенство для косо́го броуновского движения.** Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение. В работах [1]–[3] было доказано, что для произвольного момента остановки τ

$$\mathbf{E} \max_{s \leq \tau} |B_s| \leq \sqrt{2\mathbf{E}\tau}, \quad \mathbf{E} \left[\max_{s \leq \tau} B_s - \min_{s \leq \tau} B_s \right] \leq \sqrt{3\mathbf{E}\tau}.$$

В настоящей работе доказывается обобщение этих неравенств на случай косо́го броуновского движения, а именно, на случай случайного процесса $X^\nu = (X_t^\nu)_{t \geq 0}$, удовлетворяющего уравнению

$$X_t^\nu = B_t + \nu L_t^0,$$