Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Принцип инвариантности для критического процесса Гальтона–Ватсона, достигающего высокого уровня, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 4, 625–643

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4276>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:11:41

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука

Том 55
Выпуск 4, 2010 год
октябрь, ноябрь, декабрь

© 2010 г.

АФАНАСЬЕВ В. И.*

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ КРИТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА, ДОСТИГАЮЩЕГО ВЫСОКОГО УРОВНЯ¹⁾

Для критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона, рассматриваемого при условии достижения им высокого уровня, установлен принцип инвариантности, при этом предельный процесс представлен как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ феллеровского непрерывного ветвящегося процесса, стартующего с уровня $\varepsilon > 0$ и рассматриваемого при условии достижения уровня 1. Указана итерационная процедура для вычисления конечномерных преобразований Лапласа предельного процесса.

Ключевые слова и фразы: процесс Гальтона–Ватсона, условные принципы инвариантности и предельные теоремы, феллеровский непрерывный ветвящийся процесс, условные феллеровские непрерывные ветвящиеся процессы.

1. Пусть $Z_0 = 1$, $Z_1, Z_2, \dots$ — критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{D}Z_1 \equiv 2b \in (0, +\infty). \quad (1)$$

Пусть T_x — момент первого достижения уровня $x > 0$ процессом $\{Z_n\}$, т.е.

$$T_x = \inf\{n: Z_n > x\}.$$

В работе [1] установлены предельные теоремы для некоторых функционалов от процесса $\{Z_n\}$, рассматриваемого при условии, что $T_x < +\infty$, $x \rightarrow +\infty$.

*Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: viafan@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00078) и программы «Математическая теория управления» Президиума РАН.

Цель настоящей работы — установить принцип инвариантности для процесса $\{Z_n\}$, рассматриваемого при условии, что $T_x < +\infty$, $x \rightarrow +\infty$.

При решении указанной задачи существенную роль играет принцип инвариантности Феллера–Линдвалла (см. [2]): если выполнено условие (1) и $y > 0$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{Z_{[nt]}}{bn}, t \geq 0 \mid Z_0 = [bny] \right\} \xrightarrow{D} \{Y(t), t \geq 0 \mid Y(0) = y\}, \quad (2)$$

где $Y = \{Y(t)\}$ — так называемый *феллеровский непрерывный ветвящийся процесс*, символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, +\infty)$ с топологией Скорохода. Процесс Y является однородным диффузионным процессом, принимающим неотрицательные значения, причем состояние 0 является поглощающим.

Принцип инвариантности Феллера–Линдвалла играет такую же роль в теории ветвящихся процессов, какую в теории случайных блужданий играет принцип инвариантности Прохорова–Донскера. В условных принципах инвариантности для случайных блужданий предельными процессами являются различные условные броуновские движения (например, броуновская извилина, броуновская экскурсия). Точно так же в условных принципах инвариантности для критического процесса Гальтона–Ватсона предельными процессами являются *условные феллеровские непрерывные ветвящиеся процессы*. Обоснуем эту мысль на примере принципа инвариантности для процесса $\{Z_n\}$, рассматриваемого при условии, что $T_x < +\infty$.

Сначала опишем предельный процесс. Пусть $T_x^{(Y)}$ — момент первого достижения уровня $x > 0$ процессом Y , т.е.

$$T_x^{(Y)} = \inf\{t: Y(t) = x\}.$$

Теорема 1. Пусть $Y(0) = \varepsilon > 0$. Тогда процесс Y , рассматриваемый при условии, что $T_1^{(Y)} < +\infty$, сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ по распределению в пространстве $C[0, +\infty)$ к некоторому случайному процессу $Y^\uparrow$ с непрерывными траекториями.

По аналогии с процессом, аналогичным образом построенным по броуновскому движению (см. [3]), назовем процесс $Y^\uparrow = \{Y^\uparrow(t), t \geq 0\}$ *феллеровским прыжком в высоту*. Именно этот процесс и является предельным в обсуждаемом принципе инвариантности. Сформулируем его.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (1). Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \frac{Z_{[xt/b]}}{x}, t \geq 0 \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} Y^\uparrow.$$

2. Изложим некоторые вспомогательные результаты. Пусть T — момент вырождения процесса $\{Z_n\}$, т.е.

$$T = \inf\{n: Z_n = 0\}.$$

Хорошо известно, что при выполнении условия (1)

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \frac{1}{bn}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

В работе [4] показано, что если выполнено условие (1), то

$$\mathbf{P}(T_x < +\infty) \sim \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Пусть верхний индекс (y) в символах $\mathbf{P}^{(y)}$ и $\mathbf{E}^{(y)}$ указывает на то, что процесс Y стартует из состояния $y > 0$. Известно (см. [2]), что при $y > 0$ и $t > 0$

$$\mathbf{E}^{(y)} \exp(-\lambda Y(t)) = \exp\left(-\frac{\lambda y}{1 + \lambda t}\right), \quad \lambda \geq 0. \quad (5)$$

Из соотношения (5) следует свойство автомодельности процесса Y : при $c > 0$

$$\left\{cY\left(\frac{t}{c}\right)\right\} \stackrel{D}{=} \{Y(t)\}. \quad (6)$$

Для доказательства достаточно заметить, что при $0 < t_1 < t_2$, $y > 0$, $\lambda \geq 0$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\exp\left(-\lambda cY\left(\frac{t_2}{c}\right)\right) \middle| cY\left(\frac{t_1}{c}\right) = y\right] &= \exp\left(-\frac{\lambda c(y/c)}{1 + \lambda c(t_2/c - t_1/c)}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\lambda y}{1 + \lambda(t_2 - t_1)}\right) = \mathbf{E}[\exp(-\lambda Y(t_2)) | Y(t_1) = y]. \end{aligned}$$

