Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Гапошкин, Об оценках скорости сходимости в усиленном законе больших чисел для стационарных последовательностей (в некоторых классах S_w и R_Φ), *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 4, 772–782

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4281>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:09:40

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2010 г.

ГАПОШКИН В. Ф.*

ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ (В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ S_w И R_Φ)

Получены некоторые новые оценки скорости сходимости в усиленном законе больших чисел для классов стационарных последовательностей, удовлетворяющих определенным ограничениям на спектральную меру или корреляционную функцию.

Ключевые слова и фразы: классы стационарных последовательностей, спектральная мера, корреляционная функция, усиленный закон больших чисел, скорость сходимости почти всюду, ортогональные ряды, средние арифметические стационарных последовательностей.

1. Постановка задачи. Основные результаты. Пусть (X_k) — стационарная в широком смысле последовательность, $\mathbf{E} X_k = 0$, $\mathbf{E} X_k^2 = \sigma^2$, $\mathbf{E} X_k X_{k+n} = R(n)$ ($k, n \geq 1$). Обозначим через $\sigma_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k$ последовательность средних арифметических. Далее используются стохастическая спектральная мера $Z(d\lambda)$ и спектральная мера последовательности $F(d\lambda) = \mathbf{E} |Z(d\lambda)|^2$. Они участвуют в представлениях

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Z(d\lambda), \quad R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} F(d\lambda), \quad n \geq 1.$$

В работах автора [4]–[7] получены необходимые и достаточные условия, при которых справедлив усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) для последовательности (X_k) , т.е. $\lim \sigma_n = 0$ почти всюду, а также исследовалась скорость сходимости в зависимости от свойств спектральной меры или корреляционной функции последовательности. Один из основных результатов этих работ содержится в следующих теоремах А и В.

Теорема А. а) *Справедливо представление*

$$\sigma_n = \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} Z(d\lambda) + \psi_n + \eta, \quad m = [\lg n], \quad (1)$$

где $\psi_n \rightarrow 0$ п.в. и в L^2 , $\eta = Z(0)$,

$$\int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} Z(d\lambda) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k Z_k = r_m(x)$$

* Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), ул. Образцова, 15, 127994 Москва, Россия; e-mail: gaposhkin@hotmail.com

(ряд сходится в L^2),

$$\begin{aligned} c_k Z_k &= \int_{\Delta_k} Z(d\lambda), \quad \Delta_k = \{\lambda: 2^{-k-1} < |\lambda| \leq 2^{-k}\}, \\ c_k^2 &= \int_{\Delta_k} F(d\lambda), \quad \sum c_k^2 < \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

(Z_k) — ортонормированная система, т.е. $r_m(x)$ — остаток ортогонального ряда с коэффициентами из l^2 .

б) УЗБЧ справедлив тогда и только тогда, когда ряд $\sum c_k Z_k$ сходится п.в. и $\eta = Z(0) = 0$ п.в.

Символ $\lg$ всюду означает двоичный логарифм. Мы пишем $a_n \ll b_n$, если $a_n \leq C b_n$ при некоторой постоянной $C > 0$ для всех n ; если $a_n \ll b_n$, $b_n \ll a_n$, то пишем $a_n \asymp b_n$. Вопрос о скорости сходимости п.в. общих ортогональных рядов хорошо изучен. Из теоремы А следует, что соответствующие результаты переформулируются для задачи о скорости сходимости в УЗБЧ.

Пусть $w(u)$ — некоторая монотонно возрастающая положительная функция, стремящаяся к бесконечности. Обозначим $V(k) = w(2^k)$. Пусть (Z_k) — некоторая ортонормированная система (ОНС) в пространстве с мерой $L^2(d\mu)$.

О п р е д е л е н и е 1. Ортогональный ряд $\sum c_k Z_k$ принадлежит классу Σ_V , если $\sum c_k^2 V(k) < \infty$.

О п р е д е л е н и е 2. Стационарная последовательность принадлежит классу S_w , если выполнены условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} w\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) F(d\lambda) < \infty, \quad F(0) = 0.$$

Теорема В. Если $(X_k) \in S_w$, то к утверждениям теоремы А можно добавить следующие:

- 1) $\eta = 0$ п.в.;
- 2) $\psi_n(x) = o(V(n)^{-1/2})$ п.в. и в L^2 при $n \rightarrow \infty$;
- 3) ряд $\sum c_k Z_k$ принадлежит классу Σ_V .

Таким образом, скорость сходимости п.в. средних σ_n к 0 для стационарных последовательностей класса S_w тесно связана со скоростью сходимости п.в. остатков ряда $\sum c_k Z_k$ из класса Σ_V . Далее $V(u)$ — положительная функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{V(u)}{\lg^2 u} \text{ не убывает при } u \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Мы будем использовать оценки остатков $r_n(x)$ ортогонального ряда вида

$$r_n(x) = o(\lambda_V(n) V(n)^{-1/2}) \quad \text{п.в.}, \quad (4)$$

где $\lambda_V(n)$ — некоторая положительная неубывающая последовательность.

О п р е д е л е н и е 3. Последовательность $\lambda_V(n)$ назовем точным множителем в оценке (4) для класса Σ_V , если: 1) для любого ряда этого класса справедлива оценка (4); 2) для любой фиксированной положительной последовательности $\varepsilon(n) \downarrow 0$ существует ряд из класса Σ_V , для которого оценку (4) нельзя заменить оценкой

$$r_n(x) = o(\varepsilon(n) \lambda_V(n) V(n)^{-1/2}) \quad \text{п.в.}$$

Приведем несколько известных результатов.

