Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Шапошников, О дифференцируемости мер по Скороходу, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 3, 618–619

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4272>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:28:46

3. *Ulyanov V. V., Zubov V. N.* Refinement on the convergence of one family of goodness-of-fit statistics to chi-squared distribution. — Hiroshima Math. J., 2009, v. 39, № 1, p. 133–161.

Перельман Г. (МГУ; *e-mail*: glebperelman@gmail.com). **Вывод формулы Ито для функции с разрывом первой производной по кривой, а также с разрывом самой функции, используя дискретный аналог.** С помощью дискретной формулы Ито и приближения броуновского движения случайным блужданием получены аналоги известной формулы Ито для следующих функций:

$$F(t, x) = \begin{cases} f(t, x) & \text{на } \{x < g(t)\}, \\ \phi(t, x) & \text{на } \{x > g(t)\} \end{cases}$$

(где $g(t) \in C^1(\mathbf{R}^+)$, $f(t, x) \in C^{1,2}(x \leq g(t))$, $\phi(t, x) \in C^{1,2}(x \geq g(t))$) в двух случаях:

- 1) $f(t, x) = \phi(t, x)$ на $x = g(t)$;
- 2) $f(t, x) \neq \phi(t, x)$ на $x = g(t)$, но $g(t)$ монотонна.

В первом случае формула имеет вид:

$$\begin{aligned} F(t, W_t) - F(0, 0) &= \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, W_s) I(W_s \neq g(s)) ds \\ &+ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \frac{F'_{x+}(s, g(s)) - F'_{x-}(s, g(s))}{2} I(|W_s - g(s)| < \varepsilon) ds, \end{aligned}$$

где $F'_{x+}(s, g(s)) = \lim_{t \rightarrow s+0} F'_x(t, g(s))$, $F'_{x-}(s, g(s)) = \lim_{t \rightarrow s-0} F'_x(t, g(s))$.

Во втором случае к правой части добавятся два новых слагаемых

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(F_{(+)}(s, g(s)) - F_{(-)}(s, g(s)) \right) I(0 \leq s - g^{-1}(W_s) < \varepsilon) ds \\ &+ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{F_+(s, g(s)) - F_-(s, g(s))}{2} I(|W_s - g(s)| < \varepsilon) dW_s, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_+(s, g(s)) &= \lim_{t \rightarrow s+0} F(t, g(s)), & F_-(s, g(s)) &= \lim_{t \rightarrow s-0} F(t, g(s)), \\ F_{(+)}(s, g(s)) &= \lim_{x \rightarrow g(s)+0} F(s, x), & F_{(-)}(s, g(s)) &= \lim_{x \rightarrow g(s)-0} F(s, x). \end{aligned}$$

Шапошников А. В. (МГУ; *e-mail*: shallt7@mail.ru). **О дифференцируемости мер по Скороходу.** Пусть X — локально выпуклое пространство, $\mathcal{B}(X)$ — его борелевская σ -алгебра и $\mathcal{M}(X)$ — пространство всех вещественных радоновских мер на X . Сдвиг меры μ на вектор $h \in X$ обозначается символом μ_h и задается формулой $\mu_h(A) = \mu(A + h)$. Мера μ называется дифференцируемой вдоль вектора h по Скороходу, если отображение $t \mapsto \mu_{th}$ из $\mathbf{R}^1$ в $\mathcal{M}(X)$ дифференцируемо при наделении пространства мер $\mathcal{M}(X)$ слабой топологией. Это равносильно дифференцируемости в нуле функций

$$t \mapsto \int_X f(x - th) \mu(dx)$$

для всех ограниченных непрерывных функций f на X . Если же отображение $t \mapsto \mu_{th}$ дифференцируемо при наделении $\mathcal{M}(X)$ вариационной нормой, то μ называется дифференцируемой вдоль h по Фомину. В случае $X = \mathbf{R}^1$ дифференцируемость Скорохода равносильна тому, что μ имеет плотность ϱ ограниченной вариации, а дифференцируемость Фомина равносильна существованию абсолютно непрерывной плотности ϱ с