Из соотношения (5) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(y)}(Y(t) > 0) &= 1 - \mathbf{P}^{(y)}(Y(t) = 0) \\ &= 1 - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{\lambda y}{1 + \lambda t}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{t}\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(y)}[\exp(-\lambda Y(t)); Y(t) > 0] &= \mathbf{E}^{(y)} \exp(-\lambda Y(t)) - \mathbf{P}^{(y)}(Y(t) = 0) \\ &= \exp\left(-\frac{\lambda y}{1 + \lambda t}\right) - \exp\left(-\frac{y}{t}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Следовательно, при $y \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}^{(y)}(Y(t) > 0) \sim \frac{y}{t} \quad (8)$$

и

$$\mathbf{E}^{(y)}[\exp(-\lambda Y(t)); Y(t) > 0] \sim \frac{y}{t(1 + \lambda t)}.$$

Из этих двух соотношений получаем, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathbf{E}^{(y)}[\exp(-\lambda Y(t)) | Y(t) > 0] = \frac{1}{1 + \lambda t}. \quad (9)$$

Соотношение (9) означает, что при каждом $u \geq 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(y)}(Y(t) \leq u | Y(t) > 0) = 1 - \exp\left(-\frac{u}{t}\right). \quad (10)$$

Из соотношений (8) и (10) находим, что при $u > 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \mathbf{P}^{(y)}(0 < Y(t) \leq u) = \frac{1}{t} \left(1 - \exp\left(-\frac{u}{t}\right)\right). \quad (11)$$

Далее, известно (см., например, [5]), что при $0 < y < z$

$$\mathbf{P}^{(y)}(T_z^{(Y)} < +\infty) = \frac{y}{z} \quad (12)$$

и

$$\mathbf{E}^{(y)} \exp(-\lambda T_z^{(Y)}) = \frac{\sqrt{y} I_1(2\sqrt{\lambda y})}{\sqrt{z} I_1(2\sqrt{\lambda z})}, \quad \lambda \geq 0, \quad (13)$$

где $I_1(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка 1. Следовательно,

$$\mathbf{E}^{(y)} \left[\exp(-\lambda T_z^{(Y)}); T_z^{(Y)} < +\infty \right] = \mathbf{E}^{(y)} \exp(-\lambda T_z^{(Y)}) = \frac{\sqrt{y} I_1(2\sqrt{\lambda y})}{\sqrt{z} I_1(2\sqrt{\lambda z})}.$$

Таким образом, при $y \in (0, 1)$

$$\mathbf{E}^{(y)} \left[\exp(-\lambda T_1^{(Y)}) \mid T_1^{(Y)} < +\infty \right] = \frac{I_1(2\sqrt{\lambda y})}{\sqrt{y} I_1(2\sqrt{\lambda})}.$$

Поскольку $I_1(y) \sim y/2$ при $y \rightarrow 0$, в итоге получаем, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp(-\lambda T_1^{(Y)}) \mid T_1^{(Y)} < +\infty \right] = \frac{\sqrt{\lambda}}{I_1(2\sqrt{\lambda})}. \quad (14)$$

Выражение в правой части соотношения (14) является преобразованием Лапласа собственного распределения, поскольку

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\lambda}}{I_1(2\sqrt{\lambda})} = 1.$$

Обозначим $p(t)$ плотность этого распределения, т.е. функцию, удовлетворяющую при каждом $\lambda \geq 0$ равенству

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) p(t) dt = \frac{\sqrt{\lambda}}{I_1(2\sqrt{\lambda})}.$$

Известно (см., например, [5]), что при $t \geq 0$

$$p(t) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{1,n}^2}{J_2(j_{1,n})} \exp\left(-\frac{j_{1,n}^2}{4} t\right),$$

где $J_\nu(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν , а $j_{1,1}, j_{1,2}, \dots$ — последовательные (по возрастанию) положительные нули функции $J_1(\cdot)$.

Из соотношения (14) получаем, что при $t \geq 0$ и $y \in (0, 1)$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(y)}(T_1^{(Y)} \leq t \mid T_1^{(Y)} < +\infty) = \int_0^t p(s) ds. \quad (15)$$

3. Приступим к доказательству теоремы 1. Установим сначала сходимость конечномерных распределений. Зафиксируем $m \in \mathbf{N}$ и такие моменты времени $t_1, \dots, t_m$, что $0 < t_1 < \dots < t_m$. Найдем предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ конечномерного преобразования Лапласа

$$\Psi_m^{(\varepsilon)}(t_1, \lambda_1, \dots, t_m, \lambda_m) = \mathbf{E}^{(\varepsilon)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right) \mid T_1^{(Y)} < +\infty \right],$$

где $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$. Запишем очевидное представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^{(\varepsilon)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); T_1^{(Y)} < +\infty \right] \\ &= \mathbf{E}^{(\varepsilon)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); T_1^{(Y)} \leq t_1 \right] \\ &+ \mathbf{E}^{(\varepsilon)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); t_1 < T_1^{(Y)} < +\infty \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Сначала рассмотрим первое слагаемое в правой части. Ввиду строгого марковского свойства процесса Y и соотношения (12)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}^{(\varepsilon)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); T_1^{(Y)} \leq t_1 \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{t_1} \mathbf{E}^{(1)} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i - t) \right) d\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(T_1^{(Y)} \leq t) \\ &= \int_0^{t_1} \mathbf{E}^{(1)} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i - t) \right) d\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(T_1^{(Y)} \leq t \mid T_1^{(Y)} < +\infty). \end{aligned}$$

