Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Муравлёв, О моментах остановки, связанных с падением и ростом броуновского движения со сносом, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 3, 615–616

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:25:39

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shepp L., Shiryaev A. N. The Russian option: reduced regret. — Ann. Appl. Probab., 1993, v. 3, p. 631–640.
2. Graversen S. E., Shiryaev A. N. An extension of P. Lévy's distributional properties to the case of Brownian motion with drift. — Bernoulli, 2000, v. 6, p. 615–620.
3. Ekström E. Russian options with a finite time horizon. — J. Appl. Probab., 2004, v. 41, p. 313–326.
4. Bian B. J., Dai X. L., Yuan G. Q. Asymptotic analysis and numerical computation of American option when expiry date runs to infinity. (Chinese). — Tongji Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban (J. Tongji Univ.), 2005, v. 33, p. 545–549.

Люлько Я. А. (МГУ; e-mail: yaroslav.lyulko@gmail.com). **Стохастические представления функционалов «максимального» типа от случайного блуждания.** На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ рассмотрим симметричное случайное блуждание $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, $S_0 = 0$, где $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = \mathbf{P}(\xi_i = -1) = 1/2$, $i \geq 1$, и величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы. Будем обозначать через $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_i, i \leq n)$, естественную фильтрацию. В работе исследованы вопросы отыскания стохастических представлений функционалов $F = F(\omega)$ от случайного блуждания следующих видов:

(а) *обычные (однократные) представления*

$$F = c_F + \sum_k u_{k-1} \Delta S_k,$$

где $u_{k-1} \sim \mathcal{F}_{k-1}$ — измеримая случайная величина, $k \geq 1$;

(б) *многократные представления*

$$F = c_F + \sum_{k \geq 1} \sum_{t_1 < \dots < t_k} c_k(t_1, \dots, t_k) \Delta S_{t_1} \dots \Delta S_{t_k},$$

где $c_k(t_1, \dots, t_k)$ — детерминированная функция.

Получены представления для следующих функционалов:

- 1) $F_N = \max_{0 \leq k \leq N} S_k$;
- 2) $F_{\tau-a} = \max_{0 \leq k \leq \tau-a} S_k$, где $\tau-a = \inf\{k \geq 0 : S_k = -a\}$, $a \in \mathbf{N}$;
- 3) $F_{g_N} = \max_{0 \leq k \leq g_N} S_k$, где $g_N = \sup\{0 < k \leq N : S_k = 0\}$.

В частности, для F_N было получено стохастическое представление

$$\max_{0 \leq n \leq N} S_n = \mathbf{E} \left(\max_{0 \leq n \leq N} S_n \right) + \sum_{k=1}^N G_{N-k+1} (F_{k-1} - S_{k-1}) \Delta S_k,$$

где

$$G_{N-k+1} (F_{k-1} - S_{k-1}) = \int_{F_{k-1} - S_{k-1}}^{N-k+1} (\mathbf{P}(F_{N-k+1} \geq a) - \mathbf{P}(F_{N-k+1-2\xi} \geq a)) da,$$

а ξ — случайная величина, не зависящая от $\mathcal{F}_N$, с распределением $\mathbf{P}(\xi = m) = (-1)^{m-1} C_{1/2}^m$, $m = 1, 2, \dots$.

Муравлёв А. А. (МГУ; e-mail: almurav@gmail.com). **О моментах остановки, связанных с падением и ростом броуновского движения со сносом.** Пусть $B^\mu = (B_t^\mu)_{t \geq 0}$ — броуновское движение с локальным сносом $\mu \in \mathbf{R}$,

т.е. $B_t^\mu = B_t + \mu t$, где $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение. Для фиксированного $\mu \in \mathbf{R}$ и $a > 0$, $b > 0$ введем моменты:

$$\tau_a = \inf \left\{ t \geq 0: \sup_{s \leq t} B_s^\mu - B_t^\mu = a \right\}, \quad \sigma_b = \inf \left\{ t \geq 0: B_t^\mu - \inf_{s \leq t} B_s^\mu = b \right\},$$

$$\gamma_{ab} = \tau_a \wedge \sigma_b.$$

Получены формулы для следующих величин (см. [1]):

$$\mathbf{E} \exp\{-\lambda \gamma_{ab} + \beta B_{\gamma_{ab}}^\mu\}, \quad \mathbf{E} \gamma_{ab}, \quad \mathbf{P}(\tau_a < \sigma_b), \quad \mathbf{P}(\tau_a > \sigma_b).$$