Теорема С (см. [1], [2]). 1) Справедливы оценки $1 \ll \lambda_V(n) \ll \lg n$.

2) Если $V(n) = O(n^\alpha)$, $\alpha > 0$, или $O(n^\alpha (\lg n)^\beta)$, $\alpha \geq 0$, или $V(n) \cdot 2^{-n^\alpha} \downarrow 0$ при некотором $\alpha < 1$, то $\lambda_V(n) = \lg n$.

3) Если $V(n) = 2^{\beta n}$, $\beta > 0$ (или растет быстрее), то $\lambda_V(n) = 1$.

Когда $V(u)$ растёт быстрее, чем в случае 2), но медленнее, чем в случае 3), точный множитель $\lambda_V(n)$ может принимать любые регулярно меняющиеся значения, промежуточные между 1 и $\lg n$. Остановимся подробнее на этом случае.

Непрерывная и дифференцируемая функция $L(u)$ называется медленно меняющейся (м.м.ф.) при $u \geq u_0$, если $L(u)u^\delta$ не убывает и $L(u)u^{-\delta}$ не возрастает для любого $\delta > 0$ при $u \rightarrow \infty$.

Известно (см. [3]), что для любой м.м.ф. при $t \rightarrow \infty$

$$\eta(t) = tL'(t)(L(t))^{-1} \rightarrow 0.$$

Для упрощения формулировок результатов далее предполагается, что $\eta(t)$ монотонно стремится к нулю, т.е.

$$L(t) = 2^{\int_1^t \eta(u) du / u}, \quad \eta(t) \downarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (5)$$

Теорема Д. Пусть для некоторой м.м.ф. $L(u)$ вида (5) функция $V(n)$ имеет вид

$$V(n) = 2^{n/L(n)}. \quad (6)$$

Тогда $\lambda_V(n) = \lg L(n)$, $\lambda_V(n) = o(\lg n)$.

З а м е ч а н и е 1. Если в представлении (5) функция $\eta(t)$ стремится к нулю не монотонно, то множитель $\lambda_V(n)$ в оценке для $r_n(x)$ имеет вид $\lg L(M_n)$, где $M_n = N_{n+1} - N_n$, а N_n — корень уравнения $u/L(u) = n$.

Нам понадобится также следующее утверждение.

Теорема Е. Пусть $V(n)$ имеет вид (6). Тогда если $\sum c_n^2 V(\lg n) = \infty$, $\sum_{2^n \leq k < 2^{n+1}} c_k^2 \downarrow 0$, $c_n > 0$, то существует ОНС (Z_n) такая, что для $r_{2^n}(x) = \sum_{k=2^n}^\infty c_k Z_k(x)$ справедливо соотношение

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} r_{2^n}(x) V(n)^{1/2} (\lg L(n))^{-1} \geq c > 0 \quad \text{н.в.}$$

Доказательства теорем Д и Е проводятся теми же методами, что и в работах [1], [2]; они будут приведены в п. 2.

Из теорем А–Е можно получить «точные» оценки скорости сходимости в УЗБЧ. Ряд этих результатов содержится в работах автора [4]–[7]. Так, в этих работах были получены наилучшие в классах S_w оценки для случаев, сводящихся к теореме С (при $w(n) = V(\lg n)$). Например, если $w(n) = O((\lg n)^\alpha (\lg \lg n)^\beta)$, где $\alpha > 0$ или $\alpha = 0$, $\beta \geq 2$, то $\sigma_n(x) = o(w(n)^{-1/2} \lg \lg n)$ п.в.

Далее будет доказан следующий новый результат.

Теорема 1. Пусть $w(u) = 2^{\lg u / L(\lg u)}$, где $L(u)$ — возрастающая м.м.ф. вида (5). Тогда:

1) для $(X_k) \in S_w$ справедлива оценка

$$\sigma_n = o\left(w(n)^{-1/2} \lg L(\lg n)\right) \quad \text{н.в.}; \quad (7)$$

2) оценка (7) — точная в классе S_w , т.е. для любой последовательности $\varepsilon(n) \downarrow 0$ существует последовательность $(X_k) \in S_w$ такая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) (\varepsilon(n) \lg L(\lg n))^{-1} w(n)^{1/2} \geq c > 0 \quad \text{н.в.}$$

Естественной является также задача о скорости убывания средних σ_n в зависимости от поведения корреляционной функции последовательности. Пусть $\Phi(u)$ — некоторая монотонно убывающая непрерывная функция на $[1, \infty)$, $\lim_{u \rightarrow \infty} \Phi(u) = 0$. Говорят, что (X_k) принадлежит классу R_Φ (соответственно R_Φ^*), если для ее корреляционной функции справедлива оценка $|R(n)| \leq C\Phi(n)$ (соответственно $R^*(n) \leq C\Phi(n)$). Здесь $R^*(n) = \|\sigma_n\|^2$.

Если $\Phi(u) = u^{-\alpha}(\lg u)^\beta(\lg \lg u)^\gamma$, то для всех допустимых значений α, β, γ точные оценки скорости сходимости средних содержатся в работах [4]–[7]. Здесь мы рассмотрим не исследованный ранее случай, когда для некоторой возрастающей м.м.ф. $L(u)$ вида (5) имеем

$$\Phi(u) = 2^{-\lg u / L(\lg u)}. \quad (8)$$

Напомним следующее определение. Пусть $\Psi(u)$ — некоторая положительная монотонно неубывающая дифференцируемая функция. Говорят, что $\Psi \in \Psi_d$, если ряд $\sum (n\Psi(n))^{-1}$ расходится, и $\Psi \in \Psi_c$, если этот ряд сходится.