В последнем выражении математическое ожидание является ограниченной и непрерывной по переменной t функцией. Следовательно, ввиду соотношения (15), получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}^{(\varepsilon)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); T_1^{(Y)} \leq t_1 \right] \\ = \int_0^{t_1} \mathbf{E}^{(1)} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i - t) \right) p(t) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Положим

$$\varphi_m(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_m, t_m) = \mathbf{E}^{(1)} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right).$$

Из соотношения (17) находим, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}^{(\varepsilon)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); T_1^{(Y)} \leq t_1 \right] \\ = \int_0^{t_1} \varphi_m(\lambda_1, t_1 - t, \dots, \lambda_m, t_m - t) p(t) dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в правой части соотношения (16). Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(\varepsilon)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); t_1 < T_1^{(Y)} < +\infty \right] \\ = \int_0^1 e^{-\lambda_1 y} \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp \left(- \sum_{i=2}^m \lambda_i Y(t_i - t_1) \right); T_1^{(Y)} < +\infty \right] \\ \times d\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(0 < Y(t_1) \leq y, \sup_{t \leq t_1} Y(t) < 1). \end{aligned} \quad (19)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(0 < Y(t_1) \leq y, \sup_{t \leq t_1} Y(t) < 1) \\ = \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(0 < Y(t_1) \leq y) - \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(0 < Y(t_1) \leq y, T_1^{(Y)} \leq t_1). \end{aligned} \quad (20)$$

Ввиду соотношения (11)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(0 < Y(t_1) \leq y) = \frac{1}{t_1} \left(1 - \exp \left(- \frac{y}{t_1} \right) \right). \quad (21)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(0 < Y(t_1) \leq y, T_1^{(Y)} \leq t_1) \\ = \int_0^{t_1} \mathbf{P}^{(1)}(0 < Y(t_1 - t) \leq y) d\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(T_1^{(Y)} \leq t), \end{aligned}$$

поэтому (см. (12) и (15))

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(0 < Y(t_1) \leq y, T_1^{(Y)} \leq t_1) \\ = \int_0^{t_1} \mathbf{P}^{(1)}(0 < Y(t_1 - t) \leq y) p(t) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Из соотношений (12), (20)–(22) получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(Y(t_1) \leq y, \sup_{t \leq t_1} Y(t) < 1) \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(Y(t_1) \leq y, \sup_{t \leq t_1} Y(t) < 1 \mid T_1^{(Y)} < +\infty) \\ = \frac{1}{t_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{y}{t_1}\right) \right) - \int_0^{t_1} \mathbf{P}^{(1)}(0 < Y(t_1 - t) \leq y) p(t) dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть $p(t, x, y)$ означает переходную плотность вероятностей процесса Y , т.е. при положительных x , y и t

$$\mathbf{P}^{(x)}(Y(t) \in dy) = p(t, x, y) dy.$$

Известно (см., например, [5]), что при положительных x , y и t

$$p(t, x, y) = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{x}{y}} I_1\left(\frac{2\sqrt{xy}}{t}\right) \exp\left(-\frac{x+y}{t}\right).$$

Из соотношения (7) вытекает, что при $\lambda \geq 0$

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda y) p(t, x, y) dy = \exp\left(-\frac{\lambda x}{1 + \lambda t}\right) - \exp\left(-\frac{x}{t}\right).$$

Из соотношений (19) и (23), учитывая, что производная по y правой части (23) равна $f(t_1, y)$, где

$$f(s, y) = \frac{1}{s^2} \exp\left(-\frac{y}{s}\right) - \int_0^s p(s - t, 1, y) p(t) dt,$$

находим, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}^{(\varepsilon)} \left[\exp\left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i)\right); t_1 < T_1^{(Y)} < +\infty \right] \\ = \int_0^1 e^{-\lambda_1 y} f(t_1, y) \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp\left(-\sum_{i=2}^m \lambda_i Y(t_i - t_1)\right); T_1^{(Y)} < +\infty \right] dy. \end{aligned} \quad (24)$$

Обозначим при $y \in (0, 1)$

$$\psi_m^{(y)}(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_m, t_m) = \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp\left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i)\right) \mid T_1^{(Y)} < +\infty \right].$$

Ввиду формулы (12)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp \left(- \sum_{i=2}^m \lambda_i Y(t_i - t_1) \right); T_1^{(Y)} < +\infty \right] \\ = y \psi_{m-1}^{(y)}(\lambda_2, t_2 - t_1, \dots, \lambda_m, t_m - t_1), \end{aligned}$$

поэтому соотношение (24) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}^{(\varepsilon)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); t_1 < T_1^{(Y)} < +\infty \right] \\ = \int_0^1 e^{-\lambda_1 y} f(t_1, y) y \psi_{m-1}^{(y)}(\lambda_2, t_2 - t_1, \dots, \lambda_m, t_m - t_1) dy. \quad (25) \end{aligned}$$

Из соотношений (16), (18) и (25) находим, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}^{(\varepsilon)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); T_1^{(Y)} < +\infty \right] \\ = \int_0^{t_1} \varphi_m(\lambda_1, t_1 - t, \dots, \lambda_m, t_m - t) p(t) dt \\ + \int_0^1 e^{-\lambda_1 y} f(t_1, y) y \psi_{m-1}^{(y)}(\lambda_2, t_2 - t_1, \dots, \lambda_m, t_m - t_1) dy. \quad (26) \end{aligned}$$

Соотношение (26), ввиду формулы (12), означает, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_m^{(\varepsilon)}(t_1, \lambda_1, \dots, t_m, \lambda_m) = \int_0^{t_1} \varphi_m(\lambda_1, t_1 - t, \dots, \lambda_m, t_m - t) p(t) dt \\ + \int_0^1 e^{-\lambda_1 y} f(t_1, y) y \psi_{m-1}^{(y)}(\lambda_2, t_2 - t_1, \dots, \lambda_m, t_m - t_1) dy. \quad (27) \end{aligned}$$

Итак, сходимость конечномерных преобразований Лапласа доказана. Из этой сходимости вытекает сходимость конечномерных распределений. Осталось показать, что предельные конечномерные распределения являются собственными. Заметим, что соотношение (27) справедливо при $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_m = 0$ и при этом принимает вид

$$1 = \int_0^{t_1} p(t) dt + \int_0^1 f(t_1, y) y dy.$$

Но правая часть последнего соотношения есть предел при $\lambda_1 \rightarrow 0, \dots, \lambda_m \rightarrow 0$ правой части соотношения (27), поскольку обе функции φ_m и $\psi_m^{(z)}$ (от переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_m$) являются преобразованиями Лапласа собственных распределений. Следовательно, предел правой части соотношения (27) равен 1. Это как раз и означает, что предельные конечномерные распределения являются собственными.