$\varrho' \in L^1(\mathbf{R}^1)$. В. И. Богачевым было показано, что для общих локально выпуклых пространств дифференцируемость Скорохода равносильна липшицевости всех функций $t \mapsto \mu(A+th)$ при $A \in \mathcal{B}(X)$, а также равносильна липшицевости отображения $t \mapsto \mu_{th}$ со значениями в пространстве мер $\mathcal{M}(X)$ с вариационной нормой. Ниже рассматривается абсолютная непрерывность отображения $t \mapsto \mu_{th}$, где μ_{th} обозначает сдвиг меры μ на вектор th , действующего из отрезка $[0, 1]$ в банахово пространство $\mathcal{M}(X)$ с вариационной нормой, а также такое свойство мер, как абсолютная непрерывность функций $t \mapsto \mu(A+th)$ на отрезке $[0, 1]$ для всех множеств из $\mathcal{B}(X)$. Основной результат состоит в том, что первое свойство равносильно дифференцируемости по Скороходу, а второе свойство оказывается строго слабее.

Теорема 1. *Радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве X дифференцируема по Скороходу вдоль вектора h тогда и только тогда, когда отображение $t \mapsto \mu_{th}$ абсолютно непрерывно на отрезке $[0, 1]$.*

Теорема 2. *Неотрицательная конечная мера μ на $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$, заданная плотностью*

$$\varrho(x) := \sum_{m=1}^{\infty} (m^{2/3+1} \cdot 2^m)^{-1} \chi_{[2\pi \cdot 4^m, 2\pi(4^m+2^m)]}(x) \sin^2 mx,$$

не является дифференцируемой по Скороходу, однако для каждого множества $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ функция $\varphi(t) = \mu(A+t)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, 1]$.

Таким образом, абсолютная непрерывность функций $t \mapsto \mu(A+th)$ на всех отрезках слабее дифференцируемости Скорохода. Оказывается, что если в определении абсолютной непрерывности допускать точки, не лежащие в пределах фиксированного отрезка, то это меняет дело.

Теорема 3. *Пусть h — фиксированный вектор локально выпуклого пространства X . Пусть радоновская мера μ на X обладает тем свойством, что для каждого множества $A \in \mathcal{B}(X)$ функция $t \mapsto \mu(A+th)$ абсолютно непрерывна на всей прямой в том смысле, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого конечного набора дизъюнктивных отрезков $[s_1, t_1], \dots, [s_k, t_k]$ с общей длиной $\sum_{i=1}^k |t_i - s_i| < \delta$ выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^k |\mu_{t_i h}(A) - \mu_{s_i h}(A)| < \varepsilon.$$

Тогда мера μ дифференцируема по Скороходу вдоль h .

Шевцова И. Г. (МГУ; e-mail: ishevtsova@cs.msu.su). **Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена.** Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с общей функцией распределения (ф.р.) $F(x)$. Предположим, что $\mathbf{E} X_1 = 0$, $\mathbf{E} X_1^2 = 1$, $\mathbf{E} |X_1|^{2+\delta} \equiv \beta_{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta \in (0, 1)$. Класс всех ф.р., удовлетворяющих сделанным выше предположениям, обозначим $\mathcal{F}_{2+\delta}$. Пусть $F_n(x)$ — ф.р. нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$, $\Phi(x)$ — ф.р. стандартного нормального закона и $\Delta_n = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|$ — равномерное расстояние между F_n и Φ , $L_n^{2+\delta} = \beta_{2+\delta} n^{-\delta/2}$ — дробь Ляпунова порядка $2 + \delta$.

Предлагается уточненная классификация асимптотически правильных постоянных в центральной предельной теореме:

$$C_{\text{ан}}(\delta) = \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^{2+\delta}} \quad (\text{асимптотически наилучшая конст.}),$$

$$\overline{C}_{\text{ап}}(\delta) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \frac{\Delta_n}{L_n^{2+\delta}} \quad (\text{верхняя асимпт. правильная конст.}),$$