Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Наумов, Усиленный закон больших чисел для мартингалов и случайных процессов с независимыми приращениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 3, 616–617

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4269>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:41:58

т.е. $B_t^\mu = B_t + \mu t$, где $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение. Для фиксированного $\mu \in \mathbf{R}$ и $a > 0$, $b > 0$ введем моменты:

$$\tau_a = \inf \left\{ t \geq 0: \sup_{s \leq t} B_s^\mu - B_t^\mu = a \right\}, \quad \sigma_b = \inf \left\{ t \geq 0: B_t^\mu - \inf_{s \leq t} B_s^\mu = b \right\},$$

$$\gamma_{ab} = \tau_a \wedge \sigma_b.$$

Получены формулы для следующих величин (см. [1]):

$$\mathbf{E} \exp\{-\lambda \gamma_{ab} + \beta B_{\gamma_{ab}}^\mu\}, \quad \mathbf{E} \gamma_{ab}, \quad \mathbf{P}(\tau_a < \sigma_b), \quad \mathbf{P}(\tau_a > \sigma_b).$$

Кроме того, найдено преобразование Лапласа для случайного вектора $(\tau_a, B_{\tau_a}^\mu, \sigma_b, B_{\sigma_b}^\mu)$. Введем обозначения $f_c(x, y) = \operatorname{ch}(cx) + (y/c) \operatorname{sh}(cx)$,

$$\Delta = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2}, \quad \nu = \mu + \beta_1 + \beta_2,$$

$$\Delta_i = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda_i}, \quad \nu_i = \mu + \beta_i, \quad i = 1, 2.$$

Теорема. Пусть B_t^μ — броуновское движение со сносом μ , моменты τ_a и σ_b соответствуют B_t^μ . Тогда при $b \geq a > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp\{-\lambda_1 \tau_a + \beta_1 B_{\tau_a}^\mu - \lambda_2 \sigma_b + \beta_2 B_{\sigma_b}^\mu\} = & \left[e^{\nu(b-a)} e^{-\Delta(b-a) \operatorname{cth}(\Delta a)} \frac{e^{-\nu_1 a}}{f_{\Delta_1}(a, -\nu_1)} \right. \\ & + \frac{e^{\nu_2 b} e^{-\nu a}}{f_{\Delta_2}(b, \nu_2)} \left(\frac{(1 + \nu_2/\Delta_2)(1 - e^{(\beta_1 + \Delta_2)(b-a)} e^{-\Delta(b-a) \operatorname{cth}(\Delta a)})}{2f_{\Delta}(a, -\beta_1 - \Delta_2)} \right. \\ & \left. \left. + \frac{(1 - \nu_2/\Delta_2)(1 - e^{(\beta_1 - \Delta_2)(b-a)} e^{-\Delta(b-a) \operatorname{cth}(\Delta a)})}{2f_{\Delta}(a, -\beta_1 + \Delta_2)} \right) \right] \\ & \times \frac{e^{\nu a} f_{\Delta}(a, -\nu) - 1}{\operatorname{sh}^2(\Delta a)(1 - (\nu/\Delta)^2)} + \frac{e^{-\nu a} f_{\Delta}(a, \nu) - 1}{\operatorname{sh}^2(\Delta a)(1 - (\nu/\Delta)^2)} \frac{e^{\nu_2 b}}{f_{\Delta_2}(b, \nu_2)}, \end{aligned}$$

если $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\nu_1 < \Delta_1 \operatorname{cth}(\Delta_1 a)$, $\nu_2 > -\Delta_2 \operatorname{cth}(\Delta_2 b)$, $\beta_1 + \Delta_2 < \Delta \operatorname{cth}(\Delta a)$, $|\nu| < \Delta \operatorname{cth}(\Delta a)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муравлёв А. А. О моментах остановки, связанных с падением и ростом броуновского движения со сносом. — Успехи матем. наук, 2008, т. 63, № 6, с. 171–172.

Наумов А. А. (МГУ). **Усиленный закон больших чисел для мартингалов и случайных процессов с независимыми приращениями.** Целью настоящего исследования является доказательство аналогов усиленных законов больших чисел Колмогорова и Брунка–Прохорова для мартингалов с непрерывным параметром. Естественно предположить, что известные усиленные законы больших чисел для сумм независимых случайных величин могут быть обобщены на случай однородных случайных процессов с независимыми приращениями. Автором доказан аналог усиленного закона больших чисел Марцинкевича–Зигмунда. Точные формулировки классических утверждений можно найти в [1].