Теорема 2. Если $\Phi(u)$ имеет вид (8) и $(X_k) \in R_\Phi$ или $(X_k) \in R_\Phi^*$, то для любой м.м.ф. $\Psi \in \Psi_c$ справедлива оценка

$$\sigma_n = o\left((\Psi(n)\Phi(n))^{1/2}(L(\lg n))^{-1/2} \lg L(\lg n)\right) \quad \text{н.в.} \quad (9)$$

Следующая теорема показывает неулучшаемость оценки (9).

Теорема 3. Пусть $\Phi(u)$ имеет вид (8). Тогда для любой функции $\Psi \in \Psi_d$ такой, что $\lg u \ll \Psi(u) \ll \lg^2 u$, существует система $(X_k) \in R_\Phi \subset R_\Phi^*$ такая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)(L(\lg n))^{1/2}(\Psi(n)\Phi(n))^{-1/2}(\lg L(\lg n))^{-1} \geq c > 0 \quad \text{н.в.} \quad (10)$$

Приведем следствие теорем 2 и 3 для одного важного частного случая.

Теорема 4. Пусть при некотором $0 < \alpha < 1$

$$L(n) = 2^{(\lg n)^\alpha}, \quad \Phi(n) = 2^{-\lg n / L(\lg n)}.$$

Тогда для любой стационарной последовательности класса R_Φ или R_Φ^* :

1) при любом $\varepsilon > 0$ почти всюду

$$\sigma_n = o\left((\Phi(n) \lg n)^{1/2}(L(\lg n))^{-1/2}(\lg \lg n)^{1/2+\alpha+\varepsilon}\right);$$

2) при $\varepsilon = 0$ утверждение 1), вообще говоря, теряет силу.

Для доказательства применяем теоремы 2 и 3 при $\Psi(u) = \lg u \cdot (\lg \lg u)^{1+2\varepsilon}$, где соответственно $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon = 0$.

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Следующие два базовых утверждения получены в работах Д.Е. Меньшова, Г. Радемахера и К. Тандори (см. [1], [2]).

Лемма 1. Пусть $(Z_k(x))_{k=1}^\infty$ — ОНС и $N_1 < N_2 < \dots$ — действительные числа, $N_{m+1} - N_m = M_m > 0$, $\Delta_m = \{k: N_m \leq k < N_{m+1}\}$. Тогда при некоторой абсолютной постоянной $C > 0$ выполнено соотношение

$$\|\delta_m\|^2 \leq C \sum_{k \in \Delta_m} c_k^2 \cdot \lg^2(M_m + 2),$$

где

$$\delta_m(x) = \sup_{l \in \Delta_m} \left| \sum_{N_m \leq k \leq l} c_k Z_k(x) \right|.$$

Лемма 2. Пусть $N_m \rightarrow \infty$, $N_{m+1} - N_m = M_m > 0$, $C_m^{-1} \leq 1$, $\sum C_m^{-1} = \infty$. Тогда существуют последовательность независимых множеств $E_m \subset (0, 1)$, $|E_m| = C_m^{-1}$, и ОНС $(Z_k(x))_{k=1}^\infty$ в $L^2(0, 1)$, обладающие свойствами: для любого $x \in E_m$ существует $l(x) \in \Delta_m$ такое, что $Z_k(x) \geq 0$ при $N_m \leq k \leq l(x)$, и существует $A > 0$ такое, что для любого $x \in E_m$

$$\sum_{N_m \leq k \leq l(x)} Z_k(x) \geq A(C_m M_m)^{1/2} \lg(M_m + 2).$$

Система (Z_k) может быть выбрана бесконечной коразмерности в L^2 .

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 3. Если $V(k)$ не убывает и $\varepsilon(k) \downarrow 0$, то найдутся такие $c_k \downarrow 0$, что $\sum c_k^2 V(k) = \infty$, $\sum c_k^2 V(k) \varepsilon(k) < \infty$.

Пусть возрастающая непрерывная функция $V(u)$ удовлетворяет условию (3). Обозначим через N_n единственное решение уравнения $V(N_n) = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$. Последовательность (N_n) возрастает и $N_{n+1} - N_n = M_n > 0$. Числа N_n , вообще говоря, не являются целыми. Обозначим $\Delta_n = \{k: N_n \leq k < N_{n+1}\}$. Если Δ_n непусто, то положим $M(k) = M_n$ при $k \in \Delta_n$. Для ортогонального ряда класса Σ_V удобно обозначать $r_{N_n}(x) = \sum_{k \geq N_n} c_k Z_k(x)$.

Лемма 4. 1) Для любой функции $V(u)$, удовлетворяющей условию (3), справедлива оценка $\lambda_V(k) \ll \lg(M(k) + 2)$.

2) Если числа M_n удовлетворяют условиям

$$M_n \rightarrow \infty, \quad M_{n+1} \sim M_n, \quad (11)$$

то $\lambda_V(k) = \lg M(k)$.

