Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кузнецова, Условная энтропия для бесконечномерных квантовых систем,
Теория вероятн. и ее примен., 2010, том 55, выпуск 4, 782–790

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4282>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:06:35

Отсюда следует оценка (21). Значит, для всех $\Psi_1 \in \Psi_c$ ряд $\sum \|\delta_{2^n}\|^2 (\Psi_1(2^n) \varphi^2(2^n))^{-1}$ сходится и по теореме Б. Леви получаем (22). Пользуясь леммой 9, можно считать, не уменьшая общности, что заданная в условии теоремы функция $\Psi \in \Psi_d$ такова, что $\Psi_1(n) = \Psi(n) \mu^2(n) \in \Psi_c$, $\mu(n) = \lg L(\lg n)$. Если в оценке (22) использовать эту функцию $\Psi_1(n)$, то получим, что $\delta_{2^n}(x) = o(V(n)^{-1/2} \lg L(n))$ п.в., где $V(n) = (\Phi(2^n) \Psi(2^n))^{-1} L(n)$. Далее, $\sum c_n^2 V(\lg n) = \sum (n \Psi(n))^{-1} = \infty$, $\sum c_n^2 < \infty$. Легко проверяется также, что $\sum_{2^n \leq k < 2^{n+1}} c_k^2 = D_n^2 \downarrow 0$.

Все предыдущие оценки справедливы для любой ОНС (Z_k) . Выберем теперь ОНС (Z_k) по теореме Е так, чтобы

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} r_{2^n}(x) V(n)^{1/2} (\lg L(n))^{-1} \geq c > 0 \quad \text{п.в.}$$

Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2^n}(x) V(n)^{1/2} (\lg L(n))^{-1} \geq c > 0 \quad \text{п.в.,}$$

и поэтому почти всюду выполнено соотношение (10):

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) V(\lg n)^{1/2} (\lg L(\lg n))^{-1} \geq c > 0.$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1963, 359 с.
2. Tandori K. Über die orthogonalen Functionen. VII. Approximations sätze. — Acta Sci. Math. Szeged, 1959, v. 12, p. 19–24.
3. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
4. Гапошкин В. Ф. Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле случайных процессов и однородных случайных полей. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 2, с. 295–319.
5. Гапошкин В. Ф. Одна теорема о сходимости почти всюду последовательности измеримых функций и ее применения к последовательностям стохастических интегралов. — Матем. сб., 1977, т. 104, № 1, с. 3–21.
6. Гапошкин В. Ф. Оценки средних для почти всех реализаций стационарных процессов. — Сиб. матем. журн., 1979, т. 20, № 5, с. 978–989.
7. Гапошкин В. Ф. О зависимости скорости сходимости в усиленном законе больших чисел для стационарных процессов от скорости убывания корреляционной функции. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, в. 4, с. 720–733.

Поступила в редакцию
6.IV.2010

© 2010 г.

КУЗНЕЦОВА А. А.*

УСЛОВНАЯ ЭНТРОПИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

В работе дается общее определение условной энтропии для бесконечномерных квантовых систем, использующее результаты работы [8], относящиеся к свойствам взаимной информации и когерентной информации в бесконечномерном случае. Также обобщаются на бесконечномерный случай основные свойства условной энтропии: монотонность, вогнутость, субаддитивность.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет; e-mail: kelit@list.ru

Ключевые слова и фразы: условная энтропия, энтропия фон Неймана, относительная энтропия, взаимная информация, квантовый канал.

1. Введение. В теории информации важную роль играет понятие условной энтропии, которая определяется в терминах условного распределения случайных величин X, Y , см., например, [1]. Для дискретных случайных величин имеет место формула $H(X|Y) = H(XY) - H(X)$, где $H(\cdot)$ — энтропия Шеннона. Аналог этой формулы используется в квантовой теории информации для определения условной энтропии двух квантовых систем в конечномерных гильбертовых пространствах [2], [3], при этом вместо энтропии Шеннона используется энтропия фон Неймана операторов плотности. Квантовая условная энтропия является важной характеристикой, с помощью которой выражаются пропускные способности квантовых каналов [5]. Заметим, что в отличие от своего классического аналога квантовая условная энтропия может принимать отрицательные значения, причем этот феномен допускает операциональное истолкование [4].