Введем для произвольных $v, u \geq 0$ ($v < u$) модуль непрерывности для функции $x = x(t)$, принадлежащей $C[0, +\infty)$:

$$w_x(\delta; v, u) = \sup_{t, s: |t-s| \leq \delta} |x(t) - x(s)|,$$

где δ — положительное число, $t, s \in [v, u]$.

Покажем, что для произвольных $u, a > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(w_Y(\delta; 0, u) \geq a \mid T_1^{(Y)} < +\infty) = 0. \quad (28)$$

При доказательстве (28) используются следующие два факта. Для функции $x \in C[0, +\infty)$ и $u > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w_x(\delta; 0, u) = 0.$$

Следовательно, для произвольного $y > 0$ при всех положительных a , за исключением не более чем счетного множества,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(y)}(w_Y(\delta; 0, u) \geq a) = 0. \quad (29)$$

Кроме того, заметим, что при $0 < v < u$

$$w_x(\delta; 0, u) \leq 2 \sup_{t \leq v} |x(t)| + w_x(\delta; v, u). \quad (30)$$

Зафиксируем $u, a > 0$. Покажем, что

$$\lim_{v \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(w_Y(\delta; v, u) \geq a \mid T_1^{(Y)} < +\infty) = 0. \quad (31)$$

Запишем представление:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(w_Y(\delta; v, u) \geq a, T_1^{(Y)} < +\infty) \\ &= \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(w_Y(\delta; v, u) \geq a, v < T_1^{(Y)} < +\infty) \\ &+ \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(w_Y(\delta; v, u) \geq a, T_1^{(Y)} \leq v). \end{aligned} \quad (32)$$

Очевидно, что при $v \in (0, u)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(w_Y(\delta; v, u) \geq a, v < T_1^{(Y)} < +\infty) \\ &= \int_0^1 \mathbf{P}^{(y)}(w_Y(\delta; 0, u-v) \geq a, T_1^{(Y)} < +\infty) d\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(Y(v) \leq y, \sup_{t \leq v} Y(t) < 1). \end{aligned}$$

Следовательно, при $v \in (0, u)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(w_Y(\delta; v, u) \geq a, v < T_1^{(Y)} < +\infty) \\ &\leq \int_0^1 \mathbf{P}^{(y)}(w_Y(\delta; 0, u) \geq a) d\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(Y(v) \leq y, \sup_{t \leq v} Y(t) < 1). \end{aligned}$$

В силу автомодельности процесса Y (см. (6)), при $y \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(y)}(w_Y(\delta; 0, u) \geq a) &= \mathbf{P}^{(1)}\left(w_Y\left(\frac{\delta}{y}; 0, \frac{u}{y}\right) \geq \frac{a}{y}\right) \\ &\leq \mathbf{P}^{(1)}\left(w_Y\left(\frac{\delta}{y}; 0, \frac{u}{y}\right) \geq a\right), \end{aligned}$$

причем последняя вероятность является ограниченной и монотонной функцией переменного $y \in (0, 1)$. Следовательно, учитывая соотношение (23), находим, что

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(w_Y(\delta; v, u) \geq a, v < T_1^{(Y)} < +\infty \mid T_1^{(Y)} < +\infty) \\ \leq \int_0^1 \mathbf{P}^{(1)}\left(w_Y\left(\frac{\delta}{y}; 0, \frac{u}{y}\right) \geq a\right) f(v, y) dy. \end{aligned}$$

Откуда, переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ и учитывая соотношение (29), получаем, что при каждом $v \in (0, u)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(w_Y(\delta; v, u) \geq a, v < T_1^{(Y)} < +\infty \mid T_1^{(Y)} < +\infty) = 0. \quad (33)$$

Далее,

$$\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(w_Y(\delta; v, u) \geq a, T_1^{(Y)} \leq v \mid T_1^{(Y)} < +\infty) \leq \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(T_1^{(Y)} \leq v \mid T_1^{(Y)} < +\infty).$$

Но в силу соотношения (15)

$$\lim_{v \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(T_1^{(Y)} \leq v \mid T_1^{(Y)} < +\infty) = \lim_{v \rightarrow 0} \int_0^v p(t) dt = 0. \quad (34)$$

Поэтому

$$\lim_{v \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(w_Y(\delta; v, u) \geq a, T_1^{(Y)} \leq v \mid T_1^{(Y)} < +\infty) = 0. \quad (35)$$

Из (32), (33) и (35) вытекает требуемое утверждение (31).

