Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Серов, Предельное распределение расстояния между случайной булевой функцией и множеством аффинных функций, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 4, 791–795

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 03:37:44

© 2010 г.

СЕРОВ А. А.*

**ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ
МЕЖДУ СЛУЧАЙНОЙ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ
И МНОЖЕСТВОМ АФФИННЫХ ФУНКЦИЙ¹⁾**

Доказана предельная теорема для расстояния Хемминга от случайной равновероятной булевой функции от n переменных до множества аффинных булевых функций от тех же переменных. Проведено сравнение с аналогичной теоремой, доказанной Б. В. Рязановым для расстояния до множества линейных булевых функций.

Ключевые слова и фразы: случайные булевы функции, аффинные булевы функции, расстояние Хемминга, предельные распределения.

1. Введение. Пусть $\mathbf{F}_2$ — поле из двух элементов. Для произвольного натурального числа n будем обозначать через V_n пространство n -мерных векторов с компонентами из $\mathbf{F}_2$. Между множеством $\mathbf{F}_2^{V_n} = \{f: V_n \rightarrow \mathbf{F}_2\}$ всех булевых функций от n переменных и пространством V_n можно установить взаимно однозначное соответствие, отождествляя функцию $f \in \mathbf{F}_2^{V_n}$ с вектором $\{f(x) | x \in V_n\}$.

Расстояние Хемминга $\rho(f, g)$ между булевыми функциями $f, g \in \mathbf{F}_2^{V_n}$ определяется как число значений аргумента $x \in V_n$, при которых $f(x) \neq g(x)$. Для произвольного множества булевых функций $A \subset \mathbf{F}_2^{V_n}$ и функции $f \in \mathbf{F}_2^{V_n}$ обозначим через $\rho(f, A) = \min_{g \in A} \rho(f, g)$ расстояние Хемминга от f до ближайшей к ней функции из множества A .

В множестве $\mathbf{F}_2^{V_n}$ всех булевых функций естественно выделяются класс линейных функций

$$\mathbf{L}_n = \{f \in \mathbf{F}_2^{V_n}: f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{F}_2\}$$

и класс аффинных функций

$$\mathbf{A}_n = \{f \in \mathbf{F}_2^{V_n}: f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n, a_0, \dots, a_n \in \mathbf{F}_2\},$$

где $\oplus$ — сложение в $\mathbf{F}_2$. Множество $\mathbf{L}_n$ состоит из $|\mathbf{L}_n| = 2^n$ элементов, множество $\mathbf{A}_n$ — из $|\mathbf{A}_n| = 2^{n+1}$ элементов.

Пусть $f \in \mathbf{F}_2^{V_n}$ — случайная булева функция, имеющая равномерное распределение на $\mathbf{F}_2^{V_n}$. При этом условии в [5] было доказано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\rho(f, \mathbf{L}_n) - c_n}{d_n} < x \right\} = 1 - e^{-e^x} \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

где

$$c_n = 2^{n-1} - 2^{(n-1)/2} \sqrt{\ln 2} \left(\sqrt{n} - \frac{\ln \ln 2^n + \ln 4\pi}{4\sqrt{n} \ln 2} \right), \quad d_n = \frac{2^{(n-1)/2}}{2\sqrt{n \ln 2}}.$$

Основным результатом настоящей статьи является аналогичная предельная теорема для случайной величины $\rho_n = \rho(f, \mathbf{A}_n)$.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: serov1984@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00078).

Теорема 1. Для любого фиксированного $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\rho(f, \mathbf{A}_n) - a_n}{b_n} \leq x \right\} = 1 - e^{-e^x}, \quad (2)$$

где

$$a_n = 2^{n-1} - 2^{(n-1)/2} \sqrt{\ln 2} \left(\sqrt{n+1} - \frac{\ln \ln 2^{n+1} + \ln 4\pi}{4\sqrt{n+1} \ln 2} \right), \quad b_n = \frac{2^{(n-1)/2}}{2\sqrt{(n+1) \ln 2}}.$$

З а м е ч а н и е. Так как при $n \rightarrow \infty$

$$c_n - a_n = 2^{(n-1)/2} \sqrt{\ln 2} \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right) \right) = \left(1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \right) d_n \ln 2,$$

$$\frac{d_n}{b_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\rho(f, \mathbf{A}_n) - c_n}{d_n} \leq x - \ln 2 \right\} = 1 - e^{-e^x},$$

т.е. типичные значения расстояния от случайной равновероятной булевой функции до множества аффинных функций асимптотически на $d_n \ln 2 = 2^{(n-1)/2} \sqrt{\ln 2 / (4n)}$ меньше типичных расстояний до множества линейных функций, и это различие имеет тот же порядок, что и длина интервала, содержащего основную массу значений $\rho(f, \mathbf{A}_n)$ или $\rho(f, \mathbf{L}_n)$.

