Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Шкляев, О больших отклонениях статистики Шеппа, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, том 55, выпуск 4, 796–803

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4284>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 07:50:55

© 2010 г.

ШКЛЯЕВ А. В.*

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ СТАТИСТИКИ ШЕППА

Для случайного блуждания S_n с шагами, подчиненными условию Крамера, в явном виде, включая константу, получена асимптотика при $n, m \rightarrow \infty$ больших ($\geq \theta n$) уклонений статистики Шеппа $\rho_{m,n} := \max_{k \leq m} \max_{i \leq n} (S_{k+i} - S_k)$. Выведены предельные теоремы для $\rho_{m,n}$ и $\tau_n(\theta) := \min\{m: \max_{k \leq n} (S_{k+m} - S_m) \geq \theta n\}$, а также функциональные предельные теоремы при условии большого уклонения статистики Шеппа.

Ключевые слова и фразы: условие Крамера, большие уклонения, предельные теоремы.

1. Введение. Рассмотрим случайное блуждание $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n = 1, 2, \dots$, $S_0 = 0$, с шагами $X_1, X_2, \dots$ — независимыми одинаково распределенными случайными величинами, X — их общее обозначение, Ω — пространство элементарных событий. Далее предполагается, что выполнены следующие условия:

- (А) $R(h) := \mathbf{E} e^{hX} < \infty$ при $0 < h < h^+$, $h^+ > 0$ (условие Крамера),
 (В) $\mathbf{E} X = 0$, X невырождена.

Для больших уклонений максимума $M_n := \max_{k \leq n} S_k$ случайного блуждания в [1] найдена асимптотика при $n \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{P}(M_n \geq \theta n - u) \sim D(\theta) e^{-\Lambda(\theta)n} e^{h_\theta u} n^{-1/2}, \quad D(\theta) = \frac{C(\theta)}{\sqrt{2\pi h_\theta} \sigma(h_\theta)}, \quad (1)$$

в [2] установлено, что (1) выполняется равномерно по θ из любого отрезка, содержащегося в $(0, m^+)$; величины m^+ , $C(\theta)$, h_θ , $\sigma(h)$, $\Lambda(\theta)$ определены ниже, символ $\sim$ связывает выражения, отношение которых стремится к единице. В работе [3] для условных вероятностей больших уклонений приращений $S_{n,m} := S_{n+m} - S_m$ случайного блуждания найдена следующая асимптотика при $n, m \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{P}(S_{n,m} \geq \theta n \mid S_{n,m-1} < \theta n, \dots, S_{n,0} < \theta n) \sim q(\theta) \mathbf{P}(S_n \geq \theta n), \quad (2)$$

причем для $q(\theta)$ дано явное выражение. Соотношение (2) позволяет находить (см. [3]) асимптотики вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}(\tilde{\rho}_{n,m} \geq \theta n)$ величин $\tilde{\rho}_{n,m} := \max_{k \leq m} S_{n,k}$, получать предельные теоремы для величин $\tilde{\tau}_n(\theta) := \min\{m: S_{n,m} \geq \theta n\}$ и $\tilde{\rho}_{n,m}$ при $n \rightarrow \infty$ при условии большого уклонения. В данной заметке изучаются большие уклонения статистики Шеппа $\rho_{n,m} := \max_{k \leq m} M_{n,k}$, где $M_{n,k} = \max_{l \leq n} S_{l,k}$ ($M_{n,k} \stackrel{d}{=} M_n$). Для величин $M_{n,k}$ доказывается аналог соотношения (2), находится явное выражение для множителя $p(\theta)$, играющего ту же роль, что $q(\theta)$ в (2), доказываются предельные теоремы для величин $\rho_{n,m}$ и $\tau_n(\theta) := \min\{m: M_{n,m} \geq \theta n\} \equiv \min\{m: \rho_{n,m} \geq \theta n\}$. Мы опираемся на подход работы [3]. Принципиальным оказывается нахождение явного выражения для $p(\theta)$. Ниже рассматривается случай нерешетчатого распределения вероятностей X . В решетчатом случае изменения несущественны.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра математической статистики и случайных процессов, Ленинские горы, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; ashklyayev@gmail.com

2. Основные результаты. Введем ряд величин, используемых в теории больших отклонений (см. [1]–[3]): $m(h) := R'(h)/R(h)$, $\sigma^2(h) := m'(h)$, $m^+ := \lim_{h \rightarrow h^+ - 0} m(h)$, h_θ — решение уравнения $m(h) = \theta$ (в силу монотонности $m(h)$ это решение единственно), $\Lambda(\theta) := \theta h_\theta - \ln R(h_\theta)$, и положим $p_-(l) := \mathbf{P}(S_1 \leq 0, \dots, S_l \leq 0)$. Для любого $\theta \in (0, m^+)$ введем сопряженную к $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ функцию распределения $F^\theta(x) = R(h_\theta)^{-1} \int_{-\infty}^x e^{h_\theta y} dF(y)$. Обозначим через X^θ случайную величину с функцией распределения F^θ , и пусть $X_1^\theta, X_2^\theta, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F^θ и $S_n^\theta = \sum_{i=1}^n X_i^\theta$ (здесь и далее блуждания S_n и S_n^θ предполагаются независимыми). Для величин, связанных с блужданием S_n^θ , будут использоваться те же обозначения, что и для блуждания S_n , но с добавлением верхнего индекса θ . Для множителя $C(\theta)$ в (1) в [2] указано выражение

$$C(\theta) = \mathbf{P}(S_j^\theta > 0, 1 \leq j \leq \infty) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_j < 0, 1 \leq j \leq k) R(h_\theta)^{-k},$$