Теперь покажем, что при $a \in (0, 1)$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}\left(\sup_{t \leq v} Y(t) \geq a \mid T_1^{(Y)} < +\infty\right) = 0. \quad (36)$$

Заметим, что при $a \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}\left(\sup_{t \leq v} Y(t) \geq a, T_1^{(Y)} < +\infty\right) &= \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(T_a^{(Y)} \leq v, T_1^{(Y)} < +\infty) \\ &\leq \mathbf{P}^{(\varepsilon)}(T_a^{(Y)} \leq v, T_a^{(Y)} < +\infty). \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку, ввиду формулы (12), $\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(T_a^{(Y)} < +\infty)/\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(T_1^{(Y)} < +\infty) = 1/a$, то из соотношения (37) находим, что

$$\mathbf{P}^{(\varepsilon)}\left(\sup_{t \leq v} y(t) \geq a \mid T_1^{(Y)} < +\infty\right) \leq \frac{1}{a} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}\left(T_a^{(Y)} \leq v \mid T_a^{(Y)} < +\infty\right). \quad (38)$$

По свойству автомодельности процесса Y

$$\mathbf{P}^{(\varepsilon)}\left(T_a^{(Y)} \leq v \mid T_a^{(Y)} < +\infty\right) = \mathbf{P}^{(\varepsilon/a)}\left(T_1^{(Y)} \leq \frac{v}{a} \mid T_1^{(Y)} < +\infty\right),$$

откуда, учитывая соотношение (34), находим, что

$$\lim_{v \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(\varepsilon)}\left(T_a^{(Y)} \leq v \mid T_a^{(Y)} < +\infty\right) = 0. \quad (39)$$

Из соотношений (38), (39) получаем требуемое утверждение (36).

Из соотношений (30), (31) и (36) вытекает (28). Как хорошо известно из теории сходимости случайных процессов с непрерывными траекториями, из сходимости конечномерных распределений и соотношения (28) следует утверждение теоремы 1.

4. Из доказанной теоремы и формулы (27) вытекает следующая формула для конечномерных преобразований Лапласа процесса $Y^\uparrow$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y^\uparrow(t_i) \right) &= \int_0^{t_1} \varphi_m(\lambda_1, t_1 - t, \dots, \lambda_m, t_m - t) p(t) dt \\ &+ \int_0^1 e^{-\lambda_1 y} f(y, t_1) y \psi_{m-1}^{(y)}(\lambda_2, t_2 - t_1, \dots, \lambda_m, t_m - t_1) dy. \end{aligned} \quad (40)$$

Укажем итерационную процедуру, позволяющую вычислять входящие в формулу (40) функции φ_m и $\psi_m^{(y)}$.

Для функции φ_m итерационная формула имеет вид

$$\varphi_m(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_m, t_m) = \varphi_{m-1}(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_{m-2}, t_{m-2}, \lambda_{m-1}^*, t_{m-1}), \quad (41)$$

где

$$\lambda_{m-1}^* = \lambda_{m-1} + \frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m(t_m - t_{m-1})}.$$

Действительно, ввиду марковского свойства процесса Y и соотношения (5)

$$\begin{aligned} &\varphi_m(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_m, t_m) \\ &= \mathbf{E}^{(1)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i Y(t_i) \right) \mathbf{E}^{(Y(t_{m-1}))} \exp(-\lambda_m Y(t_m - t_{m-1})) \right] \\ &= \mathbf{E}^{(1)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i Y(t_i) \right) \exp \left(- \frac{\lambda_m Y(t_m - t_{m-1})}{1 + \lambda_m(t_m - t_{m-1})} \right) \right] \\ &= \mathbf{E}^{(1)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^{m-2} \lambda_i Y(t_i) - \left(\lambda_{m-1} + \frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m(t_m - t_{m-1})} \right) Y(t_{m-1}) \right) \right], \end{aligned}$$

но последнее выражение совпадает с правой частью формулы (41) по определению функции φ_{m-1} .

Найдем теперь итерационную формулу для функции $\psi_m^{(y)}$ при $y \in (0, 1)$. Запишем представление

$$\begin{aligned} y\psi_m^{(y)}(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_m, t_m) &= \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); T_1^{(Y)} \leq t_1 \right] \\ &+ \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); t_1 < T_1^{(Y)} < +\infty \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Пусть $p^{(y)}(t)$ — плотность распределения случайной величины $T_1^{(Y)}$, рассматриваемой при условии, что $Y(0) = y$, $y \in (0, 1)$. Известно (см., например, [5]), что при $t \geq 0$

$$p^{(y)}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{y} \frac{j_{1,n} J_1(j_{1,n} \sqrt{y})}{J_2(j_{1,n})} \exp \left(- \frac{j_{1,n}^2}{4} t \right).$$

Из соотношения (13) следует, что при $\lambda \geq 0$

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) p^{(y)}(t) dt = \frac{\sqrt{y} I_1(2\sqrt{\lambda y})}{I_1(2\sqrt{\lambda})}$$

(здесь $y \in (0, 1)$ выполняет роль параметра).

Заметим, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}^{(y)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); T_1^{(Y)} \leq t_1 \right] \\ &= \int_0^{t_1} \mathbf{E}^{(1)} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i - t) \right) d\mathbf{P}^{(y)} (T_1^{(Y)} \leq t) \\ &= \int_0^{t_1} \varphi_m(\lambda_1, t_1 - t, \dots, \lambda_m, t_m - t) p^{(y)}(t) dt. \end{aligned} \quad (43)$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}^{(y)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); t_1 < T_1^{(Y)} < +\infty \right] \\ &= \int_0^1 e^{-\lambda_1 z} \mathbf{E}^{(z)} \left[\exp \left(- \sum_{i=2}^m \lambda_i Y(t_i - t_1) \right); T_1^{(Y)} < +\infty \right] \\ &\quad \times d\mathbf{P}^{(y)} (0 < Y(t_1) \leq z, \sup_{t \leq t_1} Y(t) < 1), \end{aligned}$$