В последнее время в квантовой теории информации все большее внимание привлекают бесконечномерные системы [8], [9], [12]. Необходимость подходящего обобщения определения условной энтропии на бесконечномерный случай подчеркнута, например, в [10]. Настоящая работа посвящена изучению условной энтропии квантовых систем в бесконечномерных гильбертовых пространствах. Если в конечномерных пространствах энтропия является непрерывной и ограниченной функцией на множестве операторов плотности, то в бесконечномерном случае она лишь полунепрерывна снизу и может принимать значение $+\infty$, более того, множество состояний с конечной энтропией является подмножеством первой категории [6]. В случае бесконечномерных пространств определение условной энтропии как разности энтропий фон Неймана слишком ограничительно, поскольку возможно возникновение неопределенности, если каждая из энтропий бесконечна.

Таким образом, первой задачей было нахождение подходящего определения, которое обобщало бы определение в конечномерном случае, но исключало неопределенность. При условии конечности энтропии первой из систем такое определение можно ввести, используя результаты работы [8], относящиеся к свойствам когерентной информации в бесконечномерном случае. Введенное определение обеспечивает корректность, более того, позволяет доказать, что условная энтропия также может принимать только конечные значения.

Другим результатом является доказательство в бесконечномерном случае основных свойств условной энтропии: монотонности, вогнутости, субаддитивности. В конечномерном случае доказательство вогнутости, описанное в работе [6], существенно использует конечномерность пространства, а доказательства субаддитивности и монотонности основаны на свойстве субаддитивности энтропии. В настоящей работе доказательства вогнутости и субаддитивности даются с помощью приближения состояниями конечного ранга.

2. Предварительные сведения. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Будем обозначать $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ — конус положительных операторов в $\mathcal{H}$ с конечным следом, а $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ — выпуклое подмножество операторов плотности, т.е. положительных операторов с единичным следом: $\rho \geq 0, \text{Tr } \rho = 1$.

О п р е д е л е н и е 1. Энтропия фон Неймана состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ определяется соотношением

$$H(\rho) = \text{Tr } \eta(\rho), \quad \eta(x) = \begin{cases} -x \log x, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Наряду с определением 1 будем использовать расширение определения энтропии фон Неймана на $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$, а именно [7]

$$H(\rho) = -\text{Tr } \rho \log \rho - \eta(\text{Tr } \rho), \quad \rho \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H}).$$

Энтропия является неотрицательной вогнутой полунепрерывной снизу функцией как на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, так и на множестве $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$.

О п р е д е л е н и е 2 (см. [7]). *Относительной энтропией* операторов $\rho, \sigma \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ называется величина

$$H(\rho \| \sigma) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} \langle i | (\rho \log \rho - \rho \log \sigma + \sigma - \rho) | i \rangle, & \text{supp } \rho \subseteq \text{supp } \sigma, \\ +\infty, & \text{supp } \rho \not\subseteq \text{supp } \sigma, \end{cases}$$

где $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ — ортонормированный базис собственных векторов оператора ρ ; ряд состоит из неотрицательных членов и его сумма принимает значения в $[0; +\infty]$.

Потребуется следующие леммы о предельных значениях энтропии и относительной энтропии. Сходимость квантовых состояний будет пониматься как сходимость операторов плотности по ядерной норме к предельному оператору, что равносильно слабой операторной сходимости (см. [11], [12]). При этом энтропия и относительная энтропия являются полунепрерывными снизу функциями [6].

Лемма 1 (см. [7, лемма 4]). Пусть $\{P_n\}$ — неубывающая последовательность конечномерных проекторов, сходящаяся к единичному оператору $I_{\mathcal{H}}$ в сильной операторной топологии, ρ — положительный ядерный оператор. Тогда последовательности $\{H(P_n \rho P_n)\}$ и $\{H(P_n \rho P_n \| P_n \sigma P_n)\}$ являются неубывающими, причем

$$H(\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(P_n \rho P_n) \quad \text{и} \quad H(\rho \| \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(P_n \rho P_n \| P_n \sigma P_n).$$

Лемма 2 (см. [6]). Пусть ρ_n, ρ — положительные компактные операторы, $\lim \rho_n = \rho$. Тогда если существует компактный оператор σ такой, что $\rho_n \leq \sigma$, $H(\sigma) < +\infty$, то $\lim H(\rho_n) = H(\rho)$.

Лемма 3 (см. [8, лемма 7]). Пусть $\{\rho_n\}$ — последовательность операторов из $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$, сходящаяся к оператору ρ , причем $\rho_n \leq \rho$ при всех n , тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(\rho_n \| \sigma) = H(\rho \| \sigma) \quad \text{для любого оператора } \sigma \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H}).$$

Нам также понадобятся определения квантового канала, взаимной информации и когерентной информации.

