Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Шевцова, Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 3, 619–621

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:32:27

$\varrho' \in L^1(\mathbf{R}^1)$. В. И. Богачевым было показано, что для общих локально выпуклых пространств дифференцируемость Скорохода равносильна липшицевости всех функций $t \mapsto \mu(A+th)$ при $A \in \mathcal{B}(X)$, а также равносильна липшицевости отображения $t \mapsto \mu_{th}$ со значениями в пространстве мер $\mathcal{M}(X)$ с вариационной нормой. Ниже рассматривается абсолютная непрерывность отображения $t \mapsto \mu_{th}$, где μ_{th} обозначает сдвиг меры μ на вектор th , действующего из отрезка $[0, 1]$ в банахово пространство $\mathcal{M}(X)$ с вариационной нормой, а также такое свойство мер, как абсолютная непрерывность функций $t \mapsto \mu(A+th)$ на отрезке $[0, 1]$ для всех множеств из $\mathcal{B}(X)$. Основной результат состоит в том, что первое свойство равносильно дифференцируемости по Скороходу, а второе свойство оказывается строго слабее.

Теорема 1. *Радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве X дифференцируема по Скороходу вдоль вектора h тогда и только тогда, когда отображение $t \mapsto \mu_{th}$ абсолютно непрерывно на отрезке $[0, 1]$.*

Теорема 2. *Неотрицательная конечная мера μ на $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$, заданная плотностью*

$$\varrho(x) := \sum_{m=1}^{\infty} (m^{2/3+1} \cdot 2^m)^{-1} \chi_{[2\pi \cdot 4^m, 2\pi(4^m+2^m)]}(x) \sin^2 mx,$$

не является дифференцируемой по Скороходу, однако для каждого множества $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ функция $\varphi(t) = \mu(A+t)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, 1]$.

Таким образом, абсолютная непрерывность функций $t \mapsto \mu(A+th)$ на всех отрезках слабее дифференцируемости Скорохода. Оказывается, что если в определении абсолютной непрерывности допускать точки, не лежащие в пределах фиксированного отрезка, то это меняет дело.

Теорема 3. *Пусть h — фиксированный вектор локально выпуклого пространства X . Пусть радоновская мера μ на X обладает тем свойством, что для каждого множества $A \in \mathcal{B}(X)$ функция $t \mapsto \mu(A+th)$ абсолютно непрерывна на всей прямой в том смысле, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого конечного набора дизъюнктивных отрезков $[s_1, t_1], \dots, [s_k, t_k]$ с общей длиной $\sum_{i=1}^k |t_i - s_i| < \delta$ выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^k |\mu_{t_i h}(A) - \mu_{s_i h}(A)| < \varepsilon.$$

Тогда мера μ дифференцируема по Скороходу вдоль h .

Шевцова И. Г. (МГУ; e-mail: ishevtsova@cs.msu.su). **Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена.** Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с общей функцией распределения (ф.р.) $F(x)$. Предположим, что $\mathbf{E} X_1 = 0$, $\mathbf{E} X_1^2 = 1$, $\mathbf{E} |X_1|^{2+\delta} \equiv \beta_{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta \in (0, 1)$. Класс всех ф.р., удовлетворяющих сделанным выше предположениям, обозначим $\mathcal{F}_{2+\delta}$. Пусть $F_n(x)$ — ф.р. нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$, $\Phi(x)$ — ф.р. стандартного нормального закона и $\Delta_n = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|$ — равномерное расстояние между F_n и Φ , $L_n^{2+\delta} = \beta_{2+\delta} n^{-\delta/2}$ — дробь Ляпунова порядка $2 + \delta$.