откуда, вспоминая определение $\psi_{m-1}^{(z)}$, получаем, что

$$\mathbf{E}^{(y)} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i) \right); t_1 < T_1^{(Y)} < +\infty \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 e^{-\lambda_1 z} \psi_{m-1}^{(z)}(\lambda_2, t_2 - t_1, \dots, \lambda_m, t_m - t_1) \\
&\quad \times d\mathbf{P}^{(y)}\left(0 < Y(t_1) \leq z, \sup_{t \leq t_1} Y(t) < 1\right). \quad (44)
\end{aligned}$$

Последнюю вероятность легко найти:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}^{(y)}\left(0 < Y(t_1) \leq z, \sup_{t \leq t_1} Y(t) < 1\right) \\
&= \mathbf{P}^{(y)}(0 < Y(t_1) \leq z) - \mathbf{P}^{(y)}\left(0 < Y(t_1) \leq z, T_1^{(Y)} \leq t_1\right), \quad (45)
\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{P}^{(y)}(0 < Y(t_1) \leq z) = \int_0^z p(t_1, y, u) du$$

и

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}^{(y)}\left(0 < Y(t_1) \leq z, T_1^{(Y)} \leq t_1\right) \\
&= \int_0^{t_1} \mathbf{P}^{(1)}(0 < Y(t_1 - t) \leq z) d\mathbf{P}^{(y)}\left(T_1^{(Y)} \leq t\right) \\
&= \int_0^{t_1} \left(\int_0^z p(t_1 - t, 1, u) du\right) p^{(y)}(t) dt.
\end{aligned}$$

Следовательно, производная по z правой части соотношения (45) равна $g(t_1, y, z)$, где

$$g(s, y, z) = p(s, y, z) - \int_0^s p(s - t, 1, z) p^{(y)}(t) dt.$$

А это означает, что соотношение (44) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^{(y)}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i)\right); t_1 < T_1^{(Y)} < +\infty\right] \\
&= \int_0^1 e^{-\lambda_1 z} \psi_{m-1}^{(z)}(\lambda_2, t_2 - t_1, \dots, \lambda_m, t_m - t_1) g(t_1, y, z) dz. \quad (46)
\end{aligned}$$

Из соотношений (42), (43) и (46) окончательно получаем, что

$$\begin{aligned}
y\psi_m^{(y)}(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_m, t_m) &= \int_0^{t_1} \varphi_m(\lambda_1, t_1 - t, \dots, \lambda_m, t_m - t) p^{(y)}(t) dt \\
&+ \int_0^1 e^{-\lambda_1 z} \psi_{m-1}^{(z)}(\lambda_2, t_2 - t_1, \dots, \lambda_m, t_m - t_1) g(t_1, y, z) dz. \quad (47)
\end{aligned}$$

Соотношение (47) и является искомой итерационной формулой для функции $\psi_m^{(y)}$.

5. Приступим к *доказательству теоремы 2*. Зафиксируем $m \in \mathbf{N}$ и такие моменты времени $t_1, \dots, t_m$, что $0 < t_1 < \dots < t_m$. Найдем предел при $x \rightarrow +\infty$ конечномерного преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} & \Phi_m^{(x)}(t_1, \lambda_1, \dots, t_m, \lambda_m) \\ &= \mathbf{E} \left[\exp \left(-\lambda_1 \frac{Z_{\lfloor xt_1/b \rfloor}}{x} - \dots - \lambda_m \frac{Z_{\lfloor xt_m/b \rfloor}}{x} \right) \middle| T_x < +\infty \right]. \end{aligned}$$

Запишем при $\varepsilon > 0$ представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(T_x < +\infty) \Phi_m^{(x)}(t_1, \lambda_1, \dots, t_m, \lambda_m) \\ &= E_1(s, x, \varepsilon) + E_2(s, x, \varepsilon) + E_3(s, x, \varepsilon), \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} E_1(s, x, \varepsilon) &= \mathbf{E} \left[\exp \left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{Z_{\lfloor xt_i/b \rfloor}}{x} \right); T > \varepsilon x, \varepsilon x \leq T_x < +\infty \right], \\ E_2(s, x, \varepsilon) &= \mathbf{E} \left[\exp \left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{Z_{\lfloor xt_i/b \rfloor}}{x} \right); T > \varepsilon x, T_x < \varepsilon x \right], \\ E_3(s, x, \varepsilon) &= \mathbf{E} \left[\exp \left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{Z_{\lfloor xt_i/b \rfloor}}{x} \right); T \leq \varepsilon x, T_x < +\infty \right]. \end{aligned}$$

В работе [1] показано, что при выполнении условия (1)

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} x \mathbf{P}(T > \varepsilon x, T_x < \varepsilon x) = 0, \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} x \mathbf{P}(T \leq \varepsilon x, T_x < +\infty) = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Из этих двух соотношений получаем соответственно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} x E_2(s, x, \varepsilon) = 0, \quad (50)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} x E_3(s, x, \varepsilon) = 0. \quad (51)$$

Приступим к изучению $E_1(s, x, \varepsilon)$. Положим $k = \varepsilon x$, тогда

$$E_1(s, x, \varepsilon) = \mathbf{E} \left[\exp \left(-\varepsilon \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{Z_{\lfloor kt_i/(b\varepsilon) \rfloor}}{k} \right); T > k, k \leq T_{k/\varepsilon} < +\infty \right].$$