Доказательство. 1) Рассмотрим ряд (1) класса Σ_V . Справедливы оценки:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|r_{N_n}\|^2 V(N_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k \geq N_n} c_k^2 \right) \cdot 2^n \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \sum_{n: N_n \leq k} 2^n \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 V(k) < \infty,$$

и, следовательно, по теореме Б. Леви

$$r_{N_n}(x) = o(V(N_n)^{-1/2}) \quad \text{п.в.}$$

Если $\Delta_n \neq \emptyset$, то положим $\delta_{N_n}(x) = \sup_{k \in \Delta_n} |r_k(x) - r_{N_n}(x)|$. В противном случае $\delta_{N_n}(x) = 0$. По лемме 1 имеем:

$$\|\delta_{N_n}(x)\|^2 \leq C \left(\sum_{k \in \Delta_n} c_k^2 \right) \lg^2(M_n + 2).$$

Следовательно, как и в предыдущей оценке,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\delta_{N_n}\|^2 V(N_n) \lg^{-2}(M_n + 2) \leq 2C \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 V(k) < \infty,$$

и почти всюду

$$\delta_{N_n}(x) = o(V(N_n)^{-1/2} \lg(M_n + 2)).$$

Так как $M(k) = M_n$ при $k \in \Delta_n$ и $V(N_{n+1}) = 2V(N_n)$, то из этих оценок следует, что при $k \rightarrow \infty$

$$r_k(x) V(k)^{1/2} (\lg(M(k) + 2))^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{п.в.}$$

2) Пусть последовательность $\varepsilon(n)$ задана. По смыслу задачи, не уменьшая общности, можно считать, что она убывает сколь угодно медленно, т.е. выполнено условие $\varepsilon(N_n) \sim \varepsilon(N_{n+1})$. Выберем по лемме 3 числа $c_k \downarrow 0$ так, чтобы $\sum c_k^2 V(k) = \infty$, $\sum c_k^2 V(k) \varepsilon(k)^2 < \infty$. Так как $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in \Delta_n} c_k^2 V(k) = \infty$, $2^n \leq V(k) \leq 2^{n+1}$ при $k \in \Delta_n$, и число элементов в Δ_n эквивалентно M_n , то, следовательно, $\sum c_{[N_n]}^2 M_n \cdot 2^n = \infty$. В силу условий (11), если обозначить $C_n = [(c_{[N_{n+1}]}^2 M_n \cdot 2^n)^{-1} + 1]$, то $\sum C_n^{-1} = \infty$. По лемме 2 найдем: (а) набор независимых множеств $E_n \subset (0, 1)$, $|E_n| = C_n^{-1}$, $\sum |E_n| = \infty$; (б) ОНС $(\Phi_k(x))_{k=1}^{\infty}$ бесконечной коразмерности в L^2 , обладающую свойствами: для любого $x \in E_n$ существует $l_n(x)$ такое, что $1 \leq l_n(x) \leq M_n$, и для некоторого $A > 0$

$$\sum_{N_n \leq k \leq N_n + l_n(x)} \Phi_k(x) \geq A(C_n M_n)^{1/2} \lg M_n. \quad (12)$$

Правая часть последнего неравенства не меньше чем $Ac_{[N_n+1]}^{-1}V(N_n)^{-1/2}\lg M_n$. Так как функции $\Phi_k(x)$ по знакам суммы по лемме 2 неотрицательны на E_n , то на E_n

$$\sum_{N_n \leq k \leq N_n + l_n(x)} c_k \Phi_k(x) \geq AV(N_n)^{-1/2} \lg M_n. \quad (13)$$

Так как $\varepsilon(N_n) \asymp \varepsilon(N_{n+1})$, то при $(b_k) = (c_k \varepsilon(k)) \in \Sigma_V$ получаем для $x \in E_n$ неравенство

$$V(N_n)^{1/2}(\varepsilon(N_{n+1}) \lg M_n)^{-1} \sum_{N_n \leq k < N_n + l_n(x)} b_k \Phi_k(x) \geq a_1 > 0.$$

Отсюда по лемме Бореля–Кантелли следует, что

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} r_k(x) V(k)^{1/2} (\varepsilon(k) \lg M(k))^{-1} > 0 \quad \text{п.в.}$$

и лемма 4 доказана.

Лемма 5. Если $V(n)$ имеет вид (6), где $L(n)$ — некоторая м.м.ф., и $V(N_n) = 2^n$, то существует м.м.ф. $L^*(n)$ такая, что

$$N_n = nL^*(n), \quad L^*(n) = L(nL^*(n)) = L(N_n) \quad (n \geq n_0). \quad (14)$$

Если $L(u)$ имеет представление (5), то $\lg L(N_n) \sim \lg L(n)$, $\lg M_n \sim \lg L(n)$.

Доказательство. По определению $N_n = nL(N_n)$. Свойство (14) хорошо известно (см. [3]). Делая замену $\ln t = z$, находим, что для любого $p > 1$

$$\gamma(u^p) = \int_0^{p \ln u} \eta(e^z) dz \leq p \int_0^{\ln u} \eta(e^z) dz = p\gamma(u).$$

Так как для любого $\delta > 0$ существует n_1 такое, что $N_n = nL^*(n) \leq n^{1+\delta}$ для всех $n \geq n_1$, то при $n \geq n_1$ имеем $\gamma(n) \leq \gamma(N_n) \leq (1+\delta)\gamma(n)$, т.е. $\lg L(N_n) \sim \lg L(n)$. Далее,

$$M_n = N_{n+1} - N_n = L^*(n+1) + n(L^*(n+1) - L^*(n)) \sim L^*(n) = L(N_n).$$

Следовательно, $\lg M_n \sim \lg L(N_n) \sim \lg L(n)$.

Доказательство теоремы D. Если $V(n)$ имеет вид (6), то $\lg M_n \sim \lg L(n)$ в силу леммы 5, и утверждение теоремы D следует из леммы 4.