Пусть заданы квантовые системы A, B, E , описываемые гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_E$ соответственно (пространства могут быть как конечной, так и бесконечной размерности) и изометрический оператор $V: \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$. Тогда соотношения

$$\Phi(\rho_A) = \text{Tr}_E V \rho_A V^*, \quad \tilde{\Phi}(\rho_A) = \text{Tr}_B V \rho_A V^*, \quad \rho_A \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A), \quad (2)$$

описывают *квантовые каналы* (т.е. вполне положительные, сохраняющие след отображения) $\Phi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ и $\tilde{\Phi}: \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}_E)$, которые являются *взаимно комплементарными* в смысле [5].

Теперь введем эталонную систему $\mathcal{H}_R \cong \mathcal{H}_A$, рассмотрим очищение ρ_{AR} состояния ρ_A и заметим, что ρ_{BRE} — чистое состояние, полученное в результате действия $V \otimes I_R$ на ρ_{AR} . *Взаимной информацией* квантового канала Φ и входного состояния ρ_A называется в конечномерном и бесконечномерном случаях величина (см. [2], [3])

$$I(\rho_A, \Phi) = H(\rho_{BR} \| \rho_B \otimes \rho_R).$$

Когерентная информация состояния ρ_A с конечной энтропией $H(\rho_A)$ определяется как (см. [8])

$$I_c(\rho_A, \Phi) = I(\rho_A, \Phi) - H(\rho_A). \quad (3)$$

В работе [8] доказано, что когерентная информация, при условии конечности энтропии входного состояния, удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} -H(\rho_A) &\leq I_c(\rho_A, \Phi) \leq H(\rho_A), \\ I_c(\rho_A, \Phi) + I_c(\rho_A, \tilde{\Phi}) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Определение условной энтропии. Пусть даны два гильбертова пространства $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$, с условием $\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B < \infty$, ρ_{AB} — совместное состояние квантовых систем A и B , ρ_A, ρ_B — соответствующие частичные состояния. Условной энтропией называется величина

$$H(A|B) = H(\rho_{AB}) - H(\rho_B). \quad (5)$$

В случае конечномерных гильбертовых пространств условная энтропия всегда определена и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В случае же бесконечномерных пространств возможно возникновение неопределенности вида « $\infty - \infty$ », поэтому предлагается следующее определение

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ — произвольные гильбертовы пространства, $\rho_{AB} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$, $H(\rho_A) < +\infty$. Тогда условная энтропия определяется соотношением

$$H(A|B) = H(\rho_A) - H(\rho_{AB} \| \rho_A \otimes \rho_B). \quad (6)$$

Легко видеть, что условная энтропия, заданная соотношением (6), будет совпадать с (5) на состояниях конечного ранга, так как

$$H(\rho_{AB} \| \rho_A \otimes \rho_B) = H(\rho_A) + H(\rho_B) - H(\rho_{AB}).$$

При этом благодаря условию $H(\rho_A) < +\infty$ определение 3 корректно. Из неравенств $H(\rho_A) < +\infty$, $H(\rho_{BA} \| \rho_B \otimes \rho_A) \geq 0$ следует, что

$$-\infty \leq H(A|B) \leq H(A). \quad (7)$$

(Здесь и далее используется обозначение $H(A) = H(\rho_A)$).

Теперь предположим, что задана такая очищающая система C , что состояние ρ_{ABC} — чистое. Рассмотрим канал $\Phi = \text{Tr}_C: \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ и заметим, что комплементарным к нему будет канал $\tilde{\Phi} = \text{Tr}_B: \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}_C)$. Записав определение (3) когерентной информации каналов Φ и $\tilde{\Phi}$ на состоянии ρ_{BC} , имеем

$$\begin{aligned} I_c(\rho_{BC}, \text{Tr}_C) &= H(\rho_{AB} \| \rho_A \otimes \rho_B) - H(\rho_{BC}) = H(\rho_{AB} \| \rho_A \otimes \rho_B) - H(\rho_A) = -H(A|B), \\ I_c(\rho_{BC}, \text{Tr}_B) &= H(\rho_{AC} \| \rho_A \otimes \rho_C) - H(\rho_{BC}) = H(\rho_{AC} \| \rho_A \otimes \rho_C) - H(\rho_A) = -H(A|C). \end{aligned}$$

Здесь мы пользуемся тем, что $H(\rho_{BC}) = H(\rho_A)$, так как состояние ρ_{ABC} — чистое.