Кроме того, найдено преобразование Лапласа для случайного вектора $(\tau_a, B_{\tau_a}^\mu, \sigma_b, B_{\sigma_b}^\mu)$. Введем обозначения $f_c(x, y) = \operatorname{ch}(cx) + (y/c) \operatorname{sh}(cx)$,

$$\Delta = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2}, \quad \nu = \mu + \beta_1 + \beta_2,$$

$$\Delta_i = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda_i}, \quad \nu_i = \mu + \beta_i, \quad i = 1, 2.$$

Теорема. Пусть B_t^μ — броуновское движение со сносом μ , моменты τ_a и σ_b соответствуют B_t^μ . Тогда при $b \geq a > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp\{-\lambda_1 \tau_a + \beta_1 B_{\tau_a}^\mu - \lambda_2 \sigma_b + \beta_2 B_{\sigma_b}^\mu\} = & \left[e^{\nu(b-a)} e^{-\Delta(b-a) \operatorname{cth}(\Delta a)} \frac{e^{-\nu_1 a}}{f_{\Delta_1}(a, -\nu_1)} \right. \\ & + \frac{e^{\nu_2 b} e^{-\nu a}}{f_{\Delta_2}(b, \nu_2)} \left(\frac{(1 + \nu_2/\Delta_2)(1 - e^{(\beta_1 + \Delta_2)(b-a)} e^{-\Delta(b-a) \operatorname{cth}(\Delta a)})}{2f_{\Delta}(a, -\beta_1 - \Delta_2)} \right. \\ & \left. \left. + \frac{(1 - \nu_2/\Delta_2)(1 - e^{(\beta_1 - \Delta_2)(b-a)} e^{-\Delta(b-a) \operatorname{cth}(\Delta a)})}{2f_{\Delta}(a, -\beta_1 + \Delta_2)} \right) \right] \\ & \times \frac{e^{\nu a} f_{\Delta}(a, -\nu) - 1}{\operatorname{sh}^2(\Delta a)(1 - (\nu/\Delta)^2)} + \frac{e^{-\nu a} f_{\Delta}(a, \nu) - 1}{\operatorname{sh}^2(\Delta a)(1 - (\nu/\Delta)^2)} \frac{e^{\nu_2 b}}{f_{\Delta_2}(b, \nu_2)}, \end{aligned}$$

если $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\nu_1 < \Delta_1 \operatorname{cth}(\Delta_1 a)$, $\nu_2 > -\Delta_2 \operatorname{cth}(\Delta_2 b)$, $\beta_1 + \Delta_2 < \Delta \operatorname{cth}(\Delta a)$, $|\nu| < \Delta \operatorname{cth}(\Delta a)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муравлёв А. А. О моментах остановки, связанных с падением и ростом броуновского движения со сносом. — Успехи матем. наук, 2008, т. 63, № 6, с. 171–172.

Наумов А. А. (МГУ). **Усиленный закон больших чисел для мартингалов и случайных процессов с независимыми приращениями.** Целью настоящего исследования является доказательство аналогов усиленных законов больших чисел Колмогорова и Брунка–Прохорова для мартингалов с непрерывным параметром. Естественно предположить, что известные усиленные законы больших чисел для сумм независимых случайных величин могут быть обобщены на случай однородных случайных процессов с независимыми приращениями. Автором доказан аналог усиленного закона больших чисел Марцинкевича–Зигмунда. Точные формулировки классических утверждений можно найти в [1].

Теорема 1. Пусть даны измеримый сепарабельный мартингал $\{M_t, t \in \mathbf{R}_+\}$ относительно некоторой фильтрации $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbf{R}_+\}$ и неограниченно возрастающая положительная функция $f(t)$, $t \geq 0$. Если $\int_1^\infty f^{-\alpha}(t) d\mathbf{E}|M_t|^\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha \geq 1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq t} M_s/f(t) = 0$ п.в.

Теорема 1, в частности, справедлива для разности $M_t = X_t - \mathbf{E} X_t$, где $\{X_t, t \in \mathbf{R}_+\}$ — измеримый сепарабельный процесс с независимыми приращениями.