Замечание 2. Из леммы 4 следует также доказательство теоремы C. Действительно, если $V_1(n) = 2^{n^\alpha}$, $\alpha < 1$, то $N_n = n^{1/\alpha}$, $M_n \asymp n^\beta$, $\beta = 1/\alpha - 1$, $\lambda_{V_1}(n) = \lg n$. Если же $V(n) \cdot 2^{-n^\alpha}$ убывает (например, $V(n) = n^\gamma$), то с помощью преобразования Абеля легко получается, что $\lambda_V(n) \gg \lambda_{V_1}(n) = \lg n$. Наконец, если $V(n) = 2^{\beta n}$, то $M_n = 1/\beta$, $\lambda_V(n) = 1$.

Для доказательства теоремы E нужна следующая лемма. Обозначим $\Delta_n = \{k: 2^n \leq k < 2^{n+1}\}$.

Лемма 6. Пусть ОНС (Ψ_n) имеет бесконечную коразмерность в L^2 . Пусть заданы числа $c_k > 0$ и $(\sum_{k \in \Delta_n} c_k^2)^{1/2} = D_n$, $(c_k) \in l_2$. Тогда существует ОНС $(\Phi_k)_{k=1}^\infty$ такая, что

$$\sum_{k \in \Delta_n} c_k \Phi_k(x) = D_n \Psi_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом,

$$\sum_{k \geq 2^n} c_k \Phi_k(x) = \sum_{l \geq n} D_l \Psi_l(x) = r_n(x),$$

где $r_n(x)$ — n -й остаток ортогонального ряда $\sum D_l \Psi_l(x)$.

Доказательство. Пусть H — замкнутая линейная оболочка системы (Ψ_i) . ОНС (Φ_k) будем строить по блокам Δ_n . Построим сначала ОНС $(\Psi_{ni}; 1 \leq i \leq 2^n)$ следующим образом. Положим $\Psi_{n1} = \Psi_n$ и произвольно выберем в $H^\perp$ ортогональную к Ψ_n ОНС $(\Psi_{ni}; 2 \leq i \leq 2^n)$. При этом можно обеспечить выполнение соотношения

$\Psi_{nj} \perp \Psi_{mk}$ для любых $m < n$ и любых j, k . Рассмотрим систему $2^n \times 2^n$ уравнений относительно неизвестных функций Φ_k :

$$\sum_{k \in \Delta_n} a_{jk}^{(n)} \Phi_k = \Psi_{nj}, \quad j = 1, \dots, 2^n,$$

где ортогональная матрица $A^{(n)} = (a_{jk}^{(n)})$ имеет первую строку $a_{1k}^{(n)} = c_k D_n^{-1}$, а остальные строки выбраны произвольно. Если $B^{(n)}$ — обратная ортогональная матрица, то

$$\Phi_k(x) = \sum_{j \in \Delta_n} b_{kj}^{(n)} \Psi_{kj}(x), \quad k \in \Delta_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что система (Φ_k) удовлетворяет условиям леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы Е. Пусть числа $c_n > 0$ таковы, что $D_n = (\sum_{k \in \Delta_n} c_k^2)^{1/2} \downarrow 0$, $\sum c_k^2 V(\lg k) = \infty$. Так как $\sum D_n^2 V(n) = \infty$, то по лемме 4 и теореме D существует ОНС (Ψ_n) бесконечной коразмерности в L^2 такая, что почти всюду выполняется неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{l \geq n} D_l \Psi_l(x) \cdot V(n)^{1/2} (\lg L(n))^{-1} \geq c > 0.$$

По лемме 6 найдем ОНС (Φ_k) , для которой $\sum_{k \in \Delta_n} c_k \Phi_k(x) = D_n \Psi_n(x)$. Тогда для ортогонального ряда $\sum c_k \Phi_k(x)$ выполнено утверждение теоремы.

Следующие несколько лемм потребуются при доказательстве теорем 1–3.

Лемма 7. Если $\varphi(t)$ — некоторая дифференцируемая м.м.ф., то

- 1) $\varphi'(t) = o(\varphi(t)t^{-1})$;
- 2) $-(\varphi(t)t^{-1/2})' \asymp t^{-3/2} \varphi(t)$;
- 3) $\sum_{k=1}^n k^\alpha \varphi(k) \asymp n^{\alpha+1} \varphi(n)$, $\alpha > -1$;
- 4) $\sum_{k=n}^\infty k^{-\beta} \varphi(k) \asymp n^{1-\beta} \varphi(n)$, $\beta > 1$;
- 5) для любого $q > 1$ существует $t_0(q)$ такое, что для всех $t \geq t_0(q)$ выполнены неравенства $q^{-1} \leq \varphi(2t)/\varphi(t) \leq q$;
- 6) если $k \geq 2\nu$, то

$$a_{k,\nu} = \varphi(k - \nu + 1)(k - \nu + 1)^{-1/2} - \varphi(k)k^{-1/2} \leq C\nu k^{-3/2} \varphi(k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойства 1) и 2) сразу следуют из представления функции $\varphi(t)$. Так как для любого $\delta > 0$ функция $\varphi(k)k^\delta$ не убывает, а функция $\varphi(k)k^{-\delta}$ не возрастает при k , больших некоторого $k_0(\delta)$, то легко получаем также свойства 3)–5). По теореме Лагранжа при некотором $0 < \theta < 1$

$$a_{k,\nu} \asymp -\nu(\varphi(t)t^{-1/2})'|_{t=k-\theta\nu} \leq C_1 \nu t^{-3/2} \varphi(t)|_{t=k-\theta\nu} \leq C\nu k^{-3/2} \varphi(k).$$