Так как когерентная информация $I(\rho, \Phi)$ для любого канала Φ и входного состояния ρ принимает значения в промежутке $[-H(\rho), H(\rho)]$, то аналогичное соотношение верно и для условной энтропии:

$$-H(A) \leq H(A|B) \leq H(A).$$

Пользуясь уже упомянутым результатом (4) для когерентной информации получаем важное тождество

$$H(A|B) + H(A|C) = 0,$$

которое имеет место в случае, когда совместное состояние ρ_{ABC} систем A, B, C чистое.

4. Свойства условной энтропии. В конечномерном случае условная энтропия монотонна, вогнута как функция совместного состояния ρ_{AB} и обладает свойством субаддитивности. Эти свойства допускают обобщение и на бесконечномерный случай и будут доказаны в предложении 1. Для доказательства нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 4. Пусть ρ_{AB} — состояние в $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, ρ_A, ρ_B — частичные состояния. Рассмотрим произвольные возрастающие последовательности конечномерных

проекторов P_n^A , P_k^B , сильно сходящиеся к I_A , I_B соответственно, и оператор плотности

$$\rho_{AB}^{nk} = \lambda_{nk}^{-1} (P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB} P_n^A \otimes P_k^B), \quad \lambda_{nk} = \text{Tr} (P_n^A \otimes P_k^B) \rho_{AB},$$

с частичными состояниями ρ_A^{nk} и ρ_B^{nk} . Тогда

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} H(A_{nk} | B_{nk}) = H(A | B),$$

где, по определению, $H(A_{nk} | B_{nk}) = H(\rho_A^{nk}) - H(\rho_{AB}^{nk} \| \rho_A^{nk} \otimes \rho_B^{nk})$.

Доказательство. Так как энтропия фон Неймана полунепрерывна снизу, то

$$\liminf_{n,k \rightarrow \infty} H(\lambda_{nk} \rho_A^{nk}) \geq H(\rho_A).$$

С другой стороны, по лемме 1

$$H(\lambda_{nk} \rho_A^{nk}) = H(P_n^A (\text{Tr}_B I \otimes P_k^B \rho_{AB} I \otimes P_k^B) P_n^A) \leq H(\text{Tr}_B I \otimes P_k^B \rho_{AB} I \otimes P_k^B).$$

В свою очередь, по лемме 2

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} H(\text{Tr}_B I \otimes P_k^B \rho_{AB} I \otimes P_k^B) = H(\rho_A),$$

так как $\text{Tr}_B (I \otimes P_k^B \rho_{AB} I \otimes P_k^B) \leq \rho_A$, $H(\rho_A) < +\infty$. Таким образом, по теореме о пределе промежуточной последовательности получаем, что

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} H(\lambda_{nk} \rho_A^{nk}) = H(\rho_A), \text{ а следовательно и } \lim_{n,k \rightarrow \infty} H(\rho_A^{nk}) = H(\rho_A).$$

Теперь покажем, что $\lim_{n,k \rightarrow \infty} H(\rho_{AB}^{nk} \| \rho_A^{nk} \otimes \rho_B^{nk}) = H(\rho_{AB} \| \rho_A \otimes \rho_B)$. Для этого введем величины

$$\begin{aligned} H_{nk} &= H(\rho_{AB}^{nk} \| \rho_A^{nk} \otimes \rho_B^{nk}) = H(\rho_A^{nk}) + H(\rho_B^{nk}) - H(\rho_{AB}^{nk}), \\ \tilde{H}_{nk} &= H(\rho_{AB}^{nk} \| \mu_n^{-1} P_n^A \rho_A P_n^A \otimes \eta_k^{-1} P_k^B \rho_B P_k^B) \\ &= -H(\rho_{AB}^{nk}) - \text{Tr}(\rho_A^{nk}) \log(\mu_n^{-1} P_n^A \rho_A P_n^A) - \text{Tr}(\rho_B^{nk}) \log(\eta_k^{-1} P_k^B \rho_B P_k^B), \end{aligned}$$

где

$$\mu_n = \text{Tr} P_n^A \rho_A, \quad \eta_k = \text{Tr} P_k^B \rho_B.$$

По лемме 1

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} \tilde{H}_{nk} = \lim_{n,k \rightarrow \infty} H(P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB} P_n^A \otimes P_k^B \| P_n^A \rho_A P_n^A \otimes P_k^B \rho_B P_k^B) = H(\rho_{AB} \| \rho_A \otimes \rho_B).$$

Теперь рассмотрим разность H_{nk} и $\tilde{H}_{nk}$; приведя подобные слагаемые, получим, что она стремится к нулю:

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} (H_{nk} - \tilde{H}_{nk}) = \lim_{n,k \rightarrow \infty} (H(\rho_A^{nk} \| \mu_n^{-1} P_n^A \rho_A P_n^A) + H(\rho_B^{nk} \| \eta_k^{-1} P_k^B \rho_B P_k^B)) = 0.$$