Предлагается уточненная классификация асимптотически правильных постоянных в центральной предельной теореме:

$$C_{\text{ан}}(\delta) = \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n(F)}{L_n^{2+\delta}} \quad (\text{асимптотически наилучшая конст.}),$$

$$\overline{C}_{\text{ап}}(\delta) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}} \frac{\Delta_n}{L_n^{2+\delta}} \quad (\text{верхняя асимпт. правильная конст.}),$$

$$C_{\text{ап}}(\delta) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{n, F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: L_n^{2+\delta} = \ell} \frac{\Delta_n}{L_n^{2+\delta}} \quad (\text{асимпт. правильная конст.}),$$

$$\underline{C}_{\text{ап}}(\delta) = \limsup_{\ell \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{F}_{2+\delta}: L_n^{2+\delta} = \ell} \frac{\Delta_n}{L_n^{2+\delta}} \quad (\text{нижняя асимпт. прав. конст.}).$$

Из фундаментальных работ [3]–[7] вытекает, что

$$\underline{C}_{\text{ап}}(1) \leq \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \approx 0.2660 < C_{\text{ан}}(1) = C_{\text{ап}}(1) = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} \approx 0.4097 \leq \overline{C}_{\text{ап}}(1).$$

Мы показываем, что в первом и последнем неравенстве на самом деле имеет место знак равенства.

Случай $0 < \delta < 1$ имеет особое значение, поскольку хорошо известно [2], что $\Delta_n = o(n^{-\delta/2})$, $n \rightarrow \infty$, для любого *фиксированного* распределения $F \in \mathcal{F}_{2+\delta}$, несмотря на то, что известное неравенства Каца–Берри–Эссеена устанавливает оценку лишь порядка $\Delta_n = O(n^{-\delta/2})$. Теорема работы [2] ставит под сомнение «правильность» оценок вида $\Delta_n = O(n^{-\delta/2})$, в том числе неравенства Каца–Берри–Эссеена.

В настоящей работе показано, что несмотря на то, что, как вытекает из теоремы работы [2], $C_{\text{ан}}(\delta) \equiv 0$ для всех $0 < \delta \leq 1$, положительной оказывается величина $\underline{C}_{\text{ап}}(\delta)$, откуда следует, что оценки вида $\Delta_n = O(n^{-\delta/2})$ не могут быть улучшены *равномерно* в классе $\mathcal{F}_{2+\delta}$, $0 < \delta \leq 1$. Более того, для введенных асимптотических постоянных мы указываем нетривиальные двусторонние оценки:

$$\underline{C}_{\text{ап}}(\delta) \geq \sup_{h \geq 0, s > 0} \sup_x \left(\Phi \left(\frac{x+h}{\sqrt{1+s^2}} \right) + \Phi \left(\frac{x-h}{\sqrt{1+s^2}} \right) - 2\Phi(x) + (h^2 + s^2)x\phi(x) \right) \times \left(2\kappa_{2+\delta} s^{2+\delta} e^{-h^2/(2s^2)} {}_1F_1 \left(\frac{3+\delta}{2}, \frac{1}{2}, \frac{h^2}{2s^2} \right) \right)^{-1},$$

где $\phi(x)$ — стандартная нормальная плотность, ${}_1F_1$ — обобщенная гипергеометрическая функция (или вырожденная функция Мейера), $\Gamma(\cdot)$ — эйлерова гамма-функция, а $\kappa_{2+\delta}$ — абсолютный момент стандартного нормального распределения порядка $2+\delta$;

$$\underline{C}_{\text{ап}} \leq C_{\text{ап}}(\delta) \leq \frac{2^{\delta/2} \Gamma((2+\delta)/2)}{\pi} \cdot \sup_{x > 0} \sqrt{\left(\frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^{2+\delta}} \right)^2 + \left(\frac{\sin x - x}{x^{2+\delta}} \right)^2};$$

$$\overline{C}_{\text{ап}}(\delta) \geq \frac{1}{2} \sup_{a > 0} a^{\delta/2} e^{-a} I_0(a),$$

где $I_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Заметим, что последняя оценка является одновременно и минорантой для константы в неравенстве Каца–Берри–Эссеена. Данный результат получен впервые. Верхние оценки константы в неравенстве Каца–Берри–Эссеена получены в работе [1].