в [1] для $C(\theta)$ найдено выражение несколько иное по форме. Для блуждания S_n и произвольного $v > 0$ введем следующие лестничные моменты и высоты:

$$\begin{aligned} L_{1,m,v} &= \min\{k > m: S_{k,m} > v\} - m, & H_{1,m,v} &= S_{L_{1,m,v},m}, \\ L_{i+1,m,v} &= \min\{k: S_{k,m} > H_{i,m,v}\} - m, & H_{i+1,m,v} &= S_{L_{i+1,m,v},m}, \\ N_{n,m,v} &= \max\{k: L_{k,m,v} < n\}, & \tau_{n,m} &= \min\{l: S_{l,m} \geq S_{i,m} \forall i \leq n\}. \end{aligned}$$

Теорема 1. При $n, m \rightarrow \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$, $|u| \leq \gamma_n = o(\sqrt{n})$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(M_{n,m} \geq \theta n - u \mid M_{n,i} < \theta n - u, i = 1, \dots, m-1) \sim p(\theta) \mathbf{P}(M_n \geq \theta n - u), \quad (3)$$

где $M_{n,m} = \max_{1 \leq i \leq n} S_{i,m}$,

$$\begin{aligned} p(\theta) &:= h_\theta \int_{\mathbf{R}_+} e^{-h_\theta y} \sum_{l=0}^{\infty} R(h(\theta))^{-l} p_-(l) \mathbf{P}\left(\max(S_1, \dots, S_l) < -y, \right. \\ &\quad \left. \max(S_{l+L_{i,0,0}^\theta+1}, \dots, S_{l+L_{i+1,0,0}^\theta}) \leq -y + H_{i+1,0,0}^\theta, i \geq 0\right) dy, \end{aligned}$$

блуждания S_n и S_n^θ предполагаются независимыми.

Теорема 2. При $m, n \rightarrow \infty$, $m = o(e^{\Lambda(\theta)n} \sqrt{n})$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$, $|u| \leq \gamma_n = o(\sqrt{n})$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(\rho_{n,m} \geq \theta n - u) = m \tilde{C}(\theta) e^{h_\theta u} e^{-\Lambda(\theta)n} n^{-1/2} (1 + o(1)), \quad \tilde{C}(\theta) := p(\theta) D(\theta).$$

Теорема 3. При $x \geq 0$, $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$

$$\mathbf{P}\left(\tilde{C}(\theta) \tau_n(\theta) e^{-\Lambda(\theta)n} n^{-1/2} > x\right) \rightarrow e^{-x}, \quad \tau_n(\theta) := \min\{m: M_{n,m} > \theta n\}. \quad (4)$$

Теорема 4. Равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$

$$\mathbf{P}(\rho_{n,m} - \theta n < x) \rightarrow \exp(-\tilde{C}(\theta) e^{-h_\theta x}), \quad m e^{-\Lambda(\theta)n} n^{-1/2} \rightarrow 1.$$

Введем на отрезке $[0, 1]$ процессы

$$\begin{aligned} X_m^{(n)}(t) &= \frac{S_{[nt],m} + (nt - [nt])X_{[nt]+1,m} - \theta nt}{\sigma(h_\theta) \sqrt{n}}, \\ \tilde{X}_m(t) &= \frac{S_{[mt]} + (mt - [mt])X_{[mt]+1}}{\sigma \sqrt{m}} \quad (\text{при условии } \sigma^2 := \mathbf{E} X^2 < \infty), \end{aligned}$$

где $[x]$ обозначает целую часть числа x , и рассмотрим условные распределения вероятностей $Q_m^{(n)}$ и $\tilde{Q}_m^{(n)}$ случайных элементов $X_m^{(n)}(t)$ и $\tilde{X}_m(t)$ в пространстве $C[0, 1]$

непрерывных функций с $\sup$ -нормой при условии $\tau_n(\theta) = m$. Пусть Q_W и Q_W^0 обозначают распределения вероятностей броуновского движения и броуновского моста. Слабую сходимость в пространстве $C[0, 1]$ будем обозначать символом $\Rightarrow$.

Теорема 5. $Q_m^{(n)} \Rightarrow Q_W^0$ при $m, n \rightarrow \infty$.

Теорема 6. Если $\sigma^2 < \infty$, то $\tilde{Q}_m^{(n)} \Rightarrow Q_W$ при $m, n \rightarrow \infty$, $m < n$.