Последний двойной предел равен нулю, поскольку из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq H(\lambda_{nk} \rho_A^{nk} \| P_n^A \rho_A P_n^A) = H(P_n^A \text{Tr}_B (I_A \otimes P_k^B \rho_{AB} I_A \otimes P_k^B) P_n^A \| P_n^A \rho_A P_n^A) \\ &\leq H(\text{Tr}_B (I_A \otimes P_k^B \rho_{AB} I_A \otimes P_k^B) \| \rho_A), \end{aligned}$$

а так как по лемме 3

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} H(\text{Tr}_B (I_A \otimes P_k^B \rho_{AB} I_A \otimes P_k^B) \| \rho_A) = H(\rho_A \| \rho_A) = 0,$$

то по теореме о промежуточной последовательности

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} H(\lambda_{nk} \rho_A^{nk} \| P_n^A \rho_A P_n^A) = \lim_{n,k \rightarrow \infty} H(\rho_A^{nk} \| \mu_n^{-1} P_n^A \rho_A P_n^A) = 0.$$

Полностью аналогично доказывается равенство нулю предела второго слагаемого разности H_{nk} и $\tilde{H}_{nk}$:

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} H(\rho_B^{nk} \| \eta_k^{-1} P_k^B \rho_B P_k^B) = 0.$$

Окончательно получаем, что

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} H(\rho_{AB}^{nk} \| \rho_A^{nk} \otimes \rho_B^{nk}) = H(\rho_{AB} \| \rho_A \otimes \rho_B) \text{ и } \lim_{n,k \rightarrow \infty} H(A_{nk} | B_{nk}) = H(A | B).$$

Лемма 4 доказана.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству свойств условной энтропии.

Предложение 1. Пусть $H(\rho_A) < +\infty$. Функция $H(A | B)$ обладает следующими свойствами:

1) монотонность, пусть даны три системы A, B, C , тогда

$$H(A | BC) \leq H(A | B); \quad (8)$$

2) вогнутость по ρ_{AB} , т.е. если $\rho_{AB} = \alpha \rho_{AB}^1 + (1 - \alpha) \rho_{AB}^2$, $\alpha \in [0, 1]$, то

$$H(A | B) \geq \alpha H(A^1 | B^1) + (1 - \alpha) H(A^2 | B^2); \quad (9)$$

3) субаддитивность условной энтропии, т.е. в условиях $H(\rho_A) < \infty$ и $H(\rho_B) < \infty$ выполняется

$$H(AB | CD) \leq H(A | C) + H(B | D). \quad (10)$$

До к а з а т е л ь с т в о. 1) Запишем неравенство (8) в следующем виде:

$$H(\rho_A) - H(\rho_{ABC} \| \rho_A \otimes \rho_{BC}) \leq H(\rho_A) - H(\rho_{AB} \| \rho_A \otimes \rho_B),$$

что равносильно

$$H(\rho_{AB} \| \rho_A \otimes \rho_B) \leq H(\rho_{ABC} \| \rho_A \otimes \rho_{BC}),$$

а последнее неравенство верно в силу монотонности относительной энтропии по отношению к взятию частичного следа.

2) Вогнутость докажем с помощью приближения состояниями конечного ранга. Снова рассмотрим произвольные возрастающие последовательности проекторов P_n^A, P_k^B , сильно сходящихся к I_A, I_B соответственно, и оператор плотности

$$\rho_{AB}^{nk} = \lambda_{nk}^{-1} (P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB} P_n^A \otimes P_k^B), \quad \lambda_{nk} = \text{Tr} (P_n^A \otimes P_k^B) \rho_{AB}$$

с частичными состояниями ρ_A^{nk} и ρ_B^{nk} .

Пусть $\rho_{AB} = \alpha \rho_{AB}^1 + (1 - \alpha) \rho_{AB}^2$, $\alpha \in [0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho_{AB}^{nk} &= \lambda_{nk}^{-1} P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB} P_n^A \otimes P_k^B \\ &= \frac{\alpha (P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^1 P_n^A \otimes P_k^B) + (1 - \alpha) (P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^2 P_n^A \otimes P_k^B)}{\alpha \text{Tr} (P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^1) + (1 - \alpha) \text{Tr} (P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^2)} \\ &= \frac{\theta_{nk}^1 \rho_{AB}^{1nk} + \theta_{nk}^2 \rho_{AB}^{2nk}}{\theta_{nk}^1 + \theta_{nk}^2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{nk}^1 &= \alpha \text{Tr} P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^1, \quad \rho_{AB}^{1nk} = \frac{\alpha P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^1 P_n^A \otimes P_k^B}{\theta_{nk}^1}, \\ \theta_{nk}^2 &= (1 - \alpha) \text{Tr} P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^2, \quad \rho_{AB}^{2nk} = \frac{(1 - \alpha) P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^2 P_n^A \otimes P_k^B}{\theta_{nk}^2}. \end{aligned}$$