Лемма 8. Пусть (X_k) — стационарная последовательность, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $\sigma_n = n^{-1} S_n$ и $\Phi(n) = n^{-2\alpha} \Phi_1(n)$, где $0 \leq \alpha < 1$, $\Phi_1(n)$ — м.м.ф. Тогда оценка

$$\|\sigma_{2^n}\|^2 \leq C^2 \Phi(2^n), \quad n \geq 1,$$

влечет за собой оценку

$$\|\sigma_m\|^2 \leq C_1^2 \Phi(m), \quad m \geq 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем $m = 2^n + 2^{n_1} + \dots + 2^{n_s}$, где $n > n_1 > \dots > n_s \geq 0$. В силу стационарности и условия леммы имеем

$$\|S_m\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{2^n} X_k \right\| + \left\| \sum_{k=2^n+1}^{2^n+2^{n_1}} X_k \right\| + \dots \leq C(2^n \Phi(2^n)^{1/2} + 2^{n_1} \Phi(2^{n_1})^{1/2} + \dots),$$

т.е. и подавно

$$\|S_m\| \leq C \sum_{k=0}^n 2^{k(1-\alpha)} \Phi_1(2^k)^{1/2}.$$

Используя утверждение 5) леммы 7 при некотором $1 < q < 2$, получим неравенство $\Phi_1(2^k)^{1/2} \leq C_2 q^{n-k} \Phi_1(2^n)^{1/2}$, т.е.

$$\|S_m\| \leq C_3 \cdot 2^{n(1-\alpha)} \Phi_1(2^n)^{1/2}, \quad C_3 = C C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{2}\right)^k < \infty.$$

Поделив на m , получим требуемую оценку.

Лемма 9. Если $\Psi \in \Psi_d$ и $\mu(n) \uparrow \infty$, то существует функция $\Psi_1 \in \Psi_d$ такая, что

$$1) \quad \Psi_1(n) \geq \Psi(n), \quad 2) \quad \Psi_1(n)\mu(n) \in \Psi_c.$$

Доказательство. Выберем целые числа N_k так, что $\mu(N_k) \geq k^2$, $N_1 < N_2 < \dots$. Обозначим $\Delta_k = \{n: N_k \leq n < N_{k+1}\}$, $c_k = \sum_{n \in \Delta_k} (n\Psi(n))^{-1}$. При $n \in \Delta_k$ положим $\Psi_1(n) = \Psi(n)$, если $c_k \leq 1$, и $\Psi_1(n) = c_k \Psi(n)$, если $c_k > 1$. Ясно, что $\Psi(n) \leq \Psi_1(n)$, $\Psi_1 \in \Psi_d$. Кроме того,

$$\sum_{n \in \Delta_k} (n\Psi_1(n))^{-1} \leq 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in \Delta_k} (n\mu(n)\Psi_1(n))^{-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty.$$

Следующие леммы 10–13 относятся к включениям классов S_w , R_Φ , R_Φ^* .

Лемма 10. Для любой невозрастающей м.м.ф. $\Phi(u)$ справедливо включение $R_\Phi \subset R_\Phi^*$.

Доказательство. Если $|R(k)| \leq C\Phi(k)$, то по лемме 7

$$\|\sigma_n\|^2 = n^{-1}R(0) + 2n^{-2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)R(k) \leq Cn^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \Phi(k) \leq C_2\Phi(n).$$

Лемма 11. Пусть $w(u)$ — возрастающая дифференцируемая функция при $u \geq 1$. Если выполнено условие

$$\int_1^\infty w'(u)\Phi(u) du < \infty, \quad (15)$$

то $R_\Phi^* \subset S_w$.

Эта лемма доказана в работе автора [7]. При некоторых условиях на регулярность поведения функции $w'(u)$ верно и обратное включение, но оно здесь не понадобится.

Лемма 12. Если $\limsup_{N \rightarrow \infty} \Phi(N)w(N) < \infty$, то условие (15) эквивалентно условию

$$\int_1^\infty w(u)|\Phi'(u)| du < \infty. \quad (16)$$

В частности, эта эквивалентность справедлива для пары функций

$$\Phi(u) = 2^{-\lg u / L(\lg u)}, \quad w(u) = L(\lg u)(\Phi(u)\Psi(u))^{-1}, \quad (17)$$

где $L(u)$ — м.м.ф., а $\Psi(u) \in \Psi_c$ — любая функция.

Доказательство. Первое утверждение следует из формулы интегрирования по частям. Далее, для $\Psi \in \Psi_c$ выполнено условие $\Psi(N) \geq a \lg N$; кроме того, $L(\lg N) = o(\lg^\delta N)$ при любом $\delta > 0$. Поэтому $\Phi(N)w(N) = o(1)$ при $N \rightarrow \infty$.

Лемма 13. Если $w(u)$ и $\Phi(u)$ имеют вид (17), то $R_\Phi^* \subset S_w$.

Доказательство. Проверим выполнение условия (15). Так как $L'(v) = o(v^{-1}L(v))$, то $|\Phi'(u)| \asymp \Phi(u)(uL(\lg u))^{-1}$ и интегралы (16) и (15) сходятся.