3. Доказательство теоремы 1. Доказательство проведем для $u = 0$. Положим $A_i = \{M_{n,i} < \theta n\}$ и перепишем утверждение (3) в виде

$$\mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_0) = \mathbf{P}(\bar{A}_m) \mathbf{P}(A_{m-1} \cdots A_0) p(\theta) (1 + o(1)), \quad n, m \rightarrow \infty. \quad (5)$$

События A_i равновероятны, а события A_i, A_j независимы при $|i - j| \geq n$. Удобно считать, что A с отрицательным индексом совпадает со всем пространством. При любом $k < n$ выпишем для левой части (5) оценки сверху и снизу:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_0) &\leq \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k} A_{m-2n} \cdots A_0) \\ &= \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k}) \mathbf{P}(A_{m-2n} \cdots A_0), \\ \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_0) &= \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k} A_{m-2n} \cdots A_0) \\ &\quad - \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k} \cap \overline{A_{m-k-1} \cdots A_{m-2n+1}} A_{m-2n} \cdots A_0) \\ &= \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k}) \mathbf{P}(A_{m-2n} \cdots A_0) \\ &\quad - \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k} A_{m-2n} \cdots A_0 \\ &\quad \quad \times (\overline{A_{m-k-1} \cdots A_{m-n+1}} \cup \overline{A_{m-n} \cdots A_{m-2n+1}})) \\ &\geq \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k}) \mathbf{P}(A_{m-2n} \cdots A_0) \\ &\quad - \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k} \overline{A_{m-k-1} \cdots A_{m-n+1}}) \times \mathbf{P}(A_{m-2n} \cdots A_0) \\ &\quad - \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k} \overline{A_{m-n} \cdots A_{m-2n+1}}) \mathbf{P}(A_{m-3n} \cdots A_0). \end{aligned} \quad (6)$$

Из следующего утверждения будет выведено, что асимптотика правой части (7) при $m, n, k \rightarrow \infty$ определяется ее первым членом.

Лемма 1. 1) $\mathbf{P}(\bar{A}_m \overline{A_{m-k} \cdots A_{m-n+1}}) = \mathbf{P}(\bar{A}_0) (1 + o(1)) \varepsilon_k$, $m, n \rightarrow \infty$, где $\varepsilon_k = o(1)$, $k \rightarrow \infty$.

2) Равномерно по m выполнено соотношение $\mathbf{P}(A_{m-n} \cdots A_0 | A_{m-2n} \cdots A_0) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. 1) Вероятность $\mathbf{P}(\bar{A}_m \overline{A_{m-k} \cdots A_{m-n+1}})$ оценивается сверху величиной

$$\sum_{i=m-n+1}^{m-k} \mathbf{P}(\bar{A}_m \bar{A}_i) = \sum_{i=k}^{n-1} \mathbf{P}(\bar{A}_i \bar{A}_0). \quad (8)$$

Возьмем $0 < \tilde{\theta} < \theta$. Фиксируя i и разбивая событие $\bar{A}_i \bar{A}_0$ на два события $B_{1,i} := \{S_{i,0} > \tilde{\theta} i\} \cap \bar{A}_i \bar{A}_0$ и $B_{2,i} := \{S_{i,0} \leq \tilde{\theta} i, M_{0,n} \geq \theta n\} \cap \bar{A}_i$, оцениваем вероятность $\mathbf{P}(\bar{A}_i \bar{A}_0)$ сверху суммой $\mathbf{P}(B_{1,i}) + \mathbf{P}(B_{2,i})$. Воспользуемся неравенством

$$\mathbf{P}(B_{2,i}) \leq \mathbf{P}(S_{i,0} \leq \tilde{\theta} i, M_{n,0} \geq \theta n) \leq \mathbf{P}(M_{n-i} \geq \theta n - \tilde{\theta} i). \quad (9)$$

Из соотношения (1) получаем, что при $n - i \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(M_{n-i} \geq \theta n - \tilde{\theta} i) \sim D(\theta) (n - i)^{-1/2} e^{-\Lambda(\theta)(n-i)} e^{-h_\theta \theta i + h_\theta \tilde{\theta} i}. \quad (10)$$

Правая часть (10) не превосходит $D(\theta) (n/2)^{-1/2} e^{-\Lambda(\theta)n} e^{(h_\theta \tilde{\theta} - \ln R(h_\theta))i}$ при $i < [n/2]$. Полагая $a := e^{h_\theta \tilde{\theta} - \ln R(h_\theta)}$, откуда и из соотношения (1) выводим, что при больших n выполнено неравенство $\mathbf{P}(M_{n-i} \geq \theta n - \tilde{\theta} i) / \mathbf{P}(M_n \geq \theta n) \leq \sqrt{2} a^i$. Следовательно, для всех $\tilde{\theta} < \ln R(h_\theta) / h_\theta$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^{[n/2]} \frac{\mathbf{P}(M_{n-i} \geq \theta n - \tilde{\theta} i)}{\mathbf{P}(M_n \geq \theta n)} = o(1) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (9) при $k \rightarrow \infty$ получаем соотношение

$$\sum_{i=k}^{[n/2]} \mathbf{P}(B_{2,i}) = \mathbf{P}(\bar{A}_0)(1 + o(1))o(1). \quad (11)$$