Теорема 1, как и результат Б. В. Рязанова [5], относятся к «центральной» части распределений $\rho(f, \mathbf{A}_n)$ и $\rho(f, \mathbf{L}_n)$. В [7] доказаны неравенства, показывающие, что в области «больших отклонений» (когда $x \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$) правые части формул (1) и (2) не являются правильными асимптотиками вероятностей в их левых частях.

Мы получим теорему 1 как следствие более общей теоремы 2, в доказательстве которой используются идеи и результаты работ Б. В. Рязанова и С. И. Чечёты [2], [5].

Будем через $\mathbf{I}\{S\}$ обозначать индикатор события S .

Введем случайные величины

$$\xi_l(x) = \mathbf{I}\{f(x) = l(x)\}, \quad l \in \mathbf{A}_n, \quad x \in V_n,$$

$$\xi_l = \sum_{x \in V_n} \xi_l(x); \quad (3)$$

пусть

$$\xi_{[1]} \geq \xi_{[2]} \geq \dots \geq \xi_{[k]} \geq \dots \geq \xi_{[2^{n+1}]} \quad (4)$$

— вариационный ряд построенный по величинам ξ_l , $l \in \mathbf{A}_n$.

Если случайная функция f имеет равномерное распределение на $\mathbf{F}_2^{V_n}$, то для любой неслучайной функции $g \in \mathbf{F}_2^{V_n}$ и для каждого $x \in V_n$

$$\mathbf{P}\{\xi_g(x) = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_g(x) = 1\} = \frac{1}{2},$$

и индикаторы $\xi_g(x)$, $x \in V_n$, независимы.

Теорема 2. Пусть $0 < \lambda < \infty$, $c = 2^{n-1} + 2^{n/2-1}\tilde{c}$ и $n, \tilde{c} \rightarrow \infty$ так, что

$$\tilde{c} = (2 \ln 2^{n+1} - \ln \ln 2^{n+1} - \ln 4\pi\lambda^2 + o(1))^{1/2}. \quad (5)$$

Тогда для любого фиксированного $k = 1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_{[k]} < c\} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^j}{j!}. \quad (6)$$

Доказательство теоремы 2. Для любого действительного сведем случайные величины

$$\eta_l = \eta_l(c) = \mathbf{I}\{\xi_l \geq c\}, \quad \eta = \eta(c) = \sum_{l \in \mathbf{A}_n} \eta_l, \quad (7)$$

понятно, что $\mathbf{I}\{\xi_l \geq c\} = \mathbf{I}\{\rho(l, f) \leq 2^n - c\}$.

Очевидное тождество

$$\mathbf{P}\{\xi_{[k]} < c\} = \mathbf{P}\{\eta < k\}$$

позволяет свести задачу о распределении членов вариационного ряда (4) к задаче о распределении целочисленной случайной величины η , представленной в виде суммы зависимых индикаторов.

Пусть $l_1, \dots, l_m$ — различные аффинные функции, а G_m — множество всех наборов из m попарно различных аффинных функций. Обозначим

$$p(\vec{l}) = \mathbf{P}\{\xi_{l_i} \geq c, i = 1, \dots, m\}, \quad \vec{l} = (l_1, \dots, l_m) \in G_m.$$

Согласно теореме Б. А. Севастьянова [6], для доказательства теоремы 2 достаточно установить, что вероятности $p(\vec{l})$ при $n \rightarrow \infty$ удовлетворяют условиям

$$\max_{l_1 \in \mathbf{A}_n} p(l_1) \rightarrow 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l_1 \in \mathbf{A}_n} p(l_1) = \lambda, \quad (8)$$

и существуют такие исключительные множества $I_m(n) \subset G_m, n, m \geq 2$, наборов $\vec{l}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\vec{l} \in I_m(n)} p(\vec{l}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\vec{l} \in I_m(n)} p(l_1) \cdots p(l_m) = 0 \quad (9)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\vec{l} \in G_m \setminus I_m(n)} \left| \frac{p(\vec{l})}{p(l_1) \cdots p(l_m)} - 1 \right| = 0. \quad (10)$$

Из (3) и из равномерности распределения f на $\mathbf{F}_2^{V_n}$ следует, что случайная величина ξ_l представляет собой сумму 2^n независимых одинаково распределённых индикаторов $\xi_l(x), x \in V_n$. Поэтому

$$\mathbf{M}\xi_l = \sum_{x \in V_n} \mathbf{M}\xi_l(x) = 2^{n-1}, \quad \mathbf{D}\xi_l = 2^n \mathbf{D}\xi_l(x) = 2^{n-2}.$$