Рассмотрим на множестве $\{T > k\}$ случайную последовательность $\tilde{Z}_l = Z_{k+l}$, $l = 0, 1, \dots$, и положим

$$\tilde{T}_x = \inf\{l: \tilde{Z}_l > x\}.$$

Тогда на множестве $\{T > k, k \leq T_{k/\varepsilon} < +\infty\}$ выполняются равенства

$$T_{k/\varepsilon} = k + \tilde{T}_{k/\varepsilon},$$

$$Z_{\lfloor kt_i/(b\varepsilon) \rfloor} = \tilde{Z}_{\lfloor kt_i/(b\varepsilon) \rfloor - k} = \tilde{Z}_{\lfloor k(t_i/(b\varepsilon) - 1) \rfloor}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \{T > k, k \leq T_{k/\varepsilon} < +\infty\} &= \{T > k, T_{k/\varepsilon} \geq k, \tilde{T}_{k/\varepsilon} < +\infty\} \\ &= \{T > k, \tilde{T}_{k/\varepsilon} < +\infty\} \setminus \{T > k, T_{k/\varepsilon} < k, \tilde{T}_{k/\varepsilon} < +\infty\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E_1(s, x, \varepsilon) = E_{11}(s, x, \varepsilon) - E_{12}(s, x, \varepsilon), \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} E_{11}(s, x, \varepsilon) &= \mathbf{E} \left[\exp \left(-\varepsilon \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\tilde{Z}_{\lfloor k(t_i/(b\varepsilon) - 1) \rfloor}}{k} \right); T > k, \tilde{T}_{k/\varepsilon} < +\infty \right], \\ E_{12}(s, x, \varepsilon) &= \mathbf{E} \left[\exp \left(-\varepsilon \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\tilde{Z}_{\lfloor k(t_i/(b\varepsilon) - 1) \rfloor}}{k} \right); T > k, T_{k/\varepsilon} < k, \tilde{T}_{k/\varepsilon} < +\infty \right]. \end{aligned}$$

Из соотношения (49) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} x E_{12}(s, x, \varepsilon) = 0. \quad (53)$$

В силу марковского свойства процесса $\{Z_n\}$

$$\begin{aligned} E_{11}(s, x, \varepsilon) &= \mathbf{P}(T > k) \\ &\times \int_0^{+\infty} \mathbf{E} \left[\exp \left(-\varepsilon \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{Z_{\lfloor k(t_i/(b\varepsilon) - 1) \rfloor}}{k} \right) \chi_{\{T_{k/\varepsilon} < +\infty\}} \middle| Z_0 = \lfloor bky \rfloor \right] \\ &\times d\mathbf{P}(Z_k \leq bky | T > k). \end{aligned} \quad (54)$$

По теореме Яглома при $y \geq 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{Z_k}{bk} \leq y \middle| T > k \right) = 1 - e^{-y}. \quad (55)$$

В силу принципа инвариантности Феллера–Линдвалла (см. (2)), учитывая, что случайная величина $\sup_{t \geq 0} Y(t)$ имеет непрерывную функцию распределения (см. (12)), получаем, что при $y > 0$

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\exp \left(-\varepsilon \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{Z_{\lfloor k(t_i/(b\varepsilon) - 1) \rfloor}}{k} \right) \chi_{\{T_{k/\varepsilon} < +\infty\}} \middle| Z_0 = \lfloor bky \rfloor \right] \\ &= \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp(-F_m^{(\varepsilon)}); T_{1/(b\varepsilon)}^{(Y)} < +\infty \right], \end{aligned} \quad (56)$$

где

$$F_m^{(\varepsilon)} = F_m^{(\varepsilon)}(t_1, \lambda_1, \dots, t_m, \lambda_m) = b\varepsilon \sum_{i=1}^m \lambda_i Y\left(\frac{t_i - b\varepsilon}{b\varepsilon}\right).$$

Можно показать, что соотношение (56) выполняется равномерно по y , принадлежащим ограниченному множеству. Из соотношений (54)–(56) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E_{11}(s, x, \varepsilon)}{\mathbf{P}(T > k)} = \int_0^{+\infty} \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp(-F_m^{(\varepsilon)}); T_{1/(b\varepsilon)}^{(Y)} < +\infty \right] e^{-y} dy$$

или, если учесть (3),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x E_{11}(s, x, \varepsilon) = \frac{1}{b\varepsilon} \int_0^{+\infty} \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp(-F_m^{(\varepsilon)}); T_{1/(b\varepsilon)}^{(Y)} < +\infty \right] e^{-y} dy. \quad (57)$$

Ввиду автомодельности процесса Y , при $c > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp\left(-c \sum_{i=1}^m \lambda_i Y\left(\frac{t_i}{c}\right)\right); T_{1/c}^{(Y)} < +\infty \right] \\ &= \mathbf{E}^{(cy)} \left[\exp\left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i)\right); T_1^{(Y)} < +\infty \right], \end{aligned}$$

откуда, полагая $c = b\varepsilon$, находим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp(-F_m^{(\varepsilon)}); T_{1/(b\varepsilon)}^{(Y)} < +\infty \right] \\ &= \mathbf{E}^{(b\varepsilon y)} \left[\exp\left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i - b\varepsilon)\right); T_1^{(Y)} < +\infty \right], \end{aligned}$$

или (см. (12))

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b\varepsilon y} \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp(-F_m^{(\varepsilon)}); T_{1/(b\varepsilon)}^{(Y)} < +\infty \right] \\ &= \mathbf{E}^{(b\varepsilon y)} \left[\exp\left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i - b\varepsilon)\right) \middle| T_1^{(Y)} < +\infty \right]. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1 и непрерывности траекторий процесса $Y^\uparrow$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}^{(b\varepsilon y)} \left[\exp\left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i Y(t_i - b\varepsilon)\right) \middle| T_1^{(Y)} < +\infty \right] \\ &= \mathbf{E} \exp\left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i Y^\uparrow(t_i)\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{b\varepsilon y} \mathbf{E}^{(y)} \left[\exp(-F_m^{(\varepsilon)}); T_{1/(b\varepsilon)}^{(Y)} < +\infty \right] = \mathbf{E} \exp\left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i Y^\uparrow(t_i)\right). \quad (58)$$

Из соотношений (57), (58) находим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} x E_{11}(s, x, \varepsilon) = \mathbf{E} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y^\uparrow(t_i) \right). \quad (59)$$

Из соотношений (52), (53) и (59) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} x E_1(s, x, \varepsilon) = \mathbf{E} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y^\uparrow(t_i) \right). \quad (60)$$

Наконец, из соотношений (48), (50), (51) и (60) вытекает, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathbf{P}(T_x < +\infty) \Phi_m^{(x)}(t_1, \lambda_1, \dots, t_m, \lambda_m) = \mathbf{E} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y^\uparrow(t_i) \right),$$

или (см. (4))

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_m^{(x)}(t_1, \lambda_1, \dots, t_m, \lambda_m) = \mathbf{E} \exp \left(- \sum_{i=1}^m \lambda_i Y^\uparrow(t_i) \right). \quad (61)$$

Соотношение (61) означает, что в теореме 2 доказана сходимость конечномерных распределений.