Если $i \geq [n/2]$, то при любом $\min\{1/2, \theta_2/m^+\} < c < 1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_{n-i} \geq \theta n - \tilde{\theta}i) &\leq \mathbf{P}(M_{[cn]} \geq (\theta - \tilde{\theta})n) \\ &\leq (1 + o(1))(cn)^{-1/2} D((\theta - \tilde{\theta})c^{-1}) e^{-\Lambda((\theta - \tilde{\theta})c^{-1})cn} \end{aligned} \quad (12)$$

при $n \rightarrow \infty$. Пользуясь тем, что функция $\Lambda(\theta)$ выпукла вниз и $\Lambda(0) = 0$, находим, что $\Lambda(\theta c^{-1}) > \Lambda(\theta)c^{-1}$. Так как функция $\Lambda(\theta)$ непрерывна, то при фиксированном θ существует такое $\tilde{\theta}$, что $\Lambda((\theta - \tilde{\theta})c^{-1})/(c\Lambda(\theta)) =: d > 1$. При этом правая часть (12) не превосходит величины $(cn)^{-1/2} D((\theta - \tilde{\theta})c^{-1}) e^{-d\Lambda(\theta)n} (1 + o(1))$, $n \rightarrow \infty$. Полагая $B(\theta) := c^{-1/2} D((\theta - \tilde{\theta})c^{-1})/D(\theta)$, из (9) получаем оценку

$$\sum_{i=[n/2]}^n \mathbf{P}(B_{2,i}) \leq (1 + o(1))nB(\theta)\mathbf{P}(\bar{A}_0)e^{-(d-1)\Lambda(\theta)n} = o(1)\mathbf{P}(\bar{A}_0) \quad (13)$$

при $n \rightarrow \infty$. Чтобы оценить $\mathbf{P}(B_{1,i})$, воспользуемся соотношением

$$\mathbf{P}(B_{1,i}) \leq \mathbf{P}(S_{i,0} > \tilde{\theta}i, M_{n,i} \geq \theta n) = \mathbf{P}(S_i > \tilde{\theta}i)\mathbf{P}(\bar{A}_0). \quad (14)$$

Подставляя в (14) оценку $\mathbf{P}(S_i > \tilde{\theta}i) \sim C(\tilde{\theta})e^{-\Lambda(\tilde{\theta})i}i^{-1/2}$, $i \rightarrow \infty$, имеем:

$$\sum_{i=k}^n \mathbf{P}(B_{1,i}) = \mathbf{P}(\bar{A}_0)(1 + o(1))o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Подставляя (11), (13), (15) в (8), получаем первое заключение леммы.

2) Представим вероятность $\mathbf{P}(A_{m-n} \cdots A_0)$ в виде разности $\mathbf{P}(A_{m-2n} \cdots A_0) - \mathbf{P}(\overline{A_{m-n} \cdots A_{m-2n+1} A_{m-2n} \cdots A_0})$. Оценим $\mathbf{P}(\overline{A_{m-n} \cdots A_{m-2n+1} A_{m-2n} \cdots A_0})$ сверху величиной $\mathbf{P}(\overline{A_{m-n} \cdots A_{m-2n+1} A_{m-3n} \cdots A_0})$, тогда

$$1 - \frac{\mathbf{P}(\overline{A_{m-n} \cdots A_{m-2n+1}})}{\mathbf{P}(A_{m-2n} \cdots A_0 | A_{m-3n} \cdots A_0)} \leq \mathbf{P}(A_{m-n} \cdots A_0 | A_{m-2n} \cdots A_0). \quad (16)$$

Заметим, что так как $\mathbf{P}(A_n \cdots A_0) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_n \cdots A_0}) \geq 1 - n\mathbf{P}(\bar{A}_0) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, а $\mathbf{P}(\overline{A_{m-n} \cdots A_{m-2n+1}}) \leq n\mathbf{P}(\bar{A}_0) \rightarrow 0$, то найдется N такое, что для любого $n > N$

$$\mathbf{P}(A_n \cdots A_0) > \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(\overline{A_{m-n} \cdots A_{m-2n+1}}) < \frac{1}{4}. \quad (17)$$

Зафиксируем $n > N$ и обозначим остаток от деления m на n через r , а неполное частное через l . Фиксируем r и докажем индукцией по l неравенство

$$\mathbf{P}(A_m \cdots A_0 | A_{m-n} \cdots A_0) > \frac{1}{2}. \quad (18)$$

Для $l = 0$ утверждение (18) следует из (17). Предположим, что для $l = k$, $m = r + nl$ неравенство (18) доказано, докажем его для $l = k + 1$. Пользуясь неравенствами (16), (17) и предположением индукции, находим, что

$$\mathbf{P}(A_{r+(l+1)n} \cdots A_0 | A_{r+ln} \cdots A_0) \geq 1 - \frac{\mathbf{P}(\overline{A_{r+(l+1)n} \cdots A_{r+ln+1}})}{\mathbf{P}(A_{r+ln} \cdots A_0 | A_{r+(l-1)n} \cdots A_0)} > \frac{1}{2}.$$

Из (16) и (18) получаем

$$0 < 1 - \mathbf{P}(A_{m-n} \cdots A_0 | A_{m-2n} \cdots A_0) < 2\mathbf{P}(\overline{A_{m-n} \cdots A_{m-2n+1}}) \leq 2n\mathbf{P}(\bar{A}_0). \quad (19)$$

Правая часть (19) стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, что завершает доказательство леммы.

Пользуясь неравенствами (6) и (7), оцениваем величину $|\mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_0) - \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k}) \mathbf{P}(A_{m-2n} \cdots A_0)|$ сверху величиной

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} A_{m-k} \overline{A_{m-k-1} \cdots A_{m-n+1}}) \mathbf{P}(A_{m-2n} \cdots A_0) \\ & + \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} A_{m-k} \overline{A_{m-n} \cdots A_{m-2n+1}}) \mathbf{P}(A_{m-2n} \cdots A_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Из первого утверждения леммы 1 получаем, что при $k, n, m \rightarrow \infty$ первое слагаемое в (20) есть $o(1) \mathbf{P}(A_{m-2n} \cdots A_0) \mathbf{P}(\bar{A}_m)$, а для второго имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} A_{m-k} \overline{A_{m-n} \cdots A_{m-2n+1}}) \mathbf{P}(A_{m-2n} \cdots A_0) \\ & \leq \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} A_{m-k} \overline{A_{m-n} \cdots A_{m-2n+1}}) \mathbf{P}(A_{m-3n} \cdots A_0) \\ & = o(1) \mathbf{P}(A_{m-3n} \cdots A_0) \mathbf{P}(\bar{A}_m). \end{aligned}$$

Используя второе утверждение леммы 1, получаем, что величина $\mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_0) - \mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k}) \mathbf{P}(A_{m-2n} \cdots A_0)$ есть $o(1) \mathbf{P}(A_{m-1} \cdots A_0) \mathbf{P}(\bar{A}_m)$. Для завершения доказательства теоремы 1 остается воспользоваться следующим утверждением.

Лемма 2. Для любого $k = 1, 2, \dots$ и некоторых $p_k(\theta)$ выполнено соотношение $\mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k}) / \mathbf{P}(\bar{A}_0) \rightarrow p_k(\theta)$ при $n, m \rightarrow \infty$, а $p_k(\theta) \rightarrow p(\theta)$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Положим $\Delta_{n,m} := M_{n,m} - \theta n$, $\delta_{n,m} := M_{n,m} - S_{n,m}$. Представим событие $\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k}$ в виде разности событий $B_0 \cdots B_n$ и $C_n := \{\exists i \leq k: M_{n,m-i} \geq \theta n, \tau_{n,m-i} < i\}$, где

$$\begin{aligned} B_j &= \Omega \quad \text{при } j > N_{n,m,M_{n-k,m}}, \\ B_0 &= \{\Delta_{n,m} > 0\}, \\ B_1 &= \{S_{i,m-i} \leq -\Delta_{n,m}, 0 < i \leq n - L_{N_{k,m+n-k,\delta_{n-k,m}},m+n-k,\delta_{n-k,m}}\}, \\ B_j &= \{S_{i,m-i} \leq -\Delta_{n,m} + H_{N_{k,m+n-k,\delta_{n-k,m}},m+n-k,\delta_{n-k,m}} - \\ & \quad - H_{(N_{k,m+n-k,\delta_{n-k,m}}-j+1),m+n-k,\delta_{n-k,m}}, \\ & \quad n - L_{(N_{k,m+n-k,\delta_{n-k,m}}-j+2),m+n-k,\delta_{n-k,m}} \\ & \quad < i \leq n - L_{(N_{k,m+n-k,\delta_{n-k,m}}-j+1),m+n-k,\delta_{n-k,m}}\}, \\ & \quad 1 < j < N_{k,m+n-k,\delta_{n-k,m}}, \\ B_{N_{k,m+n-k,\delta_{n-k,m}}} &= \{S_{i,m-i} \leq -\Delta_{n,m} + H_{N_{k,m+n-k,\delta_{n-k,m}},m+n-k,\delta_{n-k,m}} - \delta_{n-k,m}, \\ & \quad n - L_{1,m+n-k,\delta_{n-k,m}} < i \leq n\}. \end{aligned}$$

Фиксируем k . Принимая во внимание, что $\mathbf{P}(C_n) / \mathbf{P}(\bar{A}_0) \leq k \mathbf{P}(M_k \geq \theta n) / \mathbf{P}(M_n \geq \theta n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, заменим событие $B_0 \cdots B_n \setminus C_n$ на $B_0 \cdots B_n$. Представим вероятность $\mathbf{P}(B_0 \cdots B_n)$ в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}_+} \int_{\mathbf{R}_+} \int_{\mathbf{R}_+} \mathbf{P}(B_0 \cdots B_n | \Delta_{n,m} = x, \delta_{n-k,m} = y, M_{k,n+m-k} = z) \\ & \times \mathbf{P}(\Delta_{n,m} \in dx, \delta_{n-k,m} \in dy, M_{k,n+m-k} \in dz). \end{aligned} \quad (21)$$

Используя соотношение $\{\Delta_{n,m} \in dx, \delta_{n-k,m} \in dy, M_{k,n+m-k} \in dz\} = \{\Delta_{n-k,m} - y + z \in dx, \delta_{n-k,m} \in dy, M_{k,n+m-k} \in dz\}$, асимптотическую независимость $\Delta_{n-k,m}$ и $\delta_{n-k,m}$ от $M_{k,n+m-k}$ [2, теорема 6] и учитывая, что меры $\mathbf{P}(\Delta_{n,m} \in A, \delta_{n,m} \in B)$ при фиксированном m и $n \rightarrow \infty$ слабо сходятся к

$$G_\delta(B) \mathbf{P}(M_n \geq \theta n) \int_A e^{-h_\theta x} dx, \quad A, B \subset \mathbf{R}_+,$$

где

$$G_\delta^\theta(B) := \frac{\sum_{k=0}^{\infty} R(h_\theta)^{-k} \mathbf{P}(S_1^\theta < 0, \dots, S_k^\theta < 0, S_k^\theta \in B)}{\sum_{k=0}^{\infty} R(h_\theta)^{-k} \mathbf{P}(S_1^\theta < 0, \dots, S_k^\theta < 0)},$$

(см. [2, теорема 6]), преобразуем интеграл (21) к виду

$$(1 + o(1))\mathbf{P}(M_{n-k} \geq \theta(n-k))e^{-h_\theta \theta_k} \int_{\mathbf{R}_+} \int_{\mathbf{R}_+} \int_{\mathbf{R}_+} e^{-h_\theta(x-y+z)} G_\delta(dy) \\ \times \mathbf{P}(B_1 \cdots B_n \mid \Delta_{n,m} = x, \delta_{n-k,m} = y, M_{k,n+m-k} = z) \mathbf{P}(M_{k,n+m-k} \in dz) dx. \quad (22)$$

В формулах для событий B_i произведем замену $\Delta_{n,m}$ на x , $\delta_{n-k,m}$ на y и $L_{N_k, m+n-k, \delta_{n-k,m}}$ на $k-l$ и обозначим так определенные события через $B_{i,x,y,l}$. События $B_{i,x,y,l}$ не зависят от блуждания на промежутке $[m, m+n-k]$, а $B_{1,x,y,l}$ не зависит от $B_{i,x,y,l}$, $i > 1$, при условии $S_{l,m-l}$. Следовательно, (22) приобретает вид

$$(1 + o(1))\mathbf{P}(M_n \geq \theta n) R(h_\theta)^{-k} \sum_{l=0}^n \int_{\mathbf{R}_+} \int_{\mathbf{R}_+} \int_{\mathbf{R}_+} G_\delta(dy) e^{-h_\theta(x-y)} \\ \times \mathbf{P}(B_{1,x,y,l}, S_{l,m-l} \in dv) \\ \times \mathbf{P}(B_{2,x-v,y,l}, \dots, B_{n,x-v,y,l}, M_{k,n+m-k} \in dz, \tau_{k,n+m-k} = k-l) e^{h_\theta z} dx \quad (23)$$

при $n \rightarrow \infty$. Интегрируя (23) по z , получаем для $\mathbf{P}(\bar{A}_m A_{m-1} \cdots A_{m-k})/\mathbf{P}(\bar{A}_0)$ выражение

$$\sum_{l=0}^n \int_{\mathbf{R}_+} \int_{\mathbf{R}_+} \int_{\mathbf{R}} G_\delta^\theta(dy) e^{-h_\theta x} \mathbf{P}(B_{1,x,y,l}, S_{l,m-l} \in dv) \mathbf{R}(h_\theta)^{-l} \\ \times \mathbf{P}(B_{2,x-v,y,l}, \dots, B_{n,x-v,y,l}, \tau_{k,n+m-k} = k-l) dx, \quad (24)$$

где события $B_{i,x,y,l}$ при $i \in [m+n-k, m+n-l]$ определяются через блуждание S_k^θ точно так же, как событие $B_{i,x,y,l}$ через блуждание S_k .

Оценим сверху разность вероятностей $\mathbf{P}(B_{2,x-v,y,l}, \dots, B_{n,x-v,y,l}, \tau_{k,n+m-k} = k-l)$ и $\mathbf{P}(B_{2,x-v,0,l}, \dots, B_{n,x-v,0,l}, \tau_{k,n+m-k} = k-l)$ величиной $\mathbf{P}(\exists i < k: S_{i,m-i} > M_{k,n+m-k}^\theta - \delta_{n-k,m}^\theta)$, а последнюю с учетом того, что случайные величины $\delta_{n,m}^\theta$ имеют при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном m предельное распределение, величиной

$$\mathbf{P}\left(\max_{[\sqrt{k}] < i < k} (S_i - S_i^\theta) > -K_0\right) + \mathbf{P}(M_{[\sqrt{k}]}^\theta > M_k^\theta - K_0) + \varepsilon,$$

где K_0 по заданному $\varepsilon > 0$ выбирается из условия $\mathbf{P}(\delta_{n,m}^\theta < K_0) \geq 1 - \varepsilon$. Первое слагаемое в этом выражении меньше ε при всех k , больших некоторого K_1 , так как блуждание $S_i - S_i^\theta$ имеет отрицательный снос. Второе слагаемое оценивается сверху суммой $\mathbf{P}(M_k^\theta < K_0 + \theta k/2) + \mathbf{P}(M_{[\sqrt{k}]}^\theta > \theta k/2)$, что в свою очередь не превосходит 2ε при k , больших некоторого K_2 . Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{P}(B_{2,x-v,y,l}, \dots, B_{n,x-v,y,l}, \tau_{k,n+m-k}^\theta = k-l) \\ - \mathbf{P}(B_{2,x-v,0,l}, \dots, B_{n,x-v,0,l}, \tau_{k,n+m-k}^\theta = k-l)) = o(1) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Вводя сокращенные обозначения L_i и N_i для величин $L_{i,m+n-k,0}$ и $N_{i,m+n-k,0}$ соответственно, перенумеруем шаги блуждания S_k^θ следующим образом:

$$\tilde{X}_i^\theta = \begin{cases} X_{m+n-k+i+L_{N_k^\theta-1}^\theta}, & i \leq L_{N_k^\theta}^\theta - L_{N_k^\theta-1}^\theta, \\ X_{m+n-k+i+L_{N_k^\theta-2}^\theta - L_{N_k^\theta}^\theta + L_{N_k^\theta-1}^\theta}, & L_{N_k^\theta}^\theta - L_{N_k^\theta-1}^\theta < i \leq L_{N_k^\theta}^\theta - L_{N_k^\theta-2}^\theta, \\ \dots & \dots \\ X_{m+n-k+i-L_{N_k^\theta}^\theta + L_1^\theta}, & L_{N_k^\theta}^\theta - L_1^\theta < i \leq L_{N_k^\theta}^\theta, \\ X_{m+n-k+i}, & L_{N_k^\theta}^\theta < i. \end{cases} \quad (26)$$

Будем считать, что при этой нумерации величина X_k^θ перешла в $\tilde{X}_{f(k)}^\theta$. Заметив, что если i — лестничная точка, то и $f(i)$ — лестничная точка и наоборот, получаем,

что преобразование (26), суженное на промежуток $[m + n - k, m + n - l]$, является биекцией двух множеств траекторий блуждания длины $k - l$ с максимумом в правой точке. Поскольку преобразование (26) не изменяет численных значений X_i , а только меняет их порядок, мы можем заключить, что оно сохраняет вероятность множеств траекторий на $[m + n - k, m + n - l]$. Пусть $\tilde{B}_{j,x,l}^\theta$ обозначает образ события $B_{j,x,0,l}^\theta$ при преобразовании (26), $j > 1$. По определению $B_{j,x,l}^\theta$ имеем:

$$\tilde{B}_{j,x,l}^\theta = \{S_{i,m-i} \leq -x + \tilde{H}_j^\theta, \tilde{L}_{j-1}^\theta < n - i \leq \tilde{L}_{j-2}^\theta\}, \quad 1 < j < \tilde{N}_{k-l}^\theta, \quad (27)$$

где величины $\tilde{H}_j^\theta, \tilde{L}_j^\theta, \tilde{N}_{k-l}^\theta$ определяются через блуждание $\tilde{S}_n^\theta$ так же, как величины H_j, L_j, N_{k-l} определяется через S_n . В результате получаем:

$$\mathbf{P}(B_{2,x,0,l}^\theta, \dots, B_{n,x,0,l}^\theta, \tau_{k,n+m-k}^\theta = l) = \mathbf{P}(\tilde{B}_{2,x,l}^\theta, \dots, \tilde{B}_{n,x,l}^\theta, \tilde{\tau}_{k-l}^\theta = k - l). \quad (28)$$

Ввиду (27) вероятность в правой части (28) есть $\mathbf{P}(S_{i,m-i} \leq -x + \tilde{H}_j^\theta, n - \tilde{L}_{j-2}^\theta < i \leq n - \tilde{L}_{j-1}^\theta, 1 < j < \tilde{N}_{k-l}^\theta, S_i < S_{k-l}, 0 \leq i \leq k - l)$, так что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{P}(B_{2,x,0,l}^\theta, \dots, B_{n,x,0,l}^\theta, \tau_{k,n+m-k}^\theta = l) - \mathbf{P}(S_{i,m-i} \leq -x + \tilde{H}_j^\theta, n - \tilde{L}_{j-2}^\theta < i \leq n - \tilde{L}_{j-1}^\theta, 1 < j < \infty)) = 0. \quad (29)$$

Пользуясь соотношениями (24), (25), имеем для $p_k(\theta)$, с точностью до $o(1)$ при $k \rightarrow \infty$, выражение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}_+} \int_{\mathbf{R}_+} G_\delta^\theta(dy) e^{-h_\theta x} \mathbf{P}(B_{1,x,y,l}, B_{2,x,0,l}^\theta, \dots, B_{n,x,0,l}^\theta, \tau_{k,n+m-k}^\theta = l) dx.$$

Согласно (29), имеет место сходимость $p_k(\theta)$ к $p(\theta)$.

4. Доказательство теоремы 3. Проведем оценку сомножителей в правой части соотношения

$$\mathbf{P}(\tau_n > m) = \mathbf{P}(A_m | A_{m-1} \cdots A_0) \mathbf{P}(A_{m-1} | A_{m-2} \cdots A_0) \dots \mathbf{P}(A_0), \quad (30)$$

используя следующие неравенства, вытекающие из теоремы 1:

$$\mathbf{P}(\bar{A}_0)p(\theta)(1 - \varepsilon) \leq \mathbf{P}(\bar{A}_k | A_{k-1} \cdots A_0) \leq \mathbf{P}(\bar{A}_0)p(\theta)(1 + \varepsilon), \quad (31)$$

где $\varepsilon > 0$, $k > M$, $n > N$. Если $k < M$, то вероятность $\mathbf{P}(\bar{A}_k | A_{k-1} \cdots A_0)$ есть $o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ и не превосходит ε при $n > N_1$ для некоторого $N_1 > N$. Подставляя (31) в (30), получаем для $\mathbf{P}(\tau_n > m)$ при любом m и $n > N_1$ оценки

$$(1 - (1 + \varepsilon)p(\theta)\mathbf{P}(\bar{A}_0))^{m-M}(1 - \varepsilon)^M \quad \text{и} \quad (1 - (1 - \varepsilon)p(\theta)\mathbf{P}(\bar{A}_0))^{m-M}$$

снизу и сверху соответственно. Таким образом, оценки для $\mathbf{P}(C(\theta)\tau_n(\theta) \times e^{-\Lambda(\theta)n}n^{-1/2} > x)$ принимают при $n \rightarrow \infty$ вид $e^{-(1 \pm \varepsilon)x}(1 + o(1))$. Ввиду произвольности ε , приходим к заключению теоремы 2.

5. Заключительные замечания. Относительно доказательств теорем 2, 4–6 ограничимся следующими замечаниями. Теорема 2 является прямым следствием теоремы 1, теорема 4 — прямым следствием теоремы 3. Теорема 5 может быть сведена к функциональным теоремам работы [2] за счет аппроксимации условия $\tau_n = m$ условием $A_m A_{m-1} \cdots A_{m-k+1}$ подобно тому, как это сделано в доказательстве теоремы 1. Доказательство теоремы 6 сводится к классическому принципу инвариантности аналогичным образом.

Теорема 2 является аналогом теорем для статистик Эрдёша–Реньи, полученных в [4], [5]. Теоремы 5, 6 подобны функциональным теоремам в [6]. Отметим, что в [4, гл. 3] с помощью метода «двойных сумм» В.И. Питербарга, получена асимптотика больших уклонений статистики Шеппа (см. теорему 2 выше), но без явного вида постоянного множителя. К тому же, метод двойных сумм, по-видимому, не позволяет получать функциональные предельные теоремы.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю М.В. Козлову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности. — Сиб. матем. журн., 1995, т. 36, № 3, с. 493–509.
2. Шкляев А. В. Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого уклонения максимума. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 3, с. 590–598.
3. Komlós J., Tusnády G. On sequences of «pure heads». — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 4, p. 608–617.
4. Козлов А. М. Предельные теоремы и большие уклонения для приращений случайных блужданий. Дисс. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2004.
5. Козлов А. М., Питербарг В. И. О больших скачках случайного блуждания. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 4, с. 803–814.
6. Козлов М. В. О частичных суммах Эрдёша-Реньи: большие уклонения, условное поведение. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 4, с. 678–696.

Поступила в редакцию
28.VI.2010

© 2010 г.

CORDERO F.*

ON THE SCALING PROPERTY IN FLUCTUATION THEORY FOR STABLE LÉVY PROCESSES

В статье получено выражение для преобразования Лапласа совместного распределения пары $(T_{[x, +\infty[}, X_{T_{[x, +\infty[}})$, где X — процесс Леви, а $T_{[x, +\infty[}$ — момент первого достижения процессом X множества $[x, +\infty[$. В случае, когда X является α -устойчивым процессом Леви с $1 < \alpha < 2$, показано, как по этой формуле восстанавливается распределение случайной величины $X_{T_{[x, +\infty[}}$ — результат, ранее полученный Д. Рэем в симметричном случае и Н. Бинэмом в случае, когда X не является спектрально отрицательным. Затем мы изучаем поведение момента $T_{[x, +\infty[}$ при условии $\{X_{T_{[x, +\infty[}} - x \leq h\}$, когда h стремится к 0. При этом на первый план выходит случайная величина T_x^0 , которая, по-видимому, связана с абсолютной непрерывностью распределения супремума процесса X .

Ключевые слова и фразы: теория флуктуаций, масштабная инвариантность, процессы Леви, устойчивые процессы, момент первого достижения.

1. Introduction. Let $X = (X_t, t \geq 0)$ denote a Lévy process with characteristic exponent ψ .

For $t \geq 0$ we set

$$S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s \quad \text{and} \quad I_t = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s,$$

and for $x > 0$

$$T_{[x, +\infty[} = \inf\{s > 0 : X_s \geq x\} \quad \text{and} \quad K_x = X_{T_{[x, +\infty[}} - x.$$

We denote by e_γ an exponential variable with parameter γ , independent of X .

* Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, UMR 7599, UPMC, Case courrier 188, 4, Place Jussieu, 75252 PARIS Cedex 05, France; e-mail: cordier@gmail.com