Теорема 1. Пусть даны измеримый сепарабельный мартингал $\{M_t, t \in \mathbf{R}_+\}$ относительно некоторой фильтрации $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbf{R}_+\}$ и неограниченно возрастающая положительная функция $f(t)$, $t \geq 0$. Если $\int_1^\infty f^{-\alpha}(t) d\mathbf{E}|M_t|^\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha \geq 1$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq t} M_s/f(t) = 0$ п.в.

Теорема 1, в частности, справедлива для разности $M_t = X_t - \mathbf{E} X_t$, где $\{X_t, t \in \mathbf{R}_+\}$ — измеримый сепарабельный процесс с независимыми приращениями.

Теорема 2. (i) Пусть дан сепарабельный однородный процесс с независимыми приращениями $\{X_t, t \in \mathbf{R}_+\}$. Предполагается, что $\mathbf{E} X_1 = 0$, если $\mathbf{E} |X_1|^\alpha < \infty$ для $\alpha \geq 1$. Тогда если $\mathbf{E} |X_1|^\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha \in (0, 2)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sup_{0 \leq s \leq t} X_s}{t^{1/\alpha}} = 0 \quad \text{н.в.}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\frac{\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|}{t^{1/\alpha}} \right)^\alpha = 0.$$

(ii) Если $\lim_{t \rightarrow \infty} (X_t - ct)/t^{1/\alpha} = 0$ н.в. для некоторых постоянных $\alpha \in (0, 2)$ и $c \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, то $\mathbf{E} |X_1|^\alpha < \infty$ и $c = \mathbf{E} X_1$ для $\alpha \geq 1$.

Автором получено также новое обобщение теоремы Брунка–Прохорова для мартингалов с дискретным временем (см. [2] и [3]).

Автор выражает признательность профессору В. М. Круглову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Show Y. S., Teicher H.* Probability Theory. New York: Springer-Verlag, 1988, 467 p.
2. *Fazekas I., Klesov O.* A general approach to the strong laws of large numbers. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 568–583.
3. *Круглов В. М.* Обобщение усиленного закона больших чисел Брунка–Прохорова. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 2, с. 347–349.

Ульянов В. В. [совм. с Асылбековым Ж. А., Zubovым В. Н.]. **Асимптотические свойства почти квадратичных форм.** Пусть $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)'$ — случайный вектор, имеющий мультиномиальное распределение $M_3(n, \boldsymbol{\pi})$. Для проверки гипотезы $H_0: \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p}$, где $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)'$, часто используется один из представителей семейства статистик, имеющего вид

$$T_\lambda(\mathbf{Y}) = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{j=1}^3 Y_j \left[\left(\frac{Y_j}{np_j} \right)^\lambda - 1 \right], \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

При $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$ статистику T_λ следует понимать как результат предельного перехода. Полагая $\lambda = 1$, $\lambda = 1/2$ и $\lambda = 0$, получаем статистику хи-квадрат, статистику Фримана–Тьюки и статистику логарифма отношения правдоподобия соответственно.

Теорема. При любом $\lambda \in \mathbf{R}$ и $c > 0$ справедлива асимптотика

$$\Pr(T_\lambda(\mathbf{Y}) < c) = G_2(c) + O\left(n^{-100/146} (\ln n)^{315/146}\right),$$

где $G_2(c)$ — функция распределения случайной величины хи-квадрат с двумя степенями свободы.

В доказательстве (см. [1]) используется теорема М. Н. Хаксли (1993) из [2] о приближении числа точек с целыми координатами, содержащихся в выпуклом множестве с гладкой замкнутой границей, объемом этого множества. Обобщение результата на случай мультиномиальных распределений $M_k(n, \boldsymbol{\pi})$ с $k > 3$ см. в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Assylbekov Zh. A., Ulyanov V. V., Zubov V. N.* On approximation of goodness-of-fit statistics for discrete three-dimensional data. Technical report № 08-09, Hiroshima statistical research group, 2008; <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/stat/TR/TR08/TR08-09.PDF>.
2. *Huxley M. N.* Exponential sums and lattice points. II. — Proc. Lond. Math. Soc. (3), 1993, v. 66, p. 279–301.