Центрирование и нормирование ξ_l даёт случайную величину $\tilde{\xi}_l = (\xi_l - \mathbf{M}\xi_l)/\sqrt{\mathbf{D}\xi_l}$, представимую в виде

$$\tilde{\xi}_l = \frac{2^n - 2 \sum_{x \in V_n} (f(x) \oplus l(x))}{2^{n/2}} = 2^{-n/2} \sum_{x \in V_n} (-1)^{f(x) \oplus l(x)}, \quad (11)$$

и

$$p(\vec{l}) = \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{l_i} \geq \tilde{c}, i = 1, \dots, m\}, \quad \tilde{c} = \frac{c - 2^{n-1}}{2^{n/2-1}}.$$

Из (5) видно, что $\tilde{c} = o(2^{n/6})$, поэтому, используя теорему о больших отклонениях [3, с. 622] и асимптотику хвоста функции стандартного нормального распределения $\Phi(x)$, находим, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_l \geq \tilde{c}\} \sim 1 - \Phi(\tilde{c}) \sim \frac{e^{-\tilde{c}^2/2}}{\sqrt{2\pi}\tilde{c}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (12)$$

откуда следует первая часть условия (8).

Подставляя выражение для $\tilde{c}$ в правую часть (12), получаем

$$\frac{e^{-\tilde{c}^2/2}}{\sqrt{2\pi}\tilde{c}} \sim \frac{\sqrt{4\pi\lambda^2 \ln 2^{n+1}}}{2^{n+1} \sqrt{4\pi(1 - (\ln \ln 2^{n+1} + \ln 4\pi\lambda^2)/(2 \ln 2^{n+1})) \ln 2^{n+1}}} \sim \frac{\lambda}{2^{n+1}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty; \quad (13)$$

отсюда следует вторая часть (8).

Для любых $n, m \geq 2$ и попарно различных аффинных функций $l_1, \dots, l_m$ обозначим

$$I_m(n) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq m} \{(l_1, \dots, l_m) \in G_m: l_i \oplus l_j \equiv 1\}.$$

Таким образом, если $\vec{l} \in G_m \setminus I_m(n)$, то для любых $1 \leq i < j \leq m$

$$\rho(l_i, l_j) = 2^{n-1}.$$

Оценим число элементов в множестве $I_m(n)$:

$$\begin{aligned} |I_m(n)| &= C_m^2 \left| \{ \vec{l} \in G_m: l_{m-1} \oplus l_m = 1 \} \right| \\ &= C_m^2 \left| \bigcup_{l_m \in \mathbf{A}_n} \{ \vec{l} \in G_{m-2}: l_1, \dots, l_{m-2} \notin \{l_m, l_m \oplus 1\} \} \right| \leq C_m^2 2^{n+1} (2^{n+1} - 2)^{[m-2]}, \end{aligned}$$

где $x^{[k]} = x(x-1) \cdots (x-k+1)$. Отсюда, из (12) и того, что $\tilde{c} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, следует, что при любом $m \geq 2$

$$\sum_{\vec{l} \in I_m(n)} p(l_1) \cdots p(l_m) \leq \frac{m(m-1)}{2} (2^{n+1} \Phi(-\tilde{c}))^{m-1} \Phi(-\tilde{c}) = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

т.е. выполняется второе равенство в (9).

Первая часть условия (9) выполняется, так как если $l_1, l_2 \in \mathbf{A}_n$ и $l_1 \oplus l_2 \equiv 1$, то $\tilde{\xi}_{l_1} = -\tilde{\xi}_{l_2}$ и события $\{\tilde{\xi}_{l_1} \geq \tilde{c}\}$, $\{\tilde{\xi}_{l_2} \geq \tilde{c}\}$ несовместны при $\tilde{c} > 0$.

Согласно (12) условие (10) принимает вид:

$$p(\vec{l}) = (1 + o(1)) \Phi^m(-\tilde{c}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (14)$$

равномерно по $\vec{l} \in G_m \setminus I_m(n)$.