Рассмотрим для произвольного $x > 0$ процесс $Y_x = \{Y_x(t), t \geq 0\}$, где

$$Y_x(t) = \frac{Z_{\lfloor xt/b \rfloor}}{x}, \quad t \geq 0.$$

Покажем, что для произвольных $u, a > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(w_{Y_x}(\delta; 0, u) \geq a \mid T_x < +\infty) = 0. \quad (62)$$

При доказательстве (62) используются следующие утверждения. Первое аналогично соотношению (29): при фиксированном $u > 0$ и всех положительных a , за исключением не более чем счетного множества,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{P}(w_{Y^\uparrow}(\delta; 0, u) \geq a) = 0. \quad (63)$$

Следующие утверждения связаны с тем, что при фиксированных положительных δ, v, u ($v < u$) функционал $z \mapsto w_z(\delta; v, u)$, $z \in D[0, +\infty)$, является непрерывным в каждой точке $z \in C[0, +\infty)$. Учитывая, что траектории предельного процесса Y в принципе инвариантности Феллера–Линдвалла непрерывны, получаем, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\{w_{Y_x}(\delta; v, u) \mid Z_0 = \lfloor bny \rfloor\} \xrightarrow{D} \{w_Y(\delta; v, u) \mid Y(0) = y\}. \quad (64)$$

Аналогично, по теореме 1 при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\{w_Y(\delta; v, u) \mid Y(0) = \varepsilon, T_1^{(Y)} < +\infty\} \xrightarrow{D} w_{Y^\uparrow}(\delta; v, u). \quad (65)$$

Зафиксируем $u, a > 0$. Дословно повторяя рассуждения, использованные при доказательстве соотношения (61), и учитывая (64), можно показать, что при $v \in (0, u)$

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(w_{Y_x}(\delta; v, u) \geq a \mid T_x < +\infty) \\ \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(b\varepsilon y)} \left(w_Y(\delta; v - b\varepsilon, u - b\varepsilon) \geq a \mid T_1^{(Y)} < +\infty \right) \end{aligned}$$

для всех положительных a , за исключением не более чем счетного множества. Но при достаточно малых ε

$$w_Y(\delta; v - b\varepsilon, u - b\varepsilon) \leq w_Y\left(\delta; \frac{v}{2}, u\right).$$

Откуда, учитывая (65), находим, что

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(w_{Y_x}(\delta; v, u) \geq a \mid T_x < +\infty) \\ \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}^{(b\varepsilon y)} \left(w_Y\left(\delta; \frac{v}{2}, u\right) \geq a \mid T_1^{(Y)} < +\infty \right) \\ = \mathbf{P}\left(w_{Y^\uparrow}\left(\delta; \frac{v}{2}, u\right) \geq a\right) \end{aligned}$$

при всех положительных a , за исключением не более чем счетного множества. Следовательно, применяя (63), получаем, что при каждом $v \in (0, u)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(w_{Y_x}(\delta; v, u) \geq a \mid T_x < +\infty) = 0. \quad (66)$$

Заметим теперь, что при $a \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq v} Y_x(t) > a \mid T_x < +\infty\right) &= \mathbf{P}\left(\frac{bT_{ax}}{x} \leq v \mid T_x < +\infty\right) \\ &\leq \frac{\mathbf{P}(T_{ax} < +\infty)}{\mathbf{P}(T_x < +\infty)} \mathbf{P}\left(\frac{bT_{ax}}{x} \leq v \mid T_{ax} < +\infty\right). \end{aligned} \quad (67)$$

В работе [1] доказано, что если выполнено условие (1), то при $x \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \frac{bT_x}{x} \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \tau_1, \quad (68)$$

где τ_1 — некоторая положительная случайная величина. Применяя к (67) соотношения (4) и (68), находим, что

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq v} Y_x(t) > a \mid T_x < +\infty\right) \leq \frac{1}{a} \mathbf{P}\left(\tau_1 \leq \frac{v}{a}\right),$$

поэтому

$$\lim_{v \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq v} Y_x(t) > a \mid T_x < +\infty\right) = 0. \quad (69)$$

Из соотношений (30), (66) и (69) следует требуемое утверждение (62). Как хорошо известно, из сходимости конечномерных распределений и соотношения (62) следует утверждение теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев В. И.* Процесс Гальтона–Ватсона при условии достижения высокого уровня. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 588–594.
2. *Lindvall T.* Convergence of critical Galton–Watson branching processes. — J. Appl. Probab., 1972, v. 9, p. 445–450.
3. *Афанасьев В. И.* Броуновский прыжок в высоту. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 2, с. 209–225.
4. *Lindvall T.* On the maximum of a branching process. — Scand. J. Statist., 1976, v. 3, p. 209–214.
5. *Pakes A. G.* A limit theorem for the maxima of the para-critical simple branching process. — Adv. Appl. Probab., 1998, v. 30, № 3, p. 740–756.

Поступила в редакцию
14.XII.2009