Лемма 14. Пусть $w(u)$ имеет вид (17), где $\Psi \in \Psi_c$ — м.м.ф. и $\Psi(u) \ll \lg^2 u$. Тогда при некоторой м.м.ф. $L_1(v) \sim L(v)$ функция $w(u)$ имеет представление

$$w(u) = 2^{\lg u / L_1(\lg u)}.$$

Доказательство. Так как при некотором $\beta > 0$

$$L(\lg u) = o(\lg^\beta u), \quad \lg L(\lg u) = o(\lg \lg u), \quad \lg \Psi(u) = O(\lg \lg u),$$

то при любом $\gamma < 1$ имеем

$$\lg w(u) = \frac{\lg u}{L(\lg u)} (1 + O(\lg^{-\gamma} u)) = \frac{\lg u}{L_1(\lg u)}.$$

3. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. 1) По теореме А для $(X_k) \in S_w$ при $2^m \leq n < 2^{m+1}$ имеем представление $\sigma_n = r_m(x) + \psi_n$, где слагаемые в правой части по теоремам В и D почти всюду оцениваются следующим образом:

$$\psi_n(x) = o(w(n)^{-1/2}), \quad r_m(x) = o(w(2^m)^{-1/2} \lg L(m)).$$

Следовательно, почти всюду $\sigma_n(x) = o(\lg w(n)^{-1/2} L(\lg n))$.

2) Пусть $V(k) = w(2^k) = 2^{k/L(k)}$, и пусть задана последовательность $\varepsilon(n) \downarrow 0$. По лемме 4 и теореме D (примененным к последовательности $\varepsilon(2^n)$) найдутся коэффициенты $c_n \downarrow 0$, $\sum c_n^2 V(n) < \infty$, и ОНС (Z_n) на отрезке $[0, 1]$ такие, что для $r_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k Z_k(x)$ почти всюду справедлива оценка

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n(x) V(n)^{1/2} (\varepsilon(2^n) \lg L(n))^{-1} \geq c > 0. \quad (18)$$

Образует дискретную стохастическую спектральную меру $Z(d\lambda)$, положив $Z(2^{-k}) = c_k Z_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$. Соответствующая стационарная последовательность (X_n) имеет вид

$$X_n(x) = \int_{|\lambda| \leq \pi} e^{in\lambda} Z(d\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{in \cdot 2^{-k}} Z_k(x).$$

Очевидно, что

$$\int_{|\lambda| \leq \pi} w\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) F(d\lambda) = \sum c_k^2 V(k) < \infty,$$

т.е. $(X_n) \in S_w$. По теоремам А и В для средних арифметических порядка 2^n этой последовательности справедливо представление

$$\sigma_{2^n}(x) = r_n(x) + \psi_{2^n}(x), \quad (19)$$

где $\psi_{2^n}(x) = o(V(n)^{-1/2})$ п.в. Из (18) и (19) следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2^n}(x) V(n)^{1/2} (\varepsilon(2^n) \lg L(n))^{-1} \geq c > 0 \quad \text{п.в.},$$

т.е. второе утверждение теоремы тоже выполнено.

Доказательство теоремы 2. Пусть функция $\Phi(u)$ имеет вид (8). По лемме 10 достаточно рассмотреть случай $(X_k) \in R_\Phi^*$. В силу лемм 13 и 14 тогда $(X_k) \in S_w$, где функция $w(u)$ имеет вид (17) и в качестве Ψ может быть взята любая м.м.ф. из класса Ψ_c . Не уменьшая общности, можно считать также, что функция $\Psi(u)$ удовлетворяет условиям леммы 14 (в противном случае заменим $\Psi(u)$ на функцию $\Psi_1(u) = \min(\Psi(u); \lg^2 u)$). По лемме 14 функция $w(u)$ имеет также представление $w(u) = 2^{\lg u / L_1(\lg u)}$, $L_1(\lg u) \sim L(\lg u)$. Применяя теорему 1, получим оценку (9). Теорема доказана.

Пусть функция $\Phi(u)$ имеет вид (8). Обозначим $\varphi(k) = \Phi(k)^{1/2} (L(\lg k))^{-1/2}$, $c_k = \varphi(k) k^{-1/2}$, $\varphi(k)$ — м.м.ф. Пусть также

$$b_k = \sum_{l=1}^k c_l, \quad d_k^{(n)} = 2^{-n} \sum_{\nu=1}^{2^n} (c_{k-\nu+1} - c_k) \quad (k \geq 2^{n+1}).$$

Лемма 15. *Справедливы оценки:*

$$1) \quad b_k \asymp k^{1/2} \varphi(k), \quad 2) \quad |d_k^{(n)}| \leq C \cdot 2^n k^{-3/2} \varphi(k) \quad (k \geq 2^{n+1}).$$

Доказательство. Оценка 1) вытекает из утверждения 3) леммы 7 при $\alpha = -1/2$. Далее, в силу утверждения 6) леммы 7 выполнено неравенство $|c_{k-\nu+1} - c_k| \leq C \nu k^{-3/2} \varphi(k)$ при $k \geq 2^{n+1}$, $\nu \leq 2^n$. Отсюда следует оценка 2).

Доказательство теоремы 3. Пусть (Z_k) — ОНС, $\mathbf{E} Z_k = 0$, коэффициенты $c_k = \varphi(k) k^{-1/2}$ заданы как выше, а м.м.ф. $\varphi(k)$ имеет тот же вид, что в лемме 15. Положим

$$X_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k Z_{n+k-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда (X_n) — стационарная последовательность и

$$R(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k c_{k+n}, \quad \mathbf{E} X_n = 0, \quad R(n) \leq c_n b_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2.$$

Первое слагаемое в оценке для $R(n)$ по лемме 15 оценивается так: $c_n b_n \ll \varphi^2(n) = o(\Phi(n))$. Далее,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Phi(k) (kL(\lg k))^{-1} \leq C \Phi(n),$$

так как $\Phi(k-1) - \Phi(k) \asymp \Phi'(k) \asymp \Phi(k) (kL(\lg k))^{-1}$. Итак, при любом выборе ОНС (Z_k) имеем $R(n) \ll \Phi(n)$, т.е. $(X_k) \in R_{\Phi}$.

Получим для средних σ_{2^n} представление

$$\sigma_{2^n} = \sum_{k=2^{n+1}}^{\infty} c_k Z_k + \delta_{2^n} = r_{2^{n+1}}(x) + \delta_{2^n}(x), \quad (20)$$

где $r_{2^{n+1}}(x)$ — подпоследовательность остатков ортогонального ряда с коэффициентами из l^2 , а δ_{2^n} — несущественный добавок, поскольку, как мы сейчас покажем,

$$\|\delta_{2^n}\|^2 \ll \varphi^2(2^n), \quad (21)$$

и, значит, для любой $\Psi_1 \in \Psi_c$

$$\delta_{2^n}(x) = o\left(\left(\Phi(2^n) \Psi_1(2^n) L^{-1}(n)\right)^{1/2}\right) \quad \text{п.в.} \quad (22)$$

Для этого подставим выражения для X_k в формулу для средних σ_{2^n} и получим

$$\sigma_{2^n} = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} X_k = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} b_k Z_k + 2^{-n} \sum_{k=2^{n+1}}^{\infty} (c_k + \dots + c_{k-2^{n+1}}) Z_k.$$

Это выражение, очевидно, переписывается в виде (20), где

$$\delta_{2^n} = \eta_n^{(1)} + \eta_n^{(2)} + \eta_n^{(3)},$$

где

$$\eta_n^{(1)} = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} b_k Z_k, \quad \eta_n^{(2)} = 2^{-n} \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}-1} (c_k + \dots + c_{k-2^{n+1}}) Z_k, \quad \eta_n^{(3)} = \sum_{k=2^{n+1}}^{\infty} d_k^{(n)} Z_k.$$

Оценим эти слагаемые. Так как $c_k + \dots + c_{k-2^{n+1}} \leq b_k$ при $2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 1$, то в силу лемм 7 и 15

$$\begin{aligned} \|\eta_n^{(1)}\|^2 + \|\eta_n^{(2)}\|^2 &\leq 2^{-2n} \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} b_k^2 \ll 2^{-2n} \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} k \varphi^2(k) \ll \varphi^2(2^{n+1}), \\ \|\eta_n^{(3)}\|^2 &= \sum_{k=2^{n+1}}^{\infty} (d_k^{(n)})^2 \ll 2^{2n} \sum_{k=2^{n+1}}^{\infty} k^{-3} \varphi^2(k) \ll \varphi^2(2^{n+1}). \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка (21). Значит, для всех $\Psi_1 \in \Psi_c$ ряд $\sum \|\delta_{2^n}\|^2 (\Psi_1(2^n) \varphi^2(2^n))^{-1}$ сходится и по теореме Б. Леви получаем (22). Пользуясь леммой 9, можно считать, не уменьшая общности, что заданная в условии теоремы функция $\Psi \in \Psi_d$ такова, что $\Psi_1(n) = \Psi(n) \mu^2(n) \in \Psi_c$, $\mu(n) = \lg L(\lg n)$. Если в оценке (22) использовать эту функцию $\Psi_1(n)$, то получим, что $\delta_{2^n}(x) = o(V(n)^{-1/2} \lg L(n))$ п.в., где $V(n) = (\Phi(2^n) \Psi(2^n))^{-1} L(n)$. Далее, $\sum c_n^2 V(\lg n) = \sum (n \Psi(n))^{-1} = \infty$, $\sum c_n^2 < \infty$. Легко проверяется также, что $\sum_{2^n \leq k < 2^{n+1}} c_k^2 = D_n^2 \downarrow 0$.

Все предыдущие оценки справедливы для любой ОНС (Z_k) . Выберем теперь ОНС (Z_k) по теореме Е так, чтобы

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} r_{2^n}(x) V(n)^{1/2} (\lg L(n))^{-1} \geq c > 0 \quad \text{п.в.}$$

Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2^n}(x) V(n)^{1/2} (\lg L(n))^{-1} \geq c > 0 \quad \text{п.в.,}$$

и поэтому почти всюду выполнено соотношение (10):

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) V(\lg n)^{1/2} (\lg L(\lg n))^{-1} \geq c > 0.$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1963, 359 с.
2. Tandori K. Über die orthogonalen Functionen. VII. Approximations sätze. — Acta Sci. Math. Szeged, 1959, v. 12, p. 19–24.
3. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
4. Гапошкин В. Ф. Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле случайных процессов и однородных случайных полей. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 2, с. 295–319.
5. Гапошкин В. Ф. Одна теорема о сходимости почти всюду последовательности измеримых функций и ее применения к последовательностям стохастических интегралов. — Матем. сб., 1977, т. 104, № 1, с. 3–21.
6. Гапошкин В. Ф. Оценки средних для почти всех реализаций стационарных процессов. — Сиб. матем. журн., 1979, т. 20, № 5, с. 978–989.
7. Гапошкин В. Ф. О зависимости скорости сходимости в усиленном законе больших чисел для стационарных процессов от скорости убывания корреляционной функции. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, в. 4, с. 720–733.

Поступила в редакцию
6.IV.2010

© 2010 г.

КУЗНЕЦОВА А. А.*

УСЛОВНАЯ ЭНТРОПИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

В работе дается общее определение условной энтропии для бесконечномерных квантовых систем, использующее результаты работы [8], относящиеся к свойствам взаимной информации и когерентной информации в бесконечномерном случае. Также обобщаются на бесконечномерный случай основные свойства условной энтропии: монотонность, вогнутость, субаддитивность.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет; e-mail: kelit@list.ru