Сравнивая значения полученных оценок, замечаем, что, в отличие от случая $\delta = 1$,

$$\underline{C}_{\text{ап}}(\delta) > C_{\text{ан}}(\delta) < C_{\text{ап}}(\delta) < \overline{C}_{\text{ап}}(\delta).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00563, 08-01-00567, 08-07-00152 и 09-07-12032-офи-м), Министерства образования и науки (проект МК-581.2010.1, государственные контракты П1181 и П958).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьева М. Е., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Каца–Берри–Эссеена. — Информатика и ее примен., 2010, т. 4 (в печати).

2. Осипов Л. В., Петров В. В. Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, в. 2, с. 322–329.
3. Чистяков Г. П. Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I, II, III. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 326–344; т. 46, в. 3, с. 573–579; 2002, т. 47, в. 3, с. 475–497.
4. Bentkus V. On the asymptotical behaviour of the constant in the Berry–Esseen inequality. Preprint 91-078, Universität Bielefeld, 1991.
5. Bentkus V. On the asymptotical behaviour of the constant in the Berry–Esseen inequality. — J. Theoret. Probab., 1994, v. 7, № 2, p. 211–224.
6. Esseen C.-G. A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.
7. Prawitz H. On the remainder in the central limit theorem. I. — Scand. Actuar. J., 1975, № 3, p. 145–156.

Ширяев А. Н. (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН; *e-mail*: albertsh@mi.ras.ru). **Концепция случайности: эволюция понятий.** В своем докладе «О логических основаниях теории вероятностей», сделанном в 1982 г. на Четвертом Советско-японском симпозиуме по теории вероятностей, А. Н. Колмогоров так говорил о понятии «случайности»: «В повседневной речи мы называем *случайными* те явления, где мы не находим регулярности, которая позволила бы точно предсказать их результаты. Вообще говоря, нет оснований считать, что случайное явление должно обладать какой-либо определенной вероятностью. Следовательно, мы должны были бы различать *собственно* случайность (как отсутствие регулярности) и *стохастическую* случайность (которая является объектом теории вероятностей)».

В настоящем докладе прослеживается эволюция понятия «собственно случайность». Основные подходы к этому понятию случайности отражены в следующих концепциях: частотоустойчивость, типичность, сложноустроенность, непредсказуемость. Эти концепции привели, в частности, к созданию нового — «алгоритмического» — направления в теории вероятностей, открывшего возможности применения методов теории вероятностей и в тех областях, которые не имеют прямого отношения к «стохастической случайности». (Русскую версию доклада см. на сайте МИАНА, Общесекторский семинар, 26.11.2009.)

Яровая Е. Б. (МГУ; *e-mail*: yarovaya@mech.math.msu.su). **Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся блужданий по $\mathbf{Z}^d$.** В работе сравниваются две модели ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем по $\mathbf{Z}^d$ с размножением и гибелью частиц в одном из узлов решетки (источнике ветвления). В обеих моделях исследуется эволюция системы частиц, состояние которой описывается числом частиц в момент времени t в каждом узле решетки, а также общим размером популяции частиц на всей решетке, в предположении, что в начальный момент времени система состоит из одной частицы, находящейся в узле x . Частицы совершают случайное блуждание по решетке, причем, попадая в источник ветвления, частицы могут к тому же давать произвольное потомство или исчезать. В первой из рассматриваемых моделей генератор случайного блуждания предполагается симметричным на всей решетке, что существенно влияет на выбор методов анализа данного процесса [1].

Основное различие между моделями определяется свойствами ветвящегося блуждания. Во второй модели с целью «искусственного» усиления степени преобладания свойства ветвления или блуждания в источнике вводится дополнительный параметр [2], что приводит к нарушению симметричности генератора случайного блуждания и, как результат, — к невозможности непосредственного использования методов анализа, развитых в [1], существенно использовавших симметричность случайного блуждания. Несмотря на близкое по сути описание эволюции ансамблей частиц в обеих моделях и получающиеся сходные результаты [2], [3], сравнение свойств этих