Пусть $\vec{l} \in G_m \setminus I_m(n)$. Случайный вектор $\tilde{\xi}(\vec{l}) = (\tilde{\xi}_{l_1}, \dots, \tilde{\xi}_{l_m})$ представляет собой центрированную сумму 2^n независимых случайных векторов $(2^{-n/2} \xi_{l_1}(x), \dots, 2^{-n/2} \xi_{l_m}(x))$, $x \in V_n$. Обозначим через $M = (m_{ij})$ ковариационную матрицу вектора $\tilde{\xi}(\vec{l})$. Из (11) находим, что

$$m_{ij} = \mathbf{M} \tilde{\xi}_{l_i} \tilde{\xi}_{l_j} = \frac{1}{2^n} \mathbf{M} \sum_{x \in V_n} \sum_{y \in V_n} (-1)^{f(x) \oplus l_i(x) \oplus f(y) \oplus l_j(y)}.$$

Математические ожидания отдельных слагаемых из последней суммы, вследствие равномерности f и выбора $\vec{l}$, выглядят так:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(-1)^{f(x) \oplus l_i(x) \oplus f(y) \oplus l_j(y)} &= \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y, \end{cases} \quad \text{если } i = j; \\ \mathbf{M}(-1)^{f(x) \oplus l_i(x) \oplus f(y) \oplus l_j(y)} &= \begin{cases} (-1)^{l_i(x) \oplus l_j(x)}, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases} \quad \text{если } i \neq j. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$m_{ii} = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in V_n} 1 = 1,$$

а если $i \neq j$, то

$$m_{ij} = \frac{1}{2^n} \left(\sum_{x \in V_n} (-1)^{l_i(x) \oplus l_j(x)} + \sum_{x \in V_n} \sum_{y \in V_n \setminus \{x\}} \mathbf{M}(-1)^{f(x) \oplus l_i(x) \oplus f(y) \oplus l_j(y)} \right) = 0,$$

так как в силу условия $\vec{l} \in G_m \setminus I_m(n)$ функция $l_i(x) \oplus l_j(x)$ линейна и отлична от константы.

Тогда справедливость условия (14) вытекает из следствия 1 теоремы 3 работы [2] об асимптотике вероятности попадания суммы независимых случайных m -мерных векторов специального вида в область, получающуюся при сдвиге «положительного октанта» в $\mathbf{R}^m$ на вектор, все компоненты которого стремятся к $+\infty$.

Таким образом, доказано, что выполняются все условия теоремы Б. А. Севастьянова. Значит, распределение η сходится к распределению Пуассона, что эквивалентно утверждению теоремы 2.

Доказательство теоремы 1. Пусть $x \in \mathbf{R}$ — произвольное фиксированное число. Положим

$$\lambda = e^x, \quad c = 2^{n-1} + 2^{n/2-1}\tilde{c} \quad \text{и} \quad \tilde{c} = (2 \ln 2^{n+1} - \ln \ln 2^{n+1} - \ln 4\pi\lambda^2)^{1/2}.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ выполняются условия теоремы 2, откуда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta(c) = 0\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\rho(f, \mathbf{A}_n) > 2^n - c\} = e^{-e^x}. \quad (15)$$

Утверждение теоремы 1 состоит в том, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\rho(f, \mathbf{A}_n) - a_n}{b_n} \leq x\right\} = 1 - e^{-e^x}.$$

Из (15) следует, что доказательство теоремы 1 сводится к проверке соотношения

$$\frac{2^n - c - a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x. \quad (16)$$

По определению a_n и b_n

$$\frac{2^n - c - a_n}{b_n} = \frac{2^{(n-1)/2} \sqrt{\ln 2^{n+1}} (1 - (\ln \ln 2^{n+1} + \ln 4\pi) / (4 \ln 2^{n+1})) - 2^{(n-1)/2} (\tilde{c} / \sqrt{2})}{(2^{(n-1)/2}) / (2 \sqrt{\ln 2^{n+1}})};$$

отсюда и из равенства

$$\tilde{c} = \sqrt{2 \ln 2^{n+1}} \left(1 - \frac{\ln \ln 2^{n+1} + \ln 4\pi + 2x}{4 \ln 2^{n+1}} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) \right)$$

следует (16). Теорема 1 доказана.

Автор признателен А. М. Зубкову за постановку задачи и внимание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Логачев О. А., Сальников А. А., Яценко В. В.* Булевы функции в теории кодирования и криптологии. М.: МЦНМО, 2004.
2. *Рязанов Б. В., Чечёта С. И.* О приближении случайной булевой функции множеством квадратичных форм. — Дискретн. матем., 1995, т. 7, № 3, с. 129–145.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984.
4. *Чечёта С. И.* О предельном распределении расстояния между случайным вектором и некоторыми двоичными кодами. — Проблемы передачи информации, 1995, т. 31, № 1, с. 90–98.
5. *Ryazanov B. V.* Probabilistic methods in the theory of approximation of discrete functions. — Probab. Meth. Discr. Math., Proc. 3rd Int. Petrozavodsk Conf. TVP/VSP, Moscow, 1993, p. 403–412.
6. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. М.: Наука, 1976.
7. *Зубков А. М., Серов А. А.* Оценки числа булевых функций, имеющих аффинных приближения заданной точности. — Дискретн. матем., 2010, т. 22, № 4, с. 3–19.

Поступила в редакцию
20.V.2010