В силу вогнутости условной энтропии на состояниях конечного ранга можно записать, что

$$H(A_{nk} | B_{nk}) \geq \frac{\theta_{nk}^1}{\theta_{nk}^1 + \theta_{nk}^2} H(A_{nk}^1 | B_{nk}^1) + \frac{\theta_{nk}^2}{\theta_{nk}^1 + \theta_{nk}^2} H(A_{nk}^2 | B_{nk}^2).$$

Переходя к пределу и используя лемму 4, получаем доказательство вогнутости условной энтропии.

3) В конечномерном случае из определения (5) можно получить равенство

$$H(AB|CD) = H(A|CD) + H(B|CD) - (H(A|CD) - H(A|BCD)), \quad (11)$$

из которого следует, что

$$H(AB|CD) \leq H(A|CD) + H(B|CD), \quad (12)$$

так как выражение в скобках в (11) всегда неотрицательно. С помощью приближения докажем в бесконечномерном случае неравенство (12), из которого можно сразу получить утверждение (10), применив свойство монотонности условной энтропии.

Пусть дано состояние $\rho_{ABCD} = \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_D)$. Рассмотрим $\{P_l^{CD}\}$ — произвольную возрастающую последовательность конечномерных проекторов, сильно сходящуюся к I_{CD} . Также рассмотрим последовательность состояний

$$\rho^l = \tau_l^{-1}(I_A \otimes I_B \otimes P_l^{CD})\rho(I_A \otimes I_B \otimes P_l^{CD}), \quad \tau_l = \text{Tr}(I_A \otimes I_B \otimes P_l^{CD})\rho.$$

Для состояния ρ^l соотношение (11) (а значит и (12)) выполняется, поскольку все входящие в него величины остаются конечными.

Докажем, например, что

$$H(A^l|CD^l) \rightarrow H(A|CD). \quad (13)$$

Действительно, используя определение 3, запишем, что

$$H(A^l|CD^l) = H(\rho_A^l) - H(\rho_{ACD}^l \| \rho_A^l \otimes \rho_{CD}^l).$$

По лемме 2

$$\lim_{l \rightarrow \infty} H(\rho_A^l) = \lim_{l \rightarrow \infty} H(\tau_l^{-1} \text{Tr}_{BCD}(I_A \otimes I_B \otimes P_l^{CD})\rho) = H(\rho_A).$$

Далее, рассмотрим величины

$$H_l = H(\rho_{ACD}^l \| \rho_A^l \otimes \rho_{CD}^l) = -H(\rho_{ACD}^l) + H(\rho_A^l) + H(\rho_{CD}^l).$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{H}_l &= H(\rho_{ACD}^l \| \rho_A \otimes \rho_{CD}^l) \\ &= H(\tau_l^{-1} I_A \otimes P_l^{CD} [\rho_{ACD}] I_A \otimes P_l^{CD} \| \rho_A \otimes \tau_l^{-1} P_l^{CD} [\rho_{CD}] P_l^{CD}) \\ &= -H(\rho_{ACD}^l) + H(\rho_{CD}^l) + \text{Tr}(\tau_l^{-1} \text{Tr}_{CD} I_A \otimes P_l^{CD} [\rho_{ACD}])(-\log \rho_A). \end{aligned}$$

По лемме 1

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{H}_l = H(\rho_{ACD} \| \rho_A \otimes \rho_{CD}).$$

С другой стороны, после приведения подобных слагаемых, получаем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (\tilde{H}_l - H_l) = \lim_{l \rightarrow \infty} H(\tau_l^{-1} \text{Tr}_{CD} I_A \otimes P_l^{CD} [\rho_{ACD}] \| \rho_A) = 0$$

по лемме 3. Это означает, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} H(\rho_{ACD}^l \| \rho_A^l \otimes \rho_{CD}^l) = H(\rho_{ACD} \| \rho_A \otimes \rho_{CD}) \quad \text{и} \quad \lim_{l \rightarrow \infty} H(A^l|CD^l) = H(A|CD).$$

Аналогично можно показать, что $H(B^l|CD^l) \rightarrow H(B|CD)$ и $H(AB^l|CD^l) \rightarrow H(AB|CD)$, откуда будет следовать выполнение неравенства (12) в бесконечномерном случае, а значит и субаддитивность условной энтропии. Предложение 1 доказано.

Также можно получить критерий непрерывности функции $H(A|B)$, предложенный М. Е. Широковым.

Предложение 2. Пусть $\mathcal{A}$ — такое подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$, что энтропия фон Неймана непрерывна на множестве $\mathcal{A}^B = \text{Tr}_B \mathcal{A} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$. Тогда функция $H(A|B)$ непрерывна как функция ρ_{AB} на множестве $\mathcal{A}$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность состояний $\{\rho_n\} \subset \mathcal{A}$, сходящихся к $\rho_0 \in \mathcal{A}$. Известно, что тогда найдется последовательность соответствующих очищений $\{\hat{\rho}_n\} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C)$, сходящихся к очищению $\hat{\rho}_0 \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C)$ состояний ρ_0 . Последовательность $\{\text{Tr}_A \hat{\rho}_n\}$ сходится к $\text{Tr}_A \hat{\rho}_0$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\text{Tr}_A \hat{\rho}_n) = H(\text{Tr}_A \hat{\rho}_0)$, поскольку $H(\text{Tr}_A \hat{\rho}_n) = H(\text{Tr}_{BC} \hat{\rho}_n)$. Согласно предположению 4 работы [8] когерентная информация $I_c(\rho, \Phi)$ непрерывна на тех подмножествах множества состояний, на которых непрерывна энтропия $H(\rho)$ (при условии ее конечности). Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_c(\text{Tr}_A \hat{\rho}_n, \text{Tr}_C) = I_c(\text{Tr}_A \hat{\rho}_0, \text{Tr}_C).$$

Предложение 2 доказано.

Очевидно, что возможно естественное расширение области определения $H(A|B)$ на состояния ρ_{AB} с условиями $H(B) < \infty$ или $H(AB) = H(C) < \infty$. (Под системой C , как и в определении условной энтропии, понимается очищающая система.) При таких ограничениях условную энтропию можно определить, как в конечномерном случае, соотношением (5); при этом она будет принимать значения в промежутке $[-H(B); +\infty]$ при $H(B) < \infty$ и $[-\infty; H(C)]$ при $H(C) < \infty$.

Указанные выше свойства условной энтропии (монотонность, субаддитивность, вогнутость) сохраняются в бесконечномерном случае. Монотонность и субаддитивность могут быть доказаны аналогично соответствующим доказательствам в конечномерном случае с использованием свойства субаддитивности энтропии фон Неймана. Вогнутость можно доказать с помощью следующего рассуждения.

Рассмотрим состояние ρ_{AB} и спектральные представления его частичных состояний

$$\begin{aligned} \rho_A &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i |i\rangle \langle i|, \\ \rho_B &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j |j\rangle \langle j|, \end{aligned}$$

где $\{|i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$, $\{|j\rangle\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированные базисы собственных векторов ρ_A и ρ_B в пространствах $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ соответственно. Рассмотрим возрастающие последовательности спектральных проекторов $P_n^A = \sum_{i=1}^n |i\rangle \langle i|$, $P_k^B = \sum_{j=1}^k |j\rangle \langle j|$ и состояние

$$\rho_{AB}^{nk} = \lambda_{nk}^{-1} (P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB} P_n^A \otimes P_k^B), \quad \lambda_{nk} = \text{Tr} (P_n^A \otimes P_k^B) \rho_{AB}$$

с частичными состояниями ρ_A^{nk} и ρ_B^{nk} .

Далее действуем аналогично доказательству вогнутости в предложении 1. Пусть $\rho_{AB} = \alpha \rho_{AB}^1 + (1 - \alpha) \rho_{AB}^2$, $\alpha \in [0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho_{AB}^{nk} &= \lambda_{nk}^{-1} P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB} P_n^A \otimes P_k^B \\ &= \frac{\alpha (P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^1 P_n^A \otimes P_k^B) + (1 - \alpha) (P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^2 P_n^A \otimes P_k^B)}{\alpha \text{Tr} (P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^1) + (1 - \alpha) \text{Tr} (P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^2)} \\ &= \frac{\theta_{nk}^1 \rho_{AB}^{1nk} + \theta_{nk}^2 \rho_{AB}^{2nk}}{\theta_{nk}^1 + \theta_{nk}^2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{nk}^1 &= \alpha \text{Tr} P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^1, \quad \rho_{AB}^{1nk} = \frac{\alpha P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^1 P_n^A \otimes P_k^B}{\theta_{nk}^1}, \\ \theta_{nk}^2 &= (1 - \alpha) \text{Tr} P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^2, \quad \rho_{AB}^{2nk} = \frac{(1 - \alpha) P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB}^2 P_n^A \otimes P_k^B}{\theta_{nk}^2}. \end{aligned}$$

Записав условие вогнутости для состояний конечного ранга, имеем

$$H(\rho_{AB}^{nk}) - H(\rho_B^{nk}) \geq \frac{\theta_{nk}^1}{\theta_{nk}^1 + \theta_{nk}^2} (H(\rho_{AB}^{1nk}) - H(\rho_B^{1nk})) + \frac{\theta_{nk}^2}{\theta_{nk}^1 + \theta_{nk}^2} (H(\rho_{AB}^{2nk}) - H(\rho_B^{2nk})). \quad (14)$$

Заметим, что $\lambda_{nk}\rho_B^{nk} = P_k^B \text{Tr}_A(P_n^A \otimes I \rho_{AB} P_n^A \otimes I) P_k^B \leq P_k^B \rho_B P_k^B$ для любого k , поскольку для любого вектора $\varphi \in \mathcal{H}_B$ выполняется

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \langle i | \otimes \langle \varphi | (P_n^A \otimes P_k^B \rho_{AB} P_n^A \otimes P_k^B) | i \rangle \otimes | \varphi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle i | \otimes \langle \varphi | \left(\sum_{m=1}^n |m\rangle \langle m| \otimes P_k^B \rho_{AB} \sum_{m'=1}^n |m'\rangle \langle m'| \otimes P_k^B \right) | i \rangle \otimes | \varphi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle i | \otimes \langle \varphi P_k^B | \rho_{AB} | i \rangle \otimes | P_k^B \varphi \rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle i | \otimes \langle \varphi P_k^B | \rho_{AB} | i \rangle \otimes | P_k^B \varphi \rangle \\ &= \langle \varphi | P_k^B \rho_B P_k^B | \varphi \rangle. \end{aligned}$$

При этом заметим, что $H(P_k^B \rho_B P_k^B) < \infty$. Перейдем в неравенстве (14) сначала к пределу по n , а потом — по k . Применяя к слагаемым $H(\rho_{AB}^{nk})$, $H(\rho_{AB}^{ink})$, $i = 1, 2$, лемму 1, а к слагаемым $H(\rho_B^{nk})$, $H(\rho_B^{ink})$, $i = 1, 2$, лемму 2 (учитывая, что $H(P_k^B \rho_B P_k^B) < \infty$) и лемму 1, получаем свойство вогнутости.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 09-01-00424а.

Автор благодарит А. С. Холево и М. Е. Широкова за постановку задачи, обсуждение и помощь в подготовке публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cover T. M., Thomas J. A. Elements of Informational Theory. New York: Wiley, 1991, 542 p.
2. Adami C., Cerf N. J. Capacity of noisy quantum channel. — Phys. Rev. A., 1997, v. 56, p. 3470–3485; arXiv: quant-ph/9609024.
3. Barnum H., Nielsen M. A., Schumacher B. Information transmission through a noisy quantum channel. — Phys. Rev. A., 1998, v. 57, p. 4153–4175; arXiv:quant-ph/9702049.
4. Horodecki M., Oppenheim J., Winter A. Quantum state merging and negative information. — Comm. Math. Phys., 2007, v. 269, p. 107; arXiv:quant-ph/0512247.
5. Холево А. С. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010, 328 с.
6. Wehrl A. General properties of entropy. — Rev. Modern Phys., 1978, v. 50, № 2, p. 221–260.
7. Lindblad G. Expectations and entropy inequalities for finite quantum systems. — Commun. Math. Phys., 1974, v. 39, № 2, p. 111–119.
8. Холево А. С., Широков М. Е. Взаимная и когерентная информация для бесконечномерных квантовых каналов. — Проблемы передачи информации, 2010, т. 46, в. 3, с. 3–21; arXiv: 1004.2495.
9. Холево А. С., Широков М. Е. Об аппроксимации бесконечномерных квантовых каналов. — Проблемы передачи информации, 2008, т. 44, в. 2, с. 3–22; arXiv: 0711.2245.
10. Furrer F., Eberg J., Renner R. Min- and max-entropy in infinite dimensions. — arXiv: 1004.1386
11. Davies E. B. Quantum Theory of Open Systems. London: Academic Press, 1976, 171 p.
12. Холево А. С., Широков М. Е. Непрерывные ансамбли и пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 1. с. 98–114.

Поступила в редакцию
20.V.2010