Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, Экспоненциальные неравенства чебышевского типа для сумм случайных векторов и для траекторий случайных блужданий, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 1, 3–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4321>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:44:23

© 2011 г. **БОРОВКОВ А. А.***, **МОГУЛЬСКИЙ А. А.***

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВСКОГО ТИПА ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ И ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ¹⁾

В работе получены аналоги известного экспоненциального неравенства Чебышёва

$$\mathbf{P}(\xi \geq x) \leq e^{-\Lambda^{(\xi)}(x)}, \quad x > \mathbf{E} \xi,$$

для распределения случайной величины ξ , где

$$\Lambda^{(\xi)}(x) := \sup_{\lambda} \{\lambda x - \ln \mathbf{E} e^{\lambda \xi}\}$$

есть функция уклонений для ξ . Обобщения установлены для многомерных векторов ξ , для сумм векторов и для траекторий случайных процессов, ассоциированных с такими суммами.

Ключевые слова и фразы: условие Крамера, функция уклонений, случайное блуждание, функционал уклонений, интеграл уклонений, выпуклое множество, большие уклонения, принцип больших уклонений, расширенный принцип больших уклонений, неравенства для вероятностей больших уклонений.

В § 1 работы получены многомерные аналоги известного экспоненциального неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}(\xi \geq x) \leq e^{-\Lambda^{(\xi)}(x)}, \quad \Lambda^{(\xi)}(x) := \sup_{\lambda} \{\lambda x - \ln \mathbf{E} e^{\lambda \xi}\}, \quad x > \mathbf{E} \xi, \quad (0.1)$$

для случайной величины ξ . В § 2 установлены неравенства для сумм многомерных векторов ξ и траекторий случайных процессов, ассоциированных с такими суммами. В § 3 изучены свойства случайной величины $\gamma = \Lambda^{(\xi)}(\xi)$, играющей важную роль в ряде результатов §§ 1, 2.

Результаты работы будут использованы при доказательстве расширенного принципа больших уклонений (см. [1]) для траекторий случайных блужданий (см. [2]).

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр-т Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru, mogul@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантами РФФИ (№ 05-01-00810, 07-01-00595, 08-01-00962), НШ-8980.2006.1, РНШ.2.1.1.1379.

1. Экспоненциальные неравенства чебышевского типа в многомерном случае.

1.1. Формулировки основных утверждений. Пусть $\xi \in \mathbf{R}^d$ — случайный вектор в d -мерном пространстве Евклида $\mathbf{R}^d$. Скалярное произведение и норму в $\mathbf{R}^d$ обозначим $\langle \alpha, \beta \rangle$ и $|\alpha| := \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ соответственно. Пусть, далее, $\Lambda(\alpha) = \Lambda^{(\xi)}(\alpha)$ — функция уклонений случайного вектора ξ :

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda^{(\xi)}(\alpha) := \sup_{\lambda} \{ \langle \lambda, \alpha \rangle - A(\lambda) \}, \quad \alpha \in \mathbf{R}^d, \quad (1.1)$$

где $A(\lambda) = A^{(\xi)}(\lambda) := \ln \mathbf{E} e^{\langle \lambda, \xi \rangle}$, $\lambda \in \mathbf{R}^d$. Рассмотрим произвольное измеримое множество $B \subset \mathbf{R}^d$ и обозначим

$$\Lambda(B) := \inf_{\alpha \in B} \Lambda(\alpha).$$

Если множество B пусто, то мы положим $\Lambda(B) = \infty$. Для произвольного множества $B \subset \mathbf{R}^d$ через (B) будем обозначать внутренность B , т.е. совокупность таких точек α , которые входят в B вместе с некоторой окрестностью, и через $[B]$ — замыкание множества B . Для $v \geq 0$ рассмотрим множество

$$\Lambda_v := \{ \alpha : \Lambda(\alpha) \leq v \},$$

в точках которого функция уклонений не превосходит v . Множество, где функция уклонений конечна, обозначим

$$\Lambda_{<\infty} := \bigcup_{v \geq 0} \Lambda_v = \{ \alpha : \Lambda(\alpha) < \infty \}.$$

Поскольку функция уклонений $\Lambda(\alpha)$ выпукла вниз: для $p \geq 0$, $q \geq 0$

$$\Lambda(p\alpha + q\beta) \leq p\Lambda(\alpha) + q\Lambda(\beta),$$

и полунепрерывна снизу:

$$\varliminf_{\beta \rightarrow \alpha} \Lambda(\beta) \geq \Lambda(\alpha) \quad (1.2)$$

(эти свойства легко вытекают из определения (1.1)), то множества Λ_v выпуклы и замкнуты при любом конечном $v \geq 0$, а множество $\Lambda_{<\infty}$ выпукло. Функция уклонений $\Lambda(\alpha)$ обладает следующим характеристическим свойством. Для нормированных сумм $\zeta_n := S_n/n$, $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ (слагаемые ξ_k независимы и распределены как ξ), в силу локального принципа больших уклонений (л.п.б.у.; см., например, [1], [3], [4]) выполняется

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(\zeta_n \in (\alpha)_{\varepsilon}) = -\Lambda(\alpha), \quad (1.3)$$

где $(\alpha)_\varepsilon := \{\beta \in \mathbf{R}^d: |\alpha - \beta| < \varepsilon\}$ есть ε -окрестность точки α . Это означает, что при больших n и малых ε вероятности $\mathbf{P}(\zeta_n \in (\alpha)_\varepsilon)$ ведут себя асимптотически как $e^{-n\Lambda(\alpha)+o(n)}$ (точнее, $-n^{-1} \ln \mathbf{P}(\zeta_n \in (\alpha)_\varepsilon)$ располагается вблизи значения $\Lambda(\alpha)$).

Предварительно заметим, что в *одномерном* случае $d = 1$ экспоненциальное неравенство Чебышёва для выпуклых множеств B может быть записано в виде

$$\mathbf{P}(\xi \in B) \leq e^{-\Lambda(B)}. \quad (1.4)$$

Действительно, если $\Lambda(B) = 0$, то неравенство тривиально. Если $\Lambda(B) > 0$, то либо $b_+ := \inf\{\alpha: \alpha \in B\} > \mathbf{E}\xi$, либо $b_- := \sup\{\alpha: \alpha \in B\} < \mathbf{E}\xi$. Если $b_+ > \mathbf{E}\xi$, $b_+ \in B$, то $\Lambda(b_+) = \Lambda(B) > 0$ и (1.4) вытекает из неравенства Чебышёва:

$$\mathbf{P}(\xi \in B) \leq \mathbf{P}(\xi \geq b_+) \leq e^{-\Lambda(b_+)}. \quad (1.5)$$

Если же $\Lambda(b_+) < \Lambda(B)$ (это возможно лишь, если $b_+ \notin B$, $\mathbf{P}(\xi \leq b_+) = 1$ и Λ имеет разрыв в точке b_+), то $\Lambda(B) = \infty$, $\mathbf{P}(\xi \in B) = 0$ и неравенство (1.4) по-прежнему верно. Случай $b_- < \mathbf{E}\xi$ рассматривается аналогично. Ясно, что «односторонние» множества B (т.е. лежащие по одну сторону от $\mathbf{E}\xi$) допускают вложение в выпуклые множества с теми же границами $b_\pm$ и для них также справедливо неравенство (1.4).

Вернемся к общему случаю $d \geq 1$. Основные утверждения настоящего параграфа состоят в следующем.

Теорема 1.1. *Если B — произвольное выпуклое открытое множество, то справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(\xi \in B) \leq e^{-\Lambda(B)}. \quad (1.6)$$

Теорема 1.2. *Для произвольного множества B справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(\xi \in B) \leq e^{-\Lambda([B^{\text{con}}])}, \quad (1.7)$$

где B^{con} — выпуклая оболочка B .

Из теорем 1.1, 1.2 следует, что неравенство (1.6) справедливо для выпуклых открытых и выпуклых замкнутых множеств. Таким образом, выделение класса выпуклых множеств и использование функции уклонений позволяет найти единую простую форму (1.4), (1.6) неравенства, которое по-прежнему естественно называть неравенством Чебышёва и которое справедливо в пространствах любой размерности, включая бесконечномерный случай (см. ниже теорему 2.2).

Теоремы 1.1, 1.2 будут следствиями более общего утверждения (теоремы 1.3), в котором используются более широкие условия, обеспечивающие выполнение неравенств вида (1.6). Проверка этих условий в

задачах большой размерности d может представлять известные трудности. Поэтому в качестве основных результатов мы выделяем более простые теоремы 1.1, 1.2. Эти теоремы достаточны для использования в последующих разделах и в ряде приложений.

Чтобы сформулировать теорему 1.3, нам понадобится ряд понятий.

Если $\Lambda(B) = 0$, то $\Lambda([B]) = 0$ и все утверждения, приведенные выше и в последующем, будут тривиальными. Поэтому мы везде будем предполагать, что $\Lambda(B) > 0$. Это означает, что мы будем предполагать также, что выполнено условие Крамера

[C]. $\mathbf{E} e^{(\lambda, \xi)} < \infty$ в некоторой телесной области значений λ .

В этом случае множество $\Lambda_{<\infty}$ тоже будет телесным.

Чтобы упростить предварительные пояснения, мы предположим на время, что выполнено следующее более сильное, чем [C], условие.

[C₀]. $\mathbf{E} e^{(\lambda, \xi)} < \infty$ в окрестности точки $\lambda = 0$.

Если выполнено условие [C₀] (в этом случае, не ограничивая общности, можно считать также, что $\mathbf{E} \xi = 0$, «сдвинув» при необходимости множество B), то $\Lambda(\alpha) \rightarrow \infty$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и при возрастании v множества Λ_v образует семейство компактных выпуклых расширяющихся множеств, заполняющих собой множество $\Lambda_{<\infty}$, совпадающее (с точностью до границы) с выпуклой оболочкой S носителя распределения вектора ξ . При приближении границы Λ_v (с ростом v) к границе $\Lambda_{<\infty}$ расширение Λ_v в этом направлении замедляется или останавливается вовсе, так что на каких-то участках границы множеств Λ_v и $\Lambda_{<\infty}$ могут совпадать. Границы $\partial\Lambda_v$ множеств Λ_v называют *поверхностями уровня*. Они обладают следующим свойством: при всех α таких, что $\Lambda(\alpha) = v$ (тогда $\alpha \in \partial\Lambda_v$), правая часть (1.3) равна одному и тому же значению v .

Следует отметить, что поверхности уровня v при достаточно больших v могут иметь «пустоты», т.е. для некоторых направлений e уравнение $\Lambda(te) = v$ может не иметь решений.

Функция $\Lambda(\alpha)$ непрерывна во внутренности ($\Lambda_{<\infty}$) множества $\Lambda_{<\infty}$ (это свойство присуще любой выпуклой, заданной в $\mathbf{R}^d$ функции) и полунепрерывна снизу, включая границу. Оказывается, что это последнее свойство можно несколько расширить до *непрерывности снизу и изнутри* $\Lambda_{<\infty}$ на границе $\partial\Lambda_{<\infty}$ (см. ниже лемму 1.1). В дальнейшем такое расширение нам понадобится для *выпуклых полунепрерывных снизу* функций $J = J(y) \geq 0$, заданных в произвольном линейном метрическом пространстве $(\mathbf{Y}, \rho)$. Поэтому лемму 1.1 мы докажем в общем случае — для функций, обладающих отмеченными выше свойствами в произвольном метрическом пространстве $(\mathbf{Y}, \rho)$. Пусть функция $J = J(y): \mathbf{Y} \rightarrow [0, \infty]$ выпукла и полунепрерывна снизу (последнее означает, что для J выполнено соотношение (1.2)). Так как функция J выпукла вниз, то множества $J_{<\infty} := \{y \in \mathbf{Y}: J(y) < \infty\}$ и $[J_{<\infty}]$ будут

выпуклыми. Для любого множества $B \subset \mathbf{Y}$ обозначим

$$J(B) := \inf_{y \in B} J(y).$$

Лемма 1.1. Пусть функция J полунепрерывна снизу и выпукла, $y \in [J_{<\infty}]$, $y_0 \in J_{<\infty}$. Тогда имеют место следующие свойства:

(i) (непрерывность снизу)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J((y)_\varepsilon) = J(y); \quad (1.8)$$

(ii) (непрерывность изнутри $J_{<\infty}$ вдоль лучей)

$$\lim_{p \rightarrow 1, p < 1} J(py_0 + (1-p)y) = J(y). \quad (1.9)$$

Следствие 1.1. Если B — выпуклое множество и $J((B)) < \infty$, то

$$J([B]) = J(B) = J((B)). \quad (1.10)$$

Доказательства этих утверждений приведены в п. 1.2.

Вернемся к функции Λ в пространстве $\mathbf{R}^d$ и сформулируем условия для теоремы 1.3. Пусть сначала $\Lambda(B) < \infty$, т.е. существуют $\alpha \in B$, для которых $\Lambda(\alpha) < \infty$. В этом случае при выполнении условия $[\mathbf{C}_0]$ найдется такое $v = v_B$, при котором в силу свойств непрерывности функции Λ (отмеченных выше в лемме 1.1) и монотонного возрастания компактов Λ_v эти компакты впервые коснутся $[B]$. Другими словами, найдется точка α_B , в которой достигается

$$\min_{\alpha \in [B]} \Lambda(\alpha) = \Lambda([B]) = \Lambda(\alpha_B) =: v_B.$$

Ясно, что точка α_B лежит на границах множеств Λ_{v_B} , $[B]$ и эти множества соприкасаются: $\alpha_B \in \Lambda_{v_B} \cap [B] \neq \emptyset$.

Если выполнено лишь условие $[\mathbf{C}]$, то в случае, когда множество B неограничено, «касание» множеств Λ_{v_B} и $[B]$ может происходить «на бесконечности».

Если $\Lambda(B) = \infty$, то множество B не пересекается с выпуклым множеством $\Lambda_{<\infty}$.

Обозначение e мы будем использовать для единичного вектора.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $\Lambda(B) < \infty$. Тогда множество B будем называть Λ -отделимым, если существует гиперплоскость $\Pi_- := \{\alpha: \langle e, \alpha \rangle = b\}$ (проходящая через точку α_B , если таковая существует), разделяющая множества B и $\Lambda_{v_B} = \{\alpha: \Lambda(\alpha) \leq v_B\}$ в следующем смысле:

$$B \subset \Pi_+ := \{\alpha: \langle e, \alpha \rangle > b\}, \quad \Lambda_{v_B} \subset \Pi_{\leq} := \{\alpha: \langle e, \alpha \rangle \leq b\}. \quad (1.11)$$

В случае $\Lambda(B) = \infty$ множество B будем называть Λ -отделимым, если существует гиперплоскость Π_- , разделяющая множества B и $\Lambda_{<\infty}$:

$$B \subset \Pi_+, \quad \Lambda_{<\infty} \subset \Pi_{\leq}.$$

Теорема 1.3. Если множество B является Λ -отделимым, то

$$\mathbf{P}(\xi \in B) \leq e^{-\Lambda([B])}. \quad (1.12)$$

Ясно, что замкнутое множество B при $\Lambda(B) < \infty$ не может быть Λ -отделимым.

Отметим, что свойство Λ -отделимости является существенным для утверждения теоремы 1.3 (без этого условия неравенство (1.12), вообще говоря, неверно), но оно является и весьма ограничительным. Какие оценки для $\mathbf{P}(\xi \in B)$ можно получить, если множество B не является Λ -отделимым?

Если $B \subset \bigcup B_k$ вложено в объединение не более чем счетного числа выпуклых множеств B_k , то из теоремы 1.2 получаем

$$\mathbf{P}(\xi \in B) \leq \sum e^{-\Lambda([B_k])}.$$

Теоремы 1.2, 1.3 не дают других содержательных оценок. Мы получим несколько иной подход, если рассмотрим случайную величину $\gamma := \Lambda(\xi)$ и «повторную» функцию уклонений $\Lambda^{(\gamma)}$, т.е. функцию уклонений для случайной величины γ , равной значению функции уклонений $\Lambda = \Lambda^{(\xi)}(\alpha)$ в точке ξ . Свойства случайной величины γ и функции уклонений $\Lambda^{(\gamma)}$ исследованы в § 3.

Теорема 1.4. Если $\Lambda(B) \geq \mathbf{E} \gamma$, то

$$\mathbf{P}(\xi \in B) \leq e^{-\Lambda^{(\gamma)}(\Lambda(B))}.$$

1.2. Доказательства.

Доказательство леммы 1.1. (i) Свойство (1.8) является следствием свойства полунепрерывности снизу (1.2) для J и соотношения (1.9). Действительно, в силу (1.2)

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J((y)_\varepsilon) \geq J(y).$$

С другой стороны, выберем $y_0 \in J_{<\infty}$ и положим $y_p := py_0 + (1-p)y$, так что $y = y_1$. В силу свойств линейного метрического пространства (см. [5, гл. I, § 2, п. 3, с. 23]) имеем $y_p \rightarrow y_1$ при $p \rightarrow 1$. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется достаточно близкое к единице $p = p(\varepsilon) < 1$ такое, что $y_{p(\varepsilon)} \in (y)_\varepsilon$ и $p(\varepsilon) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому в силу (1.9) выполняется

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} J((y)_\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(y_{p(\varepsilon)}) = J(y).$$

Свойство (1.8) установлено.

(ii) Если $J(y) = \infty$, то (1.9) вытекает из соотношения (1.2) для J . Если же $J(y) < \infty$, то рассмотрим функцию

$$g(p) := J(y_p), \quad p \in [0, 1].$$

Функция J выпукла и, следовательно

$$g(p) \leq pJ(y_1) + (1-p)J(y_0), \quad \overline{\lim}_{p \rightarrow 1} g(p) \leq J(y_1).$$

С другой стороны, в силу неравенства (1.2) и сходимости $y_p \rightarrow y_1$ при $p \rightarrow 1$ имеем

$$\underline{\lim}_{p \rightarrow 0} g(p) \geq J(y_1).$$

Это доказывает (1.9). Лемма 1.1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я 1.1. (i) Заметим предварительно следующее. Так как B и $J_{<\infty}$ — выпуклые множества, то выпуклыми будут также множества $[B]$ и $[B] \cap J_{<\infty}$. По условию $J((B)) < \infty$ и, стало быть, множество $(B) \cap J_{<\infty}$ непусто. Возьмем точки $y_0 \in (B) \cap J_{<\infty}$, $y_1 \in [B] \cap J_{<\infty}$ и покажем, что

$$\text{полуотрезок } [y_0, y_1) := \{y_p := py_1 + (1-p)y_0; p \in [0, 1)\} \text{ принадлежит } (B). \quad (1.13)$$

Обе точки y_0 и y_1 принадлежат выпуклому множеству $[B] \cap J_{<\infty}$. Поэтому y_p также принадлежит этому множеству при всех $p \in [0, 1]$, и чтобы доказать (1.13), надо исключить возможность $y_p \in \partial B$ при $p \in [0, 1)$. Но если $y_p \in \partial B$, то существует последовательность точек $v \rightarrow y_p$ такая, что $v \notin [B]$. В этом случае $w := (v - py_1)/(1-p) \rightarrow y_0$ при $v \rightarrow y_p$. Так как $y_0 \in (B)$, то $w \in (B)$ при v достаточно близких к y_p . Поскольку $v = py_1 + (1-p)w$ и $y_1 \in [B]$, то $v \in [B]$. Полученное противоречие доказывает (1.13).

(ii) Обратимся теперь непосредственно к доказательству (1.10). Из (1.13) следует неравенство

$$J((B)) \leq J(py_1 + (1-p)y_0), \quad 0 \leq p < 1. \quad (1.14)$$

Так как y_0, y_1 принадлежит $J_{<\infty}$, то в силу утверждения (ii) леммы 1.1 правая часть (1.14) при $p \rightarrow 1$ сходится к $J(y_1)$. Поэтому

$$J((B)) \leq J(y_1).$$

Отсюда в силу произвольности $y_1 \in [B] \cap J_{<\infty}$ получаем неравенство

$$J((B)) \leq J([B]),$$

которое, вместе с очевидными соотношениями

$$J((B)) \geq J(B) \geq J([B]),$$

доказывает (1.10). Следствие 1.1 доказано.

З а м е ч а н и е 1.1. В следствии 1.1 условие $J((B)) < \infty$ нельзя заменить условием $J(B) < \infty$, о чем свидетельствует (применительно к случаю $\mathbf{Y} = \mