Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гущин, Двойственная характеристика цены в задаче максимизации робастной полезности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 4, 680–704

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4278>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:37:37

© 2010 г.

ГУЩИН А. А.*

ДВОЙСТВЕННАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЦЕНЫ В ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ РОБАСТНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ¹⁾

Рассматривается задача максимизации робастной полезности от терминального капитала в случае, когда рынок характеризуется только множеством терминальных капиталов, отвечающих всем допустимым стратегиям инвестора. Основное внимание уделено случаю, когда функция полезности конечна на полупрямой. Доказана минимаксная теорема, сводящая робастную постановку к стандартной, приведена двойственная характеристика цены в исходной задаче и доказаны те свойства решений и функций цены для исходной и двойственной задач, которые не требуют дополнительных предположений типа условий на асимптотическую эластичность функции полезности.

Ключевые слова и фразы: двойственная задача, f -дивергенция, максимизация полезности, робастная полезность.

1. Введение. В этой статье под задачей максимизации робастной полезности (со штрафной функцией) мы понимаем задачу максимизации функционала

$$\xi \rightsquigarrow \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})], \quad \xi \in \mathcal{A}, \quad (1.1)$$

по некоторому выпуклому множеству $\mathcal{A}$ случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где функция полезности U определена на $\mathbf{R}$ и принимает значения в $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, вогнута и монотонно не убывает, $\mathcal{Q}$ — некоторое выпуклое множество «субъективных» вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F})$, штрафная функция γ выпукла; более точные предположения сформулированы в разд. 2. Здесь и далее математическое ожидание $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}$ считается равным $-\infty$, если оно не определено, т.е. $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\eta \wedge n)$. Если $\gamma(\mathbf{Q}) \equiv 0$ на $\mathcal{Q}$, говорят также о максимизации когерентной робастной полезности (термин «когерентная» происходит из терминологии, принятой в теории выпуклых мер риска). Под стандартной задачей максимизации полезности будем понимать случай, когда $\mathcal{Q} = \{\mathbf{P}\}$ или множество $\mathcal{Q}$ состоит из одной меры.

*Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: gushchin@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-01-00944, 08-01-00740 и 08-01-91205).

Элементы множества $\mathcal{A}$ можно интерпретировать как капитал инвестора в заключительный момент операций на финансовом рынке (терминальный капитал), тогда $\mathcal{A}$ интерпретируется как множество терминальных капиталов инвестора, отвечающих его всевозможным (допустимым) стратегиям, а о задаче максимизации функционала (1.1) говорят как о задаче максимизации ожидаемой полезности от терминального капитала. Другие интерпретации задачи также возможны, хотя наши предположения ориентированы, в первую очередь, именно на указанную ситуацию. При обзоре литературы ниже мы упоминаем также статьи, в которых рассматриваются более общие задачи, включающие минимизацию полезности как от терминального капитала, так и, скажем, от процесса потребления.

Функционал (1.1) отражает предпочтения инвестора, не склонного к риску, происходящему как от случайности (за что отвечает вогнутость U), так и от неопределенности вероятностной модели, действующей на рынке (взятие нижней грани по $\mathcal{Q}$ означает, что инвестор оценивает стратегию по наихудшему из всех субъективных вероятностных сценариев $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$). Аксиоматическое описание предпочтений инвестора, приводящих к численному представлению этих предпочтений в виде функционала типа (1.1), рассматривалось, в частности, в работах [43] (стандартная задача), [12] (когерентная робастная полезность), [24] (робастная полезность со штрафной функцией); см. также недавнюю работу [10].

Настоящая статья является первой из двух статей, в которых основное внимание уделяется задаче, *двойственной* к задаче максимизации робастной полезности от терминального капитала. Цель этих статей — доказать ряд ключевых утверждений теории при как можно более слабых предположениях. В данной статье мы доказываем минимаксную теорему, позволяющую в определенном смысле свести робастную постановку к стандартной, приводим двойственную характеристику цены в исходной задаче и доказываем те свойства решений и функций цены для исходной и двойственной задач, которые не требуют дополнительных предположений типа условий на асимптотическую эластичность функции полезности. В частности, условия существования решения в исходной задаче не изучаются. Модель финансового рынка представлена в самой общей форме, а именно, основным объектом является множество $\mathcal{A}$ терминальных капиталов инвестора, отвечающее всем его возможным стратегиям. Соответственно, в терминах этого множества (без дальнейшей структуризации) даются все ответы. Динамические модели рынка будут рассмотрены во второй статье, где, в частности, будут указаны условия, при которых двойственную задачу можно поставить в терминах супермартингалов плотностей или мер.

Для марковских моделей финансового рынка задача максимизации

полезности может быть решена методами динамического программирования (см., например, классические работы Р. Мертон [25], [26] и П. Самуэльсона [32]). Альтернативой являются двойственные методы выпуклого анализа, которые не требуют почти никаких предположений о структуре модели. Они предлагают решить сначала вспомогательную (двойственную) задачу, что позволяет охарактеризовать решение исходной задачи и найти ее цену. Обратной стороной этих методов является то обстоятельство, что результаты о решении исходной задачи носят характер утверждений типа существования и единственности и не позволяют, вообще говоря, найти конкретное решение (что, впрочем, реально только при специальном выборе модели и других атрибутов задачи). Отметим, что для робастной задачи двойственный подход имеет дополнительное преимущество: исходная задача есть задача минимаксного типа, т.е. задача на поиск седловой точки, в то время как двойственная задача есть (вообще говоря, более простая) задача минимизации. В некоторых из упомянутых ниже работ опять же для марковских моделей рынка уже двойственная задача решалась методами динамического программирования, что позволило решить и исходную задачу.

Применение двойственных методов в задачах стохастического управления инициировано в работе Ж.-М. Бисмута [3], а в задаче максимизации полезности — в работе С. Плиски [29]. Наиболее значимый вклад в развитие двойственных методов был внесен в работе Д. Крамкова и В. Шахермайера [22], где можно найти ссылки на предшествующую литературу. В частности, в этой статье впервые было отмечено и подтверждено контрпримерами, что в двойственной задаче недостаточно ограничиться вероятностными мерами. Также ими были разграничены на две группы ключевые утверждения теории: в одну группу вошли утверждения, справедливые при общих предположениях, во вторую — утверждения, справедливые при дополнительных предположениях, например, при условии на асимптотическую эластичность функции полезности. Как отмечалось выше, мы в данной работе ограничиваемся только утверждениями из первой группы.

Из большого числа последующих публикаций по стандартной задаче максимизации полезности отметим работы [1], [2], [4], [8], [9], [13], [21], [23], [28], [33], [34], [46], [48], наиболее близко примыкающие к методам и результатам нашего исследования; даже относительно полный перечень публикаций привести в журнальной статье невозможно. Задачи максимизации когерентной робастной полезности изучались, например, в [6], [11], [14], [16], [27], [30], [35], [36], [39], [41], [42] и обзорной статье [37]. Наконец, задача максимизации робастной полезности со штрафной функцией рассматривалась в работах [17], [38], [44] и др., см. также обзорную статью [40].

Задача максимизация полезности существенно различна в следую-

щих двух случаях: 1) функция полезности U конечна на полупрямой $(a, +\infty)$ и равна $-\infty$ на $(-\infty, a)$; 2) функция полезности U конечна всюду на $\mathbf{R}$. В основной части статьи мы имеем дело с первым случаем, без ограничения общности полагая, как обычно, что $a = 0$. Второй случай несколько проще в предположении, что каждый элемент $\mathcal{A}$ ограничен снизу (см. п. 2.5). Отказ от этого предположения приводит к существенно более сложной задаче. В этом случае результаты, аналогичные нашим и по формулировкам, и по схеме доказательств, недавно были получены И. С. Морозовым [27].

Остановимся на наиболее характерных особенностях настоящего исследования.

Мы рассматриваем общую модель рынка, характеризующую четверкой $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathcal{A})$, в данной статье и общую динамическую модель рынка (не требующую введения процессов цен базовых активов, а характеризующую множеством процессов капитала инвестора, отвечающих его всевозможным допустимым стратегиям) в последующей статье, стараясь работать при как можно более общих предположениях. Это позволяет получать, в качестве следствий общих результатов, результаты для моделей рынка с дискретным и непрерывным временем, конечным и бесконечным временным горизонтом, с конечным и бесконечным числом базовых активов, с ограничениями на портфель и без таковых и т.д.

От функции полезности U требуются только те свойства, которые будут необходимы для доказательства данного факта. Так, для доказательства минимаксной теоремы и большинства результатов о двойственности требуются только предположения, которые уже были упомянуты выше, а такие стандартные предположения, как дифференцируемость, строгая вогнутость и условия Инада, не требуются. А выполнение, скажем, условия Инада в нуле для U требуется тогда, когда это необходимо, например, при доказательстве условия Инада в нуле для функции ожидаемой полезности u . Таким образом, даже для стандартной задачи максимизации полезности наша основная теорема 2.2 является обобщением своей предшественницы, теоремы 3.1 в [22]. Представляется, что наш подход делает более понятным взаимосвязь условий и их следствий. Например, стандартные утверждения о поведении функции v на бесконечности и функции u в нуле требуют разных условий, см. пункты (vii) и (viii) теоремы 2.2.

Мы не налагаем априори никаких условий типа отсутствия арбитража. Конечно, частью фольклора является утверждение о том, что арбитраж делает задачу максимизации полезности тривиальной, см. обсуждение этого вопроса в статье [20]. Условия «тривиальности» задачи максимизации полезности в рассматриваемой нами общей модели сформулированы в п. 2.3.

Полученная нами характеристика цены в исходной задаче через

функцию цены в двойственной задаче является полной. Действительно, обычным предположением (в стандартной задаче) является конечность функции ожидаемой полезности u в одной точке (и, стало быть, всюду), тогда u выражается через функцию цены v двойственной задачи. Естественно поставить вопрос: а можем ли мы, зная v , определить, является ли u всюду конечной или всюду бесконечной? В робастном случае условия, при которых u выражается через v , носят еще более сложный характер. Мы доказываем, что (только при основных предположениях) соотношения двойственности между u и v всегда имеют место.

В доказательствах мы чаще используем выпуклый анализ в противовес вероятностным методам (что не является самоцелью, а, на наш взгляд, упрощает доказательства). В частности, активно используются конечно-аддитивные функции множества (что не является редкостью), понятие f -дивергенции (что тоже встречалось) и новый подход к ее определению, предложенный в [15] и позволяющий распространить это определение на конечно-аддитивные функции множества, что является новым (см. также дальнейшее развитие этой идеи в [27]). Следует подчеркнуть, что в основные результаты конечно-аддитивные функции множества не входят.

Наконец, еще одна характерная особенность наших доказательств состоит в том, что, по существу, минимаксная теорема и двойственная характеристика доказываются одновременно. Схема доказательств, скажем, в работах [41] и [38] такова, что доказывается минимаксная теорема, сводящая робастную постановку к стандартной; двойственная же характеристика для стандартной задачи была получена в [22] также с использованием минимаксной теоремы.

Всюду в работе предполагается заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Через $L^0 = L^0(\mathcal{F}, \mathbf{P})$ обозначается пространство классов эквивалентности (относительно равенства $\mathbf{P}$ -п.н.) $\mathcal{F}$ -измеримых случайных величин с действительными значениями, наделенное топологией сходимости по вероятности. Подчеркнем, что предел сходящейся в L^0 последовательности не может принимать бесконечных значений. Неравенства типа $\xi \leq f(\eta)$ для элементов $\xi, \eta \in L^0$ понимаются как неравенства $\mathbf{P}$ -п.н. Банаховы пространства $L^1 = L^1(\mathcal{F}, \mathbf{P})$ и $L^\infty = L^\infty(\mathcal{F}, \mathbf{P})$ понимаются в обычном смысле. Обозначим $\mathbf{ba} = \mathbf{ba}(\mathcal{F}, \mathbf{P})$ пространство таких ограниченных конечно-аддитивных функций множества $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}$, что

$$A \in \mathcal{F}, \mathbf{P}(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0, \quad (1.2)$$

с нормой полной вариации. Хорошо известно, что $\mathbf{ba}$ является сопряженным к пространству L^∞ , причем двойственность задается соотношением

$$\langle \xi, \mu \rangle := \mu(\xi) := \int_{\Omega} \xi d\mu, \quad \mu \in \mathbf{ba}, \quad \xi \in L^\infty.$$

Подпространство $\mathfrak{ba}$, состоящее из счетно-аддитивных мер, обозначается $\mathfrak{ca}$. Для $\mu \in \mathfrak{ba}$ существует единственное разложение $\mu = \mu^r + \mu^s$ на счетно-аддитивную меру $\mu^r \in \mathfrak{ca}$ и чисто конечно-аддитивную функцию множества $\mu^s \in \mathfrak{ba}$. Пространство $\mathfrak{ca}$ естественно отождествляется с L^1 посредством соотношения $L^1 \ni \xi \rightsquigarrow \xi \cdot \mathbf{P} \in \mathfrak{ca}$, где $\xi \cdot \mathbf{P}$ есть мера с плотностью ξ относительно $\mathbf{P}$.

Нижний индекс $+$ у введенных функциональных пространств указывает на конус неотрицательных элементов (элементов с неотрицательными значениями).

Множество всех вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F})$, абсолютно непрерывных относительно $\mathbf{P}$, обозначается $\mathfrak{P}$.

Упомянувшееся выше определение f -дивергенции $\mathcal{J}_f(\mu, \nu)$ для $\mu, \nu \in \mathfrak{ba}$ и ее свойства для удобства читателя приведены в приложении В (п. 4.2). В приложении А (п. 4.1) формулируются некоторые результаты из выпуклого анализа, используемые в статье. Здесь же мы поясним только те обозначения и определения, которые применяются при формулировке основных результатов. Для функции $f: X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ эффективное множество $\text{dom } f$ определяется как

$$\text{dom } f := \{x \in X: f(x) < +\infty\}.$$

Использование символа $\min$ вместо $\inf$ означает, что нижняя грань достигается. Индикаторные функции $\mathbf{1}_A$ и δ_A множества $A \subseteq X$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A, \end{cases} \quad \delta_A(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in A, \\ +\infty, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

2. Основные результаты.

2.1. Основные предположения. В этом пункте формулируются предположения о функции полезности, штрафной функции и множестве терминальных капиталов, при которых доказаны основные результаты работы, и вводятся необходимые обозначения.

Предположение 2.1. *Функция полезности $U: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ — монотонно неубывающая вогнутая функция, $U(x) = -\infty$ при $x < 0$ и $U(x) \in \mathbf{R}$ при $x > 0$.*

Ясно, что функция U непрерывна на $(0, +\infty)$. Непрерывность справа функции U в точке 0 (что эквивалентно полунепрерывности сверху функции U) не предполагается. Положим

$$V(y) = \sup_{x>0} [U(x) - xy], \quad y \in \mathbf{R}. \quad (2.1)$$

Иначе говоря, V есть преобразование Фенхеля функции $-U(-\cdot)$. Поэтому $V: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция, а по теореме Фенхеля–Моро

$$\inf_{y \in \mathbf{R}} [V(y) + xy] = \tilde{U}(x) := \begin{cases} U(x), & \text{если } x \neq 0; \\ \lim_{x \downarrow 0} U(x), & \text{если } x = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Далее, в силу предположения 2.1 $\text{dom } V \subseteq \mathbf{R}_+$, V монотонно не возрастает и

$$\lim_{y \uparrow +\infty} \frac{V(y)}{y} = 0 \quad (2.3)$$

(см., например, [15, разд. 4]). В отличие от классических условий на функцию полезности, $V(y)$ может быть конечна только при больших значениях y и не обязана быть конечной при всех $y > 0$.

Нам будет удобно считать штрафную функцию γ заданной на пространстве $\mathbf{ba}$ с $\text{dom } \gamma = \mathcal{Q}$. При этом целесообразно в определении функционала робастной полезности (1.1) брать инфимум по-прежнему по множеству $\mathcal{Q}$, чтобы избежать неопределенности вида $(-\infty) + (+\infty)$.

Предположение 2.2. Штрафная функция $\gamma: \mathbf{ba} \rightarrow [0, +\infty]$ — собственная выпуклая функция, причем $\text{dom } \gamma =: \mathcal{Q} \subseteq \mathfrak{P}$, и множество

$$\left\{ \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}: \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}, \gamma(\mathbf{Q}) \leq c \right\} \quad (2.4)$$

замкнуто в L^1 и равномерно интегрируемо по отношению к $\mathbf{P}$ для любого $c \geq 0$.

Поскольку множество (2.4) выпукло, его замкнутость в L^1 в сочетании с равномерной интегрируемостью эквивалентна его компактности в слабой топологии $\sigma(L^1, L^\infty)$ и, следовательно, компактности множества $\{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}: \gamma(\mathbf{Q}) \leq c\}$ в топологии $\sigma(\mathbf{ca}, L^\infty)$ и *-слабой топологии $\sigma(\mathbf{ba}, L^\infty)$. В частности, γ полунепрерывна снизу в топологии $\sigma(\mathbf{ba}, L^\infty)$.

Если штрафная функция γ удовлетворяет предположению 2.2 и зафиксирована мера $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$, то функция

$$\gamma_{\mathbf{Q}} := \gamma + \delta_{\{\mathbf{Q}\}} \quad (2.5)$$

тоже, очевидно, удовлетворяет предположению 2.2.

Приведем примеры штрафных функций, удовлетворяющих предположению 2.2. Пусть $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция с $\text{dom } f \subseteq \mathbf{R}_+$, удовлетворяющая (4.3), $f(1) \geq 0$. Тогда предположение 2.2 будет выполнено, если

$$\gamma(\mathbf{Q}) := \begin{cases} \mathcal{J}_f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), & \text{если } \mathbf{Q} \in \mathfrak{P}; \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Еще один пример дает $\gamma := \delta_{\mathcal{Q}}$, где $\mathcal{Q} = \{\mathbf{Q} \in \mathfrak{P}: \mathcal{J}_f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \leq c\}$, $c \geq f(1)$. Другие примеры можно найти, например, в работе [38].

Наши условия на штрафную функцию γ хорошо известны в теории мер риска. А именно, функция $\rho: L^\infty \rightarrow \mathbf{R}$ является непрерывной снизу выпуклой мерой риска тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\rho(X) = -\min_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X + \gamma(\mathbf{Q})], \quad X \in L^\infty,$$

с функцией γ , удовлетворяющей предположению 2.2 (см. [19, теорема 5.2]).

Предположение 2.3. Множество терминальных капиталов $\mathcal{A}$ — выпуклое подмножество L^0 , содержащее случайную величину $\xi_0 \geq \kappa$ для некоторого числа $\kappa > 0$.

По множеству $\mathcal{A}$ построим еще ряд множеств, играющих в дальнейшем существенную роль:

$$\mathcal{A}_+ := \mathcal{A} \cap L_+^0, \quad \mathcal{C} := (\mathcal{A} - L_+^0) \cap L^\infty, \quad \mathcal{C}_+ := \mathcal{C} \cap L_+^0,$$

$$\overline{\mathcal{C}}_+ \text{ — замыкание } \mathcal{C}_+ \text{ в } L^0,$$

$$\mathcal{D} := \{\eta \in L_+^0: \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta \xi \leq 1 \text{ для всех } \xi \in \mathcal{A}_+\}. \quad (2.6)$$

Ясно, что $\mathcal{D} \subseteq L_+^1$, так как $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta \leq \kappa^{-1}$ для любой $\eta \in \mathcal{D}$. Далее, заметим, что множества $\mathcal{C}_+$, $\overline{\mathcal{C}}_+$, $\mathcal{D}$ определяются множеством $\mathcal{A}_+$, в (2.6) множество $\mathcal{A}_+$ можно заменить на $\mathcal{C}_+$ и, по лемме Фату, на $\overline{\mathcal{C}}_+$. Множество $\overline{\mathcal{C}}_+$ выпукло, телесно ($0 \leq \eta \leq \xi$, $\xi \in \overline{\mathcal{C}}_+ \Rightarrow \eta \in \overline{\mathcal{C}}_+$) и замкнуто относительно сходимости по $\mathbf{P}$ -вероятности. Поэтому по биполярной теореме Бранната–Шахермайера [5]

$$\overline{\mathcal{C}}_+ = \{\xi \in L_+^0: \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta \xi \leq 1 \text{ для всех } \eta \in \mathcal{D}\}. \quad (2.7)$$

2.2. Минимаксная теорема.

Теорема 2.1. Пусть выполнены предположения 2.1–2.3. Тогда

$$\sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] = \min_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} \sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})]. \quad (2.8)$$

Следует отметить отличие нашей формулировки от минимаксных теорем для робастной задачи, доказанных, скажем, в работах [41] и [38], где и в левой, и в правой частях минимаксного соотношения стоит верхняя грань по множеству $\mathcal{A}$, а не $\mathcal{A}_+$. Если, как предполагается в этих работах, существует такая мера $\mathbf{Q}_0 \in \mathcal{Q}$, что $\mathbf{Q}_0 \sim \mathbf{P}$, то замена $\mathcal{A}_+$ на $\mathcal{A}$, очевидно, не меняет левую часть (2.8), но может увеличить правую (если только не все меры из $\mathcal{Q}$ эквивалентны $\mathbf{P}$). Это объясняет, почему минимаксные теоремы в упомянутых работах доказаны при более сильных предположениях. Нам представляется более естественной наша постановка задачи.

2.3. Максимизация полезности и арбитраж. Пусть $U(\infty) := \sup_{x>0} U(x)$. Очевидно, что для монотонно неубывающей U

$$\sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) \leq U(\infty) \quad (2.9)$$

и поэтому

$$\sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] \leq U(\infty) + \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} \gamma(\mathbf{Q}). \quad (2.10)$$

Достижимость равенства в (2.9) или в (2.10) делает задачу максимизации полезности в определенном смысле тривиальной и говорит о наличии той или иной формы арбитража. Легко видеть, что ситуация с равенством разнится в зависимости от того, ограничена сверху U или нет. Мы приведем два предложения об условиях достижимости равенства в (2.9); условия равенства в (2.10) вытекают из этих предложений и теоремы 2.1. Предполагается, что $\mathbf{Q} \in \mathfrak{P}$.

Предложение 2.1. Пусть выполнено предположение 2.3. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) = \infty$ для любой неограниченной сверху функции полезности U , удовлетворяющей предположению 2.1;
- (ii) семейство $\mathcal{A}_+$ неограничено по $\mathbf{Q}$ -вероятности, т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} \mathbf{Q}(\xi > N) > 0.$$

З а м е ч а н и е 2.1 (ср. с предложением 4.19 в [20]). Пусть выполнено условие (ii) предложения 2.1. Как и в [20], несложно доказать следующее. Если функция полезности U неограничена сверху, то верхняя грань в (2.9) либо не достигается, либо достигается на бесконечном множестве. Если функция полезности U ограничена сверху и строго возрастает, то верхняя грань в (2.9) не достигается.

Предложение 2.2. Пусть выполнено предположение 2.3. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) = U(\infty)$ для любой ограниченной сверху функции полезности U , удовлетворяющей предположению 2.1;
- (ii) найдется такая ограниченная сверху функция полезности U , не равная тождественно константе на $(0, +\infty)$ и удовлетворяющая предположению 2.1, что $\sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\lambda \xi) = U(\infty)$ для любого $\lambda > 0$;
- (iii) $\xi \mathbf{1}_{\{\lambda \mathbf{Q}/\lambda \mathbf{P} > 0\}} \in \overline{\mathcal{C}}_+$ для любой случайной величины $\xi \in L_+^0$.

Забегая вперед, утверждение (ii) можно эквивалентно переформулировать так: для некоторой ограниченной сверху функции полезности U , не равной тождественно константе на $(0, +\infty)$, $u(x) = U(\infty)$ для всех $x > 0$, где функция u задается соотношением (2.11) с $\gamma = \delta_{\{\mathbf{Q}\}}$.

2.4. Двойственная характеристика. Пусть множество $\mathcal{A}$ удовлетворяет предположению 2.3. Чтобы упростить обозначения, будем считать, что $\mathcal{A} \subseteq L_+^0$; в общем случае, надо везде заменить $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}_+$. Напомним, что множество $\mathcal{D}$ определено в (2.6). Для $x > 0$ и $y \geq 0$ положим

$$\mathcal{A}(x) := x\mathcal{A}, \quad \mathcal{D}(y) := y\mathcal{D}.$$

Определим прямую и двойственную экстремальные задачи:

$$u(x) := \sup_{\xi \in \mathcal{A}(x)} \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})], \quad x > 0, \quad (2.11)$$

$$v(y) := \inf_{\eta \in \mathcal{D}(y), \mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V\left(\frac{\eta}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}}\right) + \gamma(\mathbf{Q}) \right], \quad y \geq 0. \quad (2.12)$$

Напомним определение субдифференциала $\partial V(y)$ функции V в точке $y \geq 0$:

$$\partial V(y) := \{z \in \mathbf{R}: V(t) \geq V(y) + z(t - y) \text{ для всех } t \geq 0\},$$

если $V(y) < +\infty$, и $\partial V(y) := \emptyset$ в противном случае. Аналогично, для $x \geq 0$

$$\partial U(x) := \{z \in \mathbf{R}: U(t) \leq U(x) + z(t - x) \text{ для всех } t \geq 0\}.$$

Хорошо известно, что для $x, y \geq 0$

$$U(x) = V(y) + xy \Leftrightarrow y \in \partial U(x) \Leftrightarrow x \in -\partial V(y), \quad (2.13)$$

если $x > 0$ или U непрерывна справа в нуле; в противном случае имеет место только первая эквивалентность. Левая производная функции U в точке $x > 0$ обозначается $U'_-(x)$.

Теорема 2.2. Пусть выполнены предположения 2.1–2.3, $\mathcal{A} \subseteq L_+^0$, а функции u, v заданы соотношениями (2.11)–(2.12). Тогда имеют место следующие утверждения.

(i) Функция $u(x)$, $x > 0$, принимает значения в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, является монотонно неубывающей и вогнутой.

(ii) Функция $v(y)$, $y \geq 0$, принимает значения в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, является выпуклой, полунепрерывной снизу и монотонно невозрастающей. Инфимум в (2.12) достигается.

(iii) Если $v(y) = +\infty$ для всех $y \geq 0$, то $u(x) = +\infty$ для всех $x > 0$. Если $v(y) < +\infty$ для некоторого $y \geq 0$, то $u(x) \in \mathbf{R}$ при $x > 0$.

(iv) Имеют место равенства

$$u(x) = \min_{y \geq 0} [v(y) + xy], \quad x > 0, \quad (2.14)$$

$$v(y) = \sup_{x > 0} [u(x) - xy], \quad y \geq 0. \quad (2.15)$$

(v) Зафиксируем $x > 0$. Если минимум в (2.14) достигается на y^* , а минимум в (2.12) при $y = y^*$ — на паре $(\eta^*, \mathbf{Q}^*) \in \mathcal{D}(y^*) \times \mathcal{Q}$, то

$$u(x) = \sup_{\xi \in \mathcal{A}(x)} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q}^*)]. \quad (2.16)$$

Наоборот, если выполнено (2.16) для $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{Q}$, то найдутся такие $y^* \in \mathbf{R}_+$ и $\eta^* \in \mathcal{D}(y^*)$, что минимум в (2.14) достигается на y^* , а минимум в (2.12) при $y = y^*$ — на паре $(\eta^*, \mathbf{Q}^*)$.

(vi) Зафиксируем $x > 0$. Пусть $u(x) < \infty$, минимум в (2.14) достигается на y^* , а минимум в (2.12) при $y = y^*$ — на паре $(\eta^*, \mathbf{Q}^*) \in \mathcal{D}(y) \times \mathcal{Q}$. Тогда существование решения y задачи (2.11), т.е. такой случайной величины $\xi^* \in \mathcal{A}(x)$, что $u(x) = \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi^*) + \gamma(\mathbf{Q})]$, влечет соотношения

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \xi^* \eta^* = xy^* \quad (2.17)$$

и $\mathbf{P}$ -п.н.

$$\frac{\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}} \in \partial U(\xi^*) \text{ на } \left\{ \frac{d\mathbf{Q}^*}{d\mathbf{P}} > 0 \right\} \quad \text{и} \quad \xi^* \eta^* = 0 \text{ на } \left\{ \frac{d\mathbf{Q}^*}{d\mathbf{P}} = 0 \right\}. \quad (2.18)$$

Обратное утверждение верно частично: если (2.17) и (2.18) выполнены для некоторой $\xi^* \in \mathcal{A}(x)$, то ξ^* есть решение задачи (2.16), т.е. $u(x) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} U(\xi^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$.

(vii) Если $v \neq +\infty$, то

$$\lim_{y \uparrow +\infty} \frac{v(y)}{y} = 0.$$

(viii) Предположим, что функция U удовлетворяет условию Инада в нуле, т.е.

$$\lim_{x \downarrow 0} U'_-(x) = +\infty. \quad (2.19)$$

Предположим дополнительно, что $u(x) < \infty$ (в случае $U(\infty) = +\infty$) и хотя бы для одной меры $\mathbf{Q} \in \arg \min \gamma$ не выполнены утверждения (i)–(iii) предложения 2.2 (в случае $U(\infty) < +\infty$). Тогда u удовлетворяет условию Инада в нуле.

(ix) Предположим, что функция U дифференцируема на $(0, +\infty)$ и удовлетворяет условию Инада в нуле, а функция γ строго выпукла на $\mathcal{Q}$. Если $v(y) < +\infty$ для заданного $y > 0$ и минимум в (2.12) достигается на парах $(\eta_1, \mathbf{Q}_1)$ и $(\eta_2, \mathbf{Q}_2)$, то $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$ и $\eta_1 = \eta_2$ $\mathbf{Q}_1$ -п.н. Если функция u конечна, то она дифференцируема на $(0, +\infty)$. Только в случае ограниченности U предположим дополнительно, что для меры $\mathbf{Q}$, на которой достигается минимум функции γ , не выполнены утверждения (i)–(iii) предложения 2.2. Тогда v строго выпукла на $\{v < \infty\}$.

Как отмечалось во введении, данная теорема является обобщением теоремы 3.1 в [22], относящейся к стандартной задаче максимизации полезности.

2.5. Случай всюду конечной функции полезности. Мы вкратце остановимся на случае, когда функция полезности конечна на всей числовой прямой, т.е. $U: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — монотонно неубывающая вогнутая функция. Тогда, незначительно меняя доказательства и даже упрощая их, можно получить аналогичные результаты в предположении, что $\mathcal{A}$ — непустое выпуклое подмножество L^0 и каждая $\xi \in \mathcal{A}$ ограничена снизу (вместо предположения 2.3); предположение 2.2 остается в прежнем виде.

А именно, сохраняется минимаксная теорема:

$$\sup_{\xi \in \mathcal{A}} \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] = \min_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} \sup_{\xi \in \mathcal{A}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})].$$

Далее, зададим функцию V соотношением

$$V(y) = \sup_{x \in \mathbf{R}} [U(x) - xy], \quad y \in \mathbf{R}. \quad (2.20)$$

По-прежнему, $V: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция, $\text{dom } V \subseteq \mathbf{R}_+$,

$$\inf_{y \in \mathbf{R}} [V(y) + xy] = U(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

но V уже не будет невозрастающей функцией и

$$\lim_{y \uparrow +\infty} \frac{V(y)}{y} = +\infty. \quad (2.21)$$

Для формулировки аналога теоремы 2.2 в рассматриваемом случае естественно положить $\mathcal{A}(x) := x + \mathcal{A}$,

$$u(x) := \sup_{\xi \in \mathcal{A}(x)} \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})], \quad x \in \mathbf{R},$$

и двойственную задачу определить как

$$v(y) := \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}, \mathbf{Q}' \in \mathfrak{P}, \mathbf{Q}' \ll \mathbf{Q}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V\left(y \frac{d\mathbf{Q}'}{d\mathbf{Q}}\right) + y \sup_{\xi \in \mathcal{A}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}'} \xi + \gamma(\mathbf{Q}) \right], \quad y \geq 0. \quad (2.22)$$

Выражение упрощается, если дополнительно предположить, что $\mathcal{A}$ — конус.

Сформулируем теперь аналоги первых четырех утверждений теоремы 2.2. При сделанных предположениях функция $u(x)$, $x \in \mathbf{R}$, принимает значения в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, является монотонно неубывающей и вогнутой, а функция $v(y)$, $y \geq 0$, принимает значения в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, является выпуклой и полунепрерывной снизу. Инфимум в (2.22) достигается (ср. со следствием 2 в [15]).

Далее, имеют место равенства

$$\begin{aligned} u(x) &= \min_{y \geq 0} [v(y) + xy], & x \in \mathbf{R}, \\ v(y) &= \sup_{x \in \mathbf{R}} [u(x) - xy], & y \geq 0. \end{aligned}$$

В частности, если $v(y) = +\infty$ для всех $y \geq 0$, то $u(x) = +\infty$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Если $v(y) < +\infty$ для некоторого $y \geq 0$, то $u(x) \in \mathbf{R}$ при $x \in \mathbf{R}$.

Следует, однако, отметить, что для функции полезности, конечной всюду, предположение об ограниченности снизу элементов $\mathcal{A}$ не является необходимым. Как уже отмечалось во введении, отказ от этого предположения значительно усложняет задачу и требует, при сохранении схемы рассуждений, значительных дополнительных усилий (см. [27]).

3. Доказательства.

Лемма 3.1. Пусть выполнены предположения 2.1–2.3, $\mathcal{A} \subseteq L^\infty$ и функция U непрерывна справа в нуле. Тогда

$$\sup_{\xi \in \mathcal{A}, U(\xi) \in L^\infty} \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] = \min_{\mu \in \mathbf{ba}_+, \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathcal{J}_V(\mu, \mathbf{Q}) + \sup_{\xi \in \mathcal{A}} \mu(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})]. \quad (3.1)$$

Доказательство. Определим функции φ и ψ на $L^\infty \times L^\infty$ со значениями в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ соотношениями

$$\varphi(\xi, \eta) := \delta_{\{(\xi, \eta): \eta \leq U(-\xi)\}}, \quad \psi(\xi, \eta) := \delta_{\mathcal{A}}(\xi) + \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \eta - \gamma(\mathbf{Q})].$$

Пусть $\tilde{u}$ обозначает левую часть (3.1). Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} -\tilde{u} &= \inf_{\xi \in \mathcal{A}, U(\xi) \in L^\infty} \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [-\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) - \gamma(\mathbf{Q})] \\ &\stackrel{(*)}{=} \inf_{\xi \in \mathcal{A}, \eta \in L^\infty, \eta \geq -U(\xi)} \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \eta - \gamma(\mathbf{Q})] \\ &= \inf_{(\xi, \eta) \in L^\infty \times L^\infty} [\varphi(-\xi, -\eta) + \psi(\xi, \eta)], \end{aligned}$$

где равенство, помеченное (*), использует тот факт, что для $\xi \in L^\infty$ случайная величина $-U(\xi)$ всегда ограничена снизу константой.

Ясно, что φ и ψ — выпуклые функции, $\text{dom } \psi = \mathcal{A} \times L^\infty$. Возьмем $\varepsilon \in (0, \varkappa)$. Тогда случайные величины $|U(\xi)|$, где $\xi \in L^\infty$, $\|\xi - \xi_0\|_{L^\infty} < \varepsilon$, равномерно ограничены, скажем, числом b . Если взять $\eta_0 := b + \varepsilon$, то φ будет непрерывной по норме в точке $(-\xi_0, -\eta_0)$. Поэтому применима теорема двойственности Фенхеля–Рокафеллара (см. п. 4.1), согласно которой

$$\tilde{u} = \min_{\mu, \nu \in \mathbf{ba}} [\varphi^*(\mu, \nu) + \psi^*(\mu, \nu)].$$

Согласно [15] (см. п. 4.2 ниже), $\varphi^*(\mu, \nu) = \mathcal{J}_V(\mu, \nu)$ и $\text{dom } \varphi^* \subseteq \mathfrak{ba}_+ \times \mathfrak{ba}_+$. Поскольку второе слагаемое в определении ψ есть преобразование Фенхеля выпуклой и полунепрерывной снизу (в $*$ -слабой топологии) функции $\gamma: \mathfrak{ba} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, имеем $\psi^*(\mu, \nu) = \sup_{\xi \in \mathcal{A}} \mu(\xi) + \gamma(\nu)$. Объединяя сказанное, приходим к равенству (3.1). Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть выполнены предположения 2.1–2.3. Тогда

$$\sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] \quad (3.2)$$

$$= \min_{\mu \in \mathfrak{ba}_+, \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathcal{J}_V(\mu, \mathbf{Q}) + \sup_{\xi \in \mathcal{C}} \mu(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] \quad (3.3)$$

$$= \min_{\mu \in \mathfrak{ba}_+, \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathcal{J}_V(\mu, \mathbf{Q}) + \sup_{\xi \in \mathcal{C}_+} \mu(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] \quad (3.4)$$

$$= \min_{\mu \in \mathfrak{ca}_+, \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathcal{J}_V(\mu, \mathbf{Q}) + \sup_{\xi \in \mathcal{C}_+} \mu(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})]. \quad (3.5)$$

З а м е ч а н и е 3.1. Очевидно, что в (3.5) множество $\mathcal{C}_+$ можно заменить на $\mathcal{A}_+$. Однако нельзя, по аналогии с (3.3) и (3.4), заменить в (3.5) $\mathcal{C}_+$ на $\mathcal{C}$.

В связи с предыдущим замечанием отметим, что значения функционала $\sup_{\xi \in \mathcal{C}} \mu(\xi)$, стоящего в (3.3), зависят от всего множества $\mathcal{A}$, а не только от его пересечения $\mathcal{A}_+$ с положительным конусом. Тем не менее, из леммы 3.2 следует, что значение минимума из (3.3) зависит только от $\mathcal{A}_+$.

Разумеется, в (3.3)–(3.5), используя результаты из п. 4.2, V -дивергенцию $\mathcal{J}_V(\mu, \mathbf{Q})$ можно записать через математическое ожидание по мере $\mathbf{Q}$ в виде, сходном с определением (2.12) функции v . Мы этого не делаем, поскольку в доказательстве теоремы 2.2 при исследовании свойств функции v нам будет удобнее, наоборот, записать выражение для v в терминах V -дивергенции.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3.2. Применяя лемму 3.1 к функции полезности $\tilde{U}$ (см. (2.2)), штрафной функции γ и множеству $\mathcal{C}(x) := x + \mathcal{C}$ в роли $\mathcal{A}$, где x — число, $x > -\kappa$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &:= \sup_{\xi \in \mathcal{C}(x), \tilde{U}(\xi) \in L^\infty} \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \tilde{U}(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] \\ &= \min_{\mu \in \mathfrak{ba}_+, \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} \left[\mathcal{J}_V(\mu, \mathbf{Q}) + \sup_{\xi \in \mathcal{C}} \mu(x + \xi) + \gamma(\mathbf{Q}) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$= \min_{\substack{y \geq 0, \mathbf{Q} \in \mathcal{Q} \\ \mu \in \mathfrak{ba}_+, \mu(\Omega)=1}} \left[\mathcal{J}_V(y\mu, \mathbf{Q}) + xy + y \sup_{\xi \in \mathcal{C}} \mu(\xi) + \gamma(\mathbf{Q}) \right]. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что функция $\tilde{u}(x)$, $x > -\kappa$, вогнута и монотонно не убывает; легко также видеть, что она не принимает значения $-\infty$. Значит, она либо тождественно равна $+\infty$, либо всюду конечна. В обоих случаях она непрерывна.

Далее, обозначим выражение (3.2) через u . Для любого $\varepsilon > 0$

$$u \leq \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} \sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] \leq \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} \sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \tilde{U}(\varepsilon + \xi) + \gamma(\mathbf{Q})].$$

Для $\xi \in \mathcal{A}_+$ положим $\xi_n := \xi \wedge n$, тогда $\xi_n \in \mathcal{C}$ и $\tilde{U}(\varepsilon + \xi_n) \geq \tilde{U}(\varepsilon) > -\infty$, поэтому по теореме о монотонной сходимости для любой $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \tilde{U}(\varepsilon + \xi) = \lim_n \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \tilde{U}(\varepsilon + \xi_n) \leq \sup_{\eta \in \mathcal{C}(\varepsilon), \tilde{U}(\eta) \in L^\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \tilde{U}(\eta),$$

откуда

$$\begin{aligned} u &\leq \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} \sup_{\eta \in \mathcal{C}(\varepsilon), \tilde{U}(\eta) \in L^\infty} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \tilde{U}(\eta) + \gamma(\mathbf{Q})] \\ &= \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} \min_{\mu \in \mathbf{ba}_+} \left[\mathcal{J}_V(\mu, \mathbf{Q}) + \sup_{\xi \in \mathcal{C}} \mu(\varepsilon + \xi) + \gamma(\mathbf{Q}) \right] = \tilde{u}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где в обоих равенствах мы воспользовались соотношением (3.6), причем в первом случае — со штрафной функцией $\gamma_{\mathbf{Q}}$ (см. (2.5)).

С другой стороны, пусть $0 < \varepsilon < \varkappa$ и $\xi + \varepsilon \in \mathcal{C}$. Тогда найдется такая случайная величина $\eta \in \mathcal{A}$, что $\xi + \varepsilon \leq \eta$, причем $U(\eta) \geq U(\xi + \varepsilon) \geq \tilde{U}(\xi)$; в частности, из $\tilde{U}(\xi) \in L^\infty$ следует, что $\eta \geq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{u}(-\varepsilon) &= \sup_{\xi + \varepsilon \in \mathcal{C}, \tilde{U}(\xi) \in L^\infty} \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \tilde{U}(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] \\ &\leq \sup_{\eta \in \mathcal{A}_+} \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\eta) + \gamma(\mathbf{Q})] = u. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.8), (3.9) и непрерывности $\tilde{u}$ следует, что $u = \tilde{u}(0)$, и равенство (3.3) есть следствие (3.6).

Если применить доказанное утверждение для $\mathcal{A}_+$ в роли $\mathcal{A}$, то $\mathcal{C} = \{\xi \in L^\infty: \text{найдется такая } \eta \in \mathcal{A}_+, \text{ что } \xi \leq \eta\}$ обладает свойством: если $\xi \in \mathcal{C}$, то $\max\{\xi, 0\} \in \mathcal{C}$. Поэтому в рассматриваемом случае (когда $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+$) $\sup_{\xi \in \mathcal{C}} \mu(\xi) = \sup_{\xi \in \mathcal{C}_+} \mu(\xi)$ для $\mu \in \mathbf{ba}_+$, и верно (3.4). Равенство (3.5) верно в силу того, что для $\mu \in \mathbf{ba}_+$

$$\mathcal{J}_V(\mu, \mathbf{Q}) = \mathcal{J}_V(\mu^r, \mathbf{Q}) \quad \text{и} \quad \sup_{\xi \in \mathcal{C}_+} \mu(\xi) \geq \sup_{\xi \in \mathcal{C}_+} \mu^r(\xi).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Применяя лемму 3.2 с теми же U и $\mathcal{A}$ и функцией полезности $\gamma_{\mathbf{Q}}$, см. (2.5), получаем для фиксированной $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$, что

$$\sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] = \min_{\mu \in \mathbf{ba}_+} \left[\mathcal{J}_V(\mu, \mathbf{Q}) + \sup_{\xi \in \mathcal{C}} \mu(\xi) + \gamma(\mathbf{Q}) \right].$$

Сравнивая это равенство с (3.3), немедленно приходим к минимаксному соотношению.

Доказательство теоремы 2.2. Мы начнем с доказательства утверждения (ii) о свойствах функции v . Доказать достижимость инфимума в (2.12) можно с помощью стандартных аргументов типа теоремы Комлоша (см., например, доказательство леммы 3.3 в [22] для стандартной задачи или доказательства леммы 3.7 в [41] и леммы 4.3 в [38] для робастной задачи). Но мы последовательно будем использовать другой подход, основанный на представлении функции v в терминах V -дивергенции (см. (3.10) ниже) и общих свойствах V -дивергенции.

Положим

$$\mathcal{R} := \{\mu \in \mathbf{ba}_+ : \mu(\xi) \leq 1 \text{ для всех } \xi \in \mathcal{C}_+\}.$$

Заметим, что $\mu(\Omega) \leq \kappa^{-1}$ для $\mu \in \mathcal{R}$, поэтому по теореме Банаха–Алаоглу $\mathcal{R}$ есть компакт в $*$ -слабой топологии $\sigma(\mathbf{ba}, L^\infty)$. Легко видеть, что

$$v(y) = \inf_{\mu \in \mathcal{R}, \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} [\mathcal{J}_V(y\mu, \mathbf{Q}) + \gamma(\mathbf{Q})], \quad y \geq 0. \quad (3.10)$$

Действительно, $\mathcal{J}_V(y\mu, \mathbf{Q}) = \mathcal{J}_V(y\mu^r, \mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V(y \frac{d\mu^r}{d\mathbf{P}})$ и

$$\left\{ \frac{d\mu^r}{d\mathbf{P}} : \mu \in \mathcal{R} \right\} = \mathcal{D},$$

откуда и следует совпадение правых частей (2.12) и (3.10).

Пусть $v(y) < +\infty$ для заданного y . Поскольку функции $\mathbf{ba} \times \mathbf{ba} \ni (\mu, \nu) \rightsquigarrow \mathcal{J}_V(y\mu, \nu)$ и γ полунепрерывны снизу, а множество $\mathcal{R}$ компактно в соответствующих $*$ -слабых топологиях и $\mathcal{J}_V(y\mu, \mathbf{Q}) \geq V(y\mu(\Omega)) \geq V(y\kappa^{-1})$ для $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$ и $\mu \in \mathcal{R}$, то множества

$$\{(\mu, \nu) \in \mathbf{ba} \times \mathbf{ba} : \mathcal{J}_V(y\mu, \nu) + \delta_{\mathcal{R}}(\mu) + \gamma(\nu) \leq c\} \quad (3.11)$$

для всех $c \in \mathbf{R}$ являются компактными в $*$ -слабой топологии $\sigma(\mathbf{ba} \times \mathbf{ba}, L^\infty \times L^\infty)$ ввиду соответствующего свойства функции γ из предположения 2.2. Значит, нижняя грань в (3.10) достигается, скажем, на паре $(\mu^*, \mathbf{Q}^*)$. Тогда в (2.12) инфимум достигается на паре $(y d\mu^{*r}/d\mathbf{P}, \mathbf{Q}^*)$.

Проверим выпуклость v . Пусть $0 \leq y_1 < y_2 < +\infty$, $\alpha \in (0, 1)$, а меры $\mu_i \in \mathcal{R}$ и $\mathbf{Q}_i \in \mathcal{Q}$ таковы, что $v(y_i) = \mathcal{J}_V(y_i\mu_i, \mathbf{Q}_i) + \gamma(\mathbf{Q}_i)$, $i = 1, 2$. Положим $y := \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2$, $\mu := \alpha y_1 y^{-1} \mu_1 + (1 - \alpha)y_2 y^{-1} \mu_2$, $\mathbf{Q} := \alpha \mathbf{Q}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{Q}_2$, тогда $\mu \in \mathcal{R}$ и $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$. В силу выпуклости V -дивергенции

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_V(y\mu, \mathbf{Q}) &= \mathcal{J}_V(\alpha y_1 \mu_1 + (1 - \alpha)y_2 \mu_2, \alpha \mathbf{Q}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{Q}_2) \\ &\leq \alpha \mathcal{J}_V(y_1 \mu_1, \mathbf{Q}_1) + (1 - \alpha) \mathcal{J}_V(y_2 \mu_2, \mathbf{Q}_2), \end{aligned}$$

откуда с учетом выпуклости функции γ получаем неравенство $v(y) \leq \alpha v(y_1) + (1 - \alpha)v(y_2)$.

Далее, из неравенства $\eta \leq U(-\xi)$ для $\xi, \eta \in L^\infty$ следует, что $\xi \leq 0$. Поэтому для любых $\mu_1, \mu_2, \nu \in \mathbf{ba}_+$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_V(\mu_1 + \mu_2, \nu) &= \sup_{\xi, \eta \in L^\infty, \eta \leq U(-\xi)} [(\mu_1 + \mu_2)(\xi) + \nu(\eta)] \\ &\leq \sup_{\xi, \eta \in L^\infty, \eta \leq U(-\xi)} [\mu_1(\xi) + \nu(\eta)] \\ &= \mathcal{J}_V(\mu_1, \nu). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Поэтому функция v не возрастает.

В частности, $\{y \geq 0: v(y) < \infty\}$ есть интервал в $\mathbf{R}_+$, либо пустой, либо вида $(l, +\infty)$ или $[l, +\infty)$. Пусть $v \not\equiv +\infty$. В силу выпуклости функция v непрерывна в $(l, +\infty)$, поэтому для доказательства полунепрерывности снизу функции v достаточно проверить ее полунепрерывность снизу в точке l . Положим $c := \lim_{y \downarrow l} v(y)$ и определим $K(y) := \{(\mu, \mathbf{Q}) \in \mathcal{R} \times \mathcal{D}: \mathcal{J}_V(y\mu, \mathbf{Q}) + \gamma(\mathbf{Q}) \leq c\}$. Тогда множества $K(l + 1/n)$ непусты, убывают по n в силу (3.12) и, так же как и в (3.11), являются компактными в $*$ -слабой топологии $\sigma(\mathbf{ba} \times \mathbf{ba}, L^\infty \times L^\infty)$. Поэтому их пересечение непусто. Из полунепрерывности снизу V -дивергенции следует $\bigcap_n K(l + 1/n) \subseteq K(l)$, что и доказывает полунепрерывность снизу функции v .

Докажем теперь утверждение (vii). Из соотношения (2.3) и неравенства $v(y) \geq V(y\chi^{-1})$, $y \geq 0$, следует, что

$$\liminf_{y \uparrow +\infty} \frac{v(y)}{y} \geq 0.$$

С другой стороны,

$$\limsup_{y \uparrow +\infty} \frac{v(y)}{y} \leq 0,$$

так как v не возрастает и не равна тождественно $+\infty$.

Далее, по лемме 3.2

$$u(x) = \min_{\eta \in L_+^1, \mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V\left(\frac{\eta}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}}\right) + x \sup_{\xi \in \mathcal{C}_+} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \xi \eta + \gamma(\mathbf{Q}) \right].$$

Положим

$$\widehat{\mathcal{D}}(y) := \left\{ \eta \in L_+^0: \sup_{\xi \in \mathcal{C}_+} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta \xi = y \right\}.$$

Возможны два случая: $\widehat{\mathcal{D}}(y) = \emptyset$ для любого $y > 0$ и $\widehat{\mathcal{D}}(y) \neq \emptyset$ для любого $y > 0$. В первом случае получаем, что $u(x) = V(0) + \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \gamma(\mathbf{Q}) = v(y)$ для всех $x > 0$ и $y \geq 0$, и (2.14) верно. Во втором случае $\widehat{\mathcal{D}}(0) = \{0\} = \mathcal{D}(0)$, а при $y > 0$ $\widehat{\mathcal{D}}(y) \subseteq \mathcal{D}(y)$ и для любой $\eta \in \mathcal{D}(y)$

найдется такая $\eta' \in \widehat{\mathcal{D}}(y)$, что $\eta' \geq \eta$, поэтому в определении (2.12) функции v множество $\mathcal{D}(y)$ можно заменить на $\widehat{\mathcal{D}}(y)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x) &= \min_{y \geq 0} \inf_{\eta \in \widehat{\mathcal{D}}(y), \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V \left(\frac{\eta}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}} \right) + xy + \gamma(\mathbf{Q}) \right] \\ &= \min_{y \geq 0} [v(y) + xy]. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали (2.14). Отсюда также вытекают утверждения (i) и (iii) теоремы.

Докажем соотношение (2.15). В силу утверждения (iii) можно ограничиться случаем $v \neq +\infty$. Положим

$$\bar{u}(x) := \inf_{y \geq 0} [v(y) + xy], \quad x \in \mathbf{R}.$$

По теореме Фенхеля–Моро

$$v(y) = \sup_{x \in \mathbf{R}} [\bar{u}(x) - xy], \quad y \geq 0. \quad (3.13)$$

Теперь заметим, что $\bar{u}(x) = -\infty$ для всех $x < 0$ в силу утверждения (vii), поэтому в (3.13) можно брать супремум по $x \geq 0$ и, значит, по $x > 0$ в силу монотонности $\bar{u}$. Поскольку $\bar{u}(x)$ совпадает с $u(x)$ при $x > 0$ в силу (2.14), правые части (3.13) и (2.15) совпадают.

Докажем утверждение (v). Пусть $u(x) = v(y^*) + xy^*$, $y^* \geq 0$, $v(y^*) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} V(\eta^*(d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P})^{-1}) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$, $\eta^* \in \mathcal{D}(y^*)$, $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{Q}$. Возьмем $\mu^* = (\eta^*/y^*) \cdot \mathbf{P}$ в случае $y^* > 0$ и $\mu^* = 0$, если $y^* = 0$. Тогда $\mu^* \in \mathcal{R}$ и $v(y^*) = \mathcal{J}_V(y^*\mu^*, \mathbf{Q}^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$, поэтому

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathcal{J}_V(y^*\mu^*, \mathbf{Q}^*) + xy^* + \gamma(\mathbf{Q}^*) \\ &\geq \inf_{\mu \in \mathbf{ca}_+} \left[\mathcal{J}_V(\mu, \mathbf{Q}^*) + x \sup_{\xi \in \mathcal{C}_+} \mu(\xi) + \gamma(\mathbf{Q}^*) \right] \\ &= \sup_{\xi \in \mathcal{A}(x)} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q}^*)], \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались соотношением (3.5) с $\mathcal{A}(x)$ в роли $\mathcal{A}$ и со штрафной функцией $\gamma_{\mathbf{Q}^*}$. Обратное неравенство очевидно.

В обратную сторону, пусть верно (2.16). Вновь пользуясь (3.5) со штрафной функцией $\gamma_{\mathbf{Q}^*}$, найдем такую $\bar{\mu} \in \mathbf{ca}_+$, что

$$u(x) = \mathcal{J}_V(\bar{\mu}, \mathbf{Q}^*) + x \sup_{\xi \in \mathcal{C}_+} \bar{\mu}(\xi) + \gamma(\mathbf{Q}^*).$$

Пусть $y^* := \sup_{\xi \in \mathcal{C}_+} \bar{\mu}(\xi)$, тогда предыдущее равенство можно переписать в виде $u(x) = \mathcal{J}_V(y^*\mu^*, \mathbf{Q}^*) + xy^* + \gamma(\mathbf{Q}^*)$, где $\mu^* \in \mathcal{R}$ такова, что $y^*\mu^* = \bar{\mu}$. Так как $v(y^*) \leq \mathcal{J}_V(y^*\mu^*, \mathbf{Q}^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$, имеем $u(x) \geq v(y^*) + xy^*$,

что в сочетании с (2.14) дает два равенства $u(x) = v(y^*) + xy^*$ и $v(y^*) = \mathcal{J}_V(y^*\mu^*, \mathbf{Q}^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*) = \mathcal{J}_V(y^*\mu^{*r}, \mathbf{Q}^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$, т.е. минимум в (2.12) достигается на $(y^*d\mu^{*r}/d\mathbf{P}, \mathbf{Q}^*)$.

Теперь докажем пункт (vi). Пусть $\xi^* \in \mathcal{A}(x)$. Из определения V следует, что на $\{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P} > 0\}$

$$U(\xi^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*) \leq V\left(\frac{\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}}\right) + \frac{\xi^*\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}} + \gamma(\mathbf{Q}^*). \quad (3.14)$$

Беря математическое ожидание по мере $\mathbf{Q}^*$ от обеих частей, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*}U(\xi^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*) &\leq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*}V\left(\frac{\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}}\right) + \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*}\frac{\xi^*\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}} + \gamma(\mathbf{Q}^*) \\ &= v(y^*) + \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\xi^*\eta^*\mathbf{1}_{\{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P} > 0\}}) \leq v(y^*) + xy^*. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Если ξ^* есть решение задачи (2.11), то, с учетом (2.16), левая часть (3.15) равна $u(x)$. Значит, оба неравенства в (3.15) суть равенства, и, следовательно, в (3.14) имеет место равенство $\mathbf{Q}^*$ -п.н., т.е. $\mathbf{P}$ -п.н. на множестве $\{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P} > 0\}$. Отсюда и из (2.13) следуют (2.17) и (2.18). Если же (2.17) и (2.18) имеют место, то в (3.14) левая и правая часть равны $\mathbf{P}$ -п.н. на $\{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P} > 0\}$, и мы приходим к равенствам вместо неравенств в (3.15). Значит, $u(x) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*}U(\xi^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$.

Перейдем к доказательству (viii). По предложению 4 в [15], выполнение условия Инада (2.19) означает строгое убывание функции V . Соответственно, невыполнение условия Инада в нуле для функции u означает, что либо $u \equiv +\infty$ (что исключено по условию), либо $u(x) < +\infty$ для всех $x > 0$ и функция v конечна и постоянна на некотором интервале, а именно на интервале $[\beta, +\infty)$, где $\beta := \lim_{x \downarrow 0} u'_-(x)$. Предположим, что функция v ведет себя именно так.

Зафиксируем $y > \beta$. Пусть минимум в (2.12) достигается на паре $(\eta^*, \mathbf{Q}^*)$, т.е.

$$v(y) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*}V\left(\frac{\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}}\right) + \gamma(\mathbf{Q}^*), \quad \mathbf{Q}^* \in \mathcal{Q}, \quad \eta^* \in \mathcal{D}(y).$$

Так как $\lambda\eta^* \in \mathcal{D}(\lambda y)$ и $v(\lambda y) = v(y)$ при $\lambda > 1$, то

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*}V\left(\frac{\lambda\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}}\right) \geq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*}V\left(\frac{\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}}\right)$$

по определению $v(\lambda y)$. С другой стороны, $V(\frac{\lambda\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}}) \leq V(\frac{\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}})$. В силу строгой монотонности V комбинация двух последних неравенств возможна лишь в случае, когда $\eta^* = 0$ $\mathbf{Q}^*$ -п.н. Значит, $v(y) = V(0) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$, в частности, $V(0) = U(\infty) < \infty$ и любая $\eta \in \mathcal{D}(y)$ (и, значит,

любая $\eta \in \mathcal{D}$ удовлетворяет $\eta = 0$ $\mathbf{Q}^*$ -п.н., и, следовательно, v тождественно равна $V(0) + \gamma(\mathbf{Q}^*) = U(\infty) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$. В силу (2.14) функция u тождественно равна той же константе. Таким образом, для любой $\mathbf{Q} \in \arg \min \gamma$ выполнено равенство

$$\sup_{\xi \in \mathcal{A}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] = U(\infty) + \gamma(\mathbf{Q}),$$

и мы приходим к противоречию.

Наконец докажем (ix). Предположение на U означает в точности, что V строго выпукла. Пусть $v(y) < +\infty$ и минимум в (2.12) достигается на парах $(\eta_1, \mathbf{Q}_1)$ и $(\eta_2, \mathbf{Q}_2)$; положим $\eta := (\eta_1 + \eta_2)/2$ и $\mathbf{Q} := (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2)/2$. Тогда, с одной стороны, в силу выпуклости множеств $\mathcal{D}(y)$ и $\mathcal{Q}$ и имеем

$$v(y) \leq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V\left(\frac{\eta}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}}\right) + \gamma(\mathbf{Q}). \quad (3.16)$$

С другой стороны, в силу выпуклости V -дивергенции и γ находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V\left(\frac{\eta}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}}\right) + \gamma(\mathbf{Q}) &= \mathcal{J}_V(\eta \cdot \mathbf{P}, \mathbf{Q}) + \gamma(\mathbf{Q}) \\ &\leq \frac{1}{2} [\mathcal{J}_V(\eta_1 \cdot \mathbf{P}, \mathbf{Q}_1) + \mathcal{J}_V(\eta_2 \cdot \mathbf{P}, \mathbf{Q}_2) + \gamma(\mathbf{Q}_1) + \gamma(\mathbf{Q}_2)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_1} V\left(\frac{\eta_1}{d\mathbf{Q}_1/d\mathbf{P}}\right) + \gamma(\mathbf{Q}_1) \right] + \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_2} V\left(\frac{\eta_2}{d\mathbf{Q}_2/d\mathbf{P}}\right) + \gamma(\mathbf{Q}_2) \right] \\ &= v(y). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Таким образом, неравенства в (3.16) и (3.17) являются равенствами, причем

$$\gamma(\mathbf{Q}) = \frac{\gamma(\mathbf{Q}_1) + \gamma(\mathbf{Q}_2)}{2},$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V\left(\frac{\eta}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}}\right) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_1} V\left(\frac{\eta_1}{d\mathbf{Q}_1/d\mathbf{P}}\right) + \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_2} V\left(\frac{\eta_2}{d\mathbf{Q}_2/d\mathbf{P}}\right) \right].$$

Из первого равенства и строгой выпуклости γ получаем $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$, после чего второе равенство и строгая выпуклость V влекут $\eta_1 = \eta_2$ $\mathbf{Q}$ -п.н.

Дифференцируемость функции u на $(0, +\infty)$ означает, что v строго выпукла на множестве $\{y: +\infty > v(y) > \lim_{z \rightarrow +\infty} v(z)\}$. Предположим, что это не так и v конечна и линейна на отрезке $[y_1, y_2]$, $v(y_2) < v(y_1)$. Пусть минимум в (2.12) достигается на паре $(\eta_1, \mathbf{Q}_1)$ при $y = y_1$ и на паре $(\eta_2, \mathbf{Q}_2)$ при $y = y_2$. Аналогично доказательству первого утверждения пункта (ix), см. также доказательство выпуклости функции v , получим, что $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$ и $\eta_1 = \eta_2$ $\mathbf{Q}_1$ -п.н., что влечет $v(y_1) = v(y_2)$, т.е. мы пришли к противоречию.

Утверждение о строгой выпуклости v есть комбинация предыдущего утверждения и пункта (viii).

Теорема 2.2 доказана.

Доказательство предложения 2.1. (i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим противное. Тогда по теореме Яна [45, теорема 1] существует такая вероятностная мера $\mathbf{Q}' \sim \mathbf{Q}$, что $\sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}'} \xi < \infty$. Поскольку плотность $d\mathbf{Q}/d\mathbf{Q}'$ интегрируема по $\mathbf{Q}'$, найдется такая возрастающая выпуклая функция $\Phi: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, что $\Phi(0) = 0$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \Phi(y)/y = +\infty$ и $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}'} \Phi(d\mathbf{Q}/d\mathbf{Q}') < \infty$. Определим теперь функции $V(y) := y\Phi(1/y)$, $y > 0$, и $U(x) := \inf_{y>0} [V(y) + xy]$, $x \geq 0$; тогда V выпукла, $\lim_{y \rightarrow +\infty} V(y)/y = 0$, поэтому U удовлетворяет предположению 2.1 и имеет место (2.1). Наконец, $\mathcal{J}_V(\mathbf{Q}', \mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V(d\mathbf{Q}'/d\mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}'} \Phi(d\mathbf{Q}/d\mathbf{Q}') < \infty$, поэтому правая часть (3.5) (с $\gamma = \delta_{\{\mathbf{Q}\}}$) конечна, и из леммы 3.2 мы получаем, что $\sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) < \infty$, при этом $U(\infty) = \lim_{y \downarrow 0} V(y) = +\infty$. Противоречие.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть функция полезности U не ограничена сверху. Тогда $V(0) = +\infty$ и для конечности $\mathcal{J}_V(\mu, \mathbf{Q})$, $\mu \in \mathbf{ca}_+$, необходимо, чтобы $\mathbf{Q} \ll \mu$.

С другой стороны, для такой μ имеем $\mathbf{Q}(d\mathbf{Q}/d\mu > 0) = 1$, поэтому из (ii) следует, что семейство $\{\xi(d\mathbf{Q}/d\mu)^{-1}: \xi \in \mathcal{A}_+\}$ неограничено по $\mathbf{Q}$ -вероятности. Поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathcal{C}_+} \mu(\xi) &= \sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} \mu(\xi) \geq \sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \frac{\xi}{d\mathbf{Q}/d\mu} \\ &\geq \sup_N \sup_{\xi \in \mathcal{A}_+} N \mathbf{Q} \left(\frac{\xi}{d\mathbf{Q}/d\mu} > N \right) = +\infty, \end{aligned}$$

и утверждение вытекает из леммы 3.2.

Доказательство предложения 2.2. Утверждение

(i) $\Rightarrow$ (ii) очевидно, так как $U(\lambda x)$, $x \geq 0$, — также функция полезности.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Мы воспользуемся теоремой 2.2 с $\gamma = \delta_{\{\mathbf{Q}\}}$. Так как задача максимизации полезности (2.11) с произвольным $x > 0$ эквивалентна задаче максимизации полезности в исходной модели (с $x = 1$) с функцией полезности $U_x(\cdot) = U(x\cdot)$, имеем $u(x) = U(\infty)$ для всех $x > 0$, значит, $v(y) = U(\infty) = V(0)$ для всех $y \geq 0$. Но $V(y) < V(0)$ для любого $y > 0$, поэтому из (2.12) следует, что для всякой $\eta \in \mathcal{D}$ выполнено равенство $\eta = 0$ $\mathbf{Q}$ -п.н., т.е. $\eta \mathbf{1}_{\{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} > 0\}} = 0$ $\mathbf{P}$ -п.н., и (iii) следует из (2.7).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\mu \in \mathbf{ca}_+$ и $\sup_{\xi \in \mathcal{C}_+} \mu(\xi) < \infty$. Так как по условию для любого натурального N найдется такая последовательность $\eta_n \in \mathcal{C}_+$ что $\lim_n \eta_n \geq N \mathbf{1}_{\{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} > 0\}}$, из леммы Фату получаем $\mu(d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} > 0) = 0$, т.е. μ и $\mathbf{Q}$ сингулярны, откуда $\mathcal{J}_V(\mu, \mathbf{Q}) = V(0)$. Утверждение вытекает из леммы 3.2.

4. Приложения.

4.1. Приложение А: Некоторые факты из выпуклого анализа. Приведенные ниже результаты можно найти в монографии [18].

Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое топологическое векторное пространство над полем действительных чисел, а X' — сопряженное к нему пространство. Результат действия функционала $x' \in X'$ на $x \in X$ будем записывать как $\langle x, x' \rangle$. Преобразованием Фенхеля функции $f: X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ (или сопряженной к f) называется функция f^* на пространстве X' , задаваемая равенством

$$f^*(x') = \sup_{x \in X} [\langle x, x' \rangle - f(x)].$$

Сопряженная функция полунепрерывна снизу в топологии $\sigma(X', X)$ и выпукла. Теорема Фенхеля–Моро утверждает, что

$$f(x) = \sup_{x' \in X'} [\langle x, x' \rangle - f^*(x')], \quad x \in X,$$

тогда и только тогда, когда f — полунепрерывная снизу выпуклая функция.

В доказательстве ключевой леммы 3.1 мы использовали теорему двойственности Фенхеля–Рокафеллара (см. [31], [18, § 3.4, теорема 1]), которая утверждает, что если $f, g: X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые собственные функции и найдется точка $x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$, в которой одна из них непрерывна, то

$$-\inf_{x \in X} [f(x) + g(x)] = \min_{x' \in X} [f^*(-x') + g^*(x')].$$

Другие варианты условий, при которых справедлив этот результат, можно найти в [47, теорема 2.8.7].

4.2. Приложение В: f -дивергенция и ее свойства. Пусть $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция с $\text{dom } f \subseteq \mathbf{R}_+$. В [15] было дано определение f -дивергенции $\mathcal{J}_f(\mu, \nu)$ конечно-аддитивных функций множества μ и ν (заданных на $(\Omega, \mathcal{F})$), не обязательно удовлетворяющих условию (1.2). Легко видеть, что для $\mu, \nu \in \mathbf{ba}$ это определение эквивалентно следующему:

$$\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = \sup_{\xi, \eta \in L^\infty: \eta + f^*(\xi) \leq 0} [\mu(\xi) + \nu(\eta)], \quad (4.1)$$

где f^* есть преобразование Фенхеля функции f . Из определения следует, что функция $\mathcal{J}_f(\mu, \nu)$ на $\mathbf{ba} \times \mathbf{ba}$ принимает значения в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, выпукла и полунепрерывна снизу в топологии $\sigma(\mathbf{ba} \times \mathbf{ba}, L^\infty \times L^\infty)$. Другие перечисленные ниже и используемые в данной статье свойства доказаны

в [15, теорема 1]. В части утверждений мы ограничимся лишь некоторыми частными случаями, в частности, будет предполагаться, что либо

$$\lim_{y \uparrow +\infty} \frac{f(y)}{y} = 0, \quad (4.2)$$

либо

$$\lim_{y \uparrow +\infty} \frac{f(y)}{y} = +\infty. \quad (4.3)$$

Заметим, что если хотя бы одна из мер μ и ν не лежит в $\mathbf{ba}_+$, то $\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = +\infty$. Всюду ниже $\mu, \nu \in \mathbf{ba}_+$, а $\mathbf{Q} \in \mathfrak{P}$.

Имеют место следующие соотношения:

$$\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = \mathcal{J}_f(\mu^r, \nu^r) + \mathcal{J}_f(\mu^s, \nu^s),$$

$\mathcal{J}_f(\mu, 0) = 0$ в случае (4.2) и $\mathcal{J}_f(\mu, 0) = +\infty$ в случае (4.3), если $\mu \neq 0$.

Для $\mu, \nu \in \mathbf{ca}_+$

$$\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = \int f\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right) d\nu, \quad (4.4)$$

где правая часть интерпретируется по-разному в случаях (4.2) и (4.3). Если f удовлетворяет (4.3), то (4.4) имеет место при $\mu \ll \nu$, а в противном случае $\mathcal{J}_f(\mu, \nu) = +\infty$. Если же f удовлетворяет (4.2), то под $d\mu/d\nu$ здесь и далее понимается производная Радона–Никодима $d\mu^c/d\nu$ абсолютно непрерывной компоненты μ^c из разложения Лебега μ относительно ν . Заметим, что $\nu(d\nu/d\mathbf{P} = 0) = 0$ и

$$\frac{d\mu^c}{d\nu} = \frac{d\mu/d\mathbf{P}}{d\nu/d\mathbf{P}} \quad \nu\text{-п.в.}$$

Таким образом, для f , конечной на $(0, +\infty)$, приведенное определение f -дивергенции для счетно-аддитивных мер сводится к классическому определению f -дивергенции, введенному И. Чисаром [7].

В частности, из приведенных свойств следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_f(\mu, \mathbf{Q}) &= \infty, \quad \text{если выполнено (4.3) и } \mu \in \mathbf{ba}_+ \setminus \mathbf{ca}_+, \\ \mathcal{J}_f(\mu, \mathbf{Q}) &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} f\left(\frac{d\mu^r}{d\mathbf{Q}}\right), \quad \text{если выполнено (4.2).} \end{aligned}$$

В качестве функции f можно взять функцию V , которая у нас задается соотношениями (2.1) (когда U конечна на полупрямой) или (2.20) (когда U конечна всюду). Тогда неравенство $\eta + f^*(\xi) \leq 0$ в (4.1) преобразуется в $\eta \leq U(-\xi)$ (где в первом случае U предполагается непрерывной справа в нуле), ср. с определением φ в доказательстве леммы 3.1. Двум принципиально различным случаям для функции полезности в терминах функции V отвечают условия (2.3) и (2.21), ср. с (4.2) и (4.3). Более подробно о связи свойств функций U и V , а также u и v , см. [15, разд. 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bellini F., Frittelli M.* On the existence of minimax martingale measures. — *Math. Finance*, 2002, v. 12, № 1, p. 1–21.
2. *Biagini S., Frittelli M.* A unified framework for utility maximization problems: an Orlicz space approach. — *Ann. Appl. Probab.*, 2008, v. 18, № 3, p. 929–966.
3. *Bismut J.-M.* Conjugate convex functions in optimal stochastic control. — *J. Math. Anal. Appl.*, 1973, v. 44, № 2, p. 384–404.
4. *Bouchard B., Touzi N., Zeghal A.* Dual formulation of the utility maximization problem: the case of nonsmooth utility. — *Ann. Appl. Probab.*, 2004, v. 14, № 2, p. 678–717.
5. *Brannath W., Schachermayer W.* A bipolar theorem for $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. — *Lecture Notes in Math.*, 1999, v. 1709, p. 349–354.
6. *Burgert C., Rüschendorf L.* Optimal consumption strategies under model uncertainty. — *Statist. Decisions*, 2005, v. 23, № 1, p. 1–14.
7. *Csiszár I.* Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markoffschen Ketten. — *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 1963, v. 8, p. 85–108.
8. *Cvitanić J., Schachermayer W., Wang H.* Utility maximization in incomplete markets with random endowment. — *Finance Stoch.*, 2001, v. 5, № 2, p. 259–272.
9. *Deelstra G., Pham H., Touzi N.* Dual formulation of the utility maximization problem under transaction costs. — *Ann. Appl. Probab.*, 2001, v. 11, № 4, p. 1353–1383.
10. *Drapeau S., Kupper M.* Risk preferences and their robust representation. Preprint. Berlin: Humboldt University, 2010.
11. *Föllmer H., Gundel A.* Robust projections in the class of martingale measures. — *Illinois J. Math.*, 2006, v. 50, № 2, p. 439–472.
12. *Gilboa I., Schmeidler D.* Maxmin expected utility with nonunique prior. — *J. Math. Econom.*, 1989, v. 18, № 2, p. 141–153.
13. *Goll T., Rüschendorf L.* Minimax and minimal distance martingale measures and their relationship to portfolio optimization. — *Finance Stoch.*, 2001, v. 5, № 4, p. 557–581.
14. *Gundel A.* Robust utility maximization for complete and incomplete market models. — *Finance Stoch.*, 2005, v. 9, № 2, p. 151–176.
15. *Гущин А. А.* О расширении понятия f -дивергенции. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, т. 52, в. 3, с. 468–489.
16. *Hernández-Hernández D., Schied A.* Robust utility maximization in a stochastic factor model. — *Statist. Decisions*, 2006, v. 24, № 1, p. 109–125.
17. *Hernández-Hernández D., Schied A.* A control approach to robust utility maximization with logarithmic utility and time-consistent penalties. — *Stochastic Process. Appl.*, 2007, v. 117, № 8, p. 980–1000.
18. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 479 с.
19. *Jouini E., Schachermayer W., Touzi N.* Law invariant risk measures have the Fatou property. — *Advances in Mathematical Economics*, v. 9. Tokyo: Springer, 2006, p. 49–71.
20. *Karatzas I., Kardaras C.* The numéraire portfolio in semimartingale financial models. — *Finance Stoch.*, 2007, v. 11, № 4, p. 447–493.
21. *Karatzas I., Žitković G.* Optimal consumption from investment and random endowment in incomplete semimartingale markets. — *Ann. Probab.*, 2003, v. 31, № 4, p. 1821–1858.
22. *Kramkov D., Schachermayer W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. — *Ann. Appl. Probab.*, 1999, v. 9, № 3, p. 904–950.
23. *Kramkov D., Schachermayer W.* Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. — *Ann. Appl. Probab.*, 2003, v. 13, № 4, p. 1504–1516.
24. *Maccheroni F., Marinacci M., Rustichini A.* Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences. — *Econometrica*, 2006, v. 74, № 6, p. 1447–1498.

25. Merton R. C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. — Rev. Econom. Statist., 1969, v. 51, № 3, p. 247–257.
26. Merton R. C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. — J. Econom. Theory, 1971, v. 3, № 4, p. 373–413.
27. Морозов И. С. Расширение класса допустимых стратегий в задаче максимизации робастной полезности с конечной на $\mathbf{R}$ функцией полезности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, № 5.
28. Owen M. P., Žitković G. Optimal investment with an unbounded random endowment and utility-based pricing. — Math. Finance, 2009, v. 19, № 1, p. 129–159.
29. Pliska S. R. A stochastic calculus model of continuous trading: optimal portfolios. — Math. Oper. Res., 1986, v. 11, № 2, p. 370–382.
30. Quenez M.-C. Optimal portfolio in a multiple-priors model. — Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications IV. Basel: Birkhäuser, 2004, p. 291–321. (Progr. Probab., v. 58.)
31. Rockafellar R. T. Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions. — Duke Math. J., 1966, v. 33, № 1, p. 81–89.
32. Samuelson P. A. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. — Rev. Econom. Statist., 1969, v. 51, № 3, p. 239–246.
33. Schachermayer W. Optimal investment in incomplete markets when wealth may become negative. — Ann. Appl. Probab., 2001, v. 11, № 3, p. 694–734.
34. Schachermayer W. Optimal investment in incomplete financial markets. — Mathematical Finance—Bachelier Congress, 2000 (Paris). Berlin: Springer, 2002, p. 427–462.
35. Schied A. On the Neyman–Pearson problem for law-invariant risk measures and robust utility functionals. — Ann. Appl. Probab., 2004, v. 14, № 3, p. 1398–1423.
36. Schied A. Optimal investments for robust utility functionals in complete market models. — Math. Oper. Res., 2005, v. 30, № 3, p. 750–764.
37. Schied A. Risk measures and robust optimization problems. — Stoch. Models, 2006, v. 22, № 4, p. 753–831.
38. Schied A. Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences: a duality approach. — Finance Stoch., 2007, v. 11, № 1, p. 107–129.
39. Schied A. Robust optimal control for a consumption-investment problem. — Math. Methods Oper. Res., 2008, v. 67, № 1, p. 1–20.
40. Schied A., Föllmer H., Weber S. Robust preferences and robust portfolio choice. — Handbook of Numerical Analysis, v. XV. Special Volume: Mathematical Modeling and Numerical Methods in Finance. Amsterdam: Elsevier/North-Holland, 2009, p. 29–87.
41. Schied A., Wu C.-T. Duality theory for optimal investments under model uncertainty. — Statist. Decisions, 2005, v. 23, № 3, p. 199–217.
42. Talay D., Zheng Z. Worst case model risk management. — Finance Stoch., 2002, v. 6, № 4, p. 517–537.
43. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970, 707 с.
44. Wittmüss W. Robust optimization of consumption with random endowment. — Stochastics, 2008, v. 80, № 5, p. 459–475.
45. Yan J. A. Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1 . — Lecture Notes in Math., 1980, v. 784, p. 220–222.
46. Yan J. A. A numeraire-free and original probability based framework for financial markets. — Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing, 2002), v. III. Beijing: Higher Ed. Press, 2002, p. 861–871.
47. Zălinescu C. Convex Analysis in General Vector Spaces. River Edge: World Scientific, 2002, 367 p.
48. Žitković G. Utility maximization with a stochastic clock and an unbounded random endowment. — Ann. Appl. Probab., 2005, v. 15, № 1B, p. 748–777.

Поступила в редакцию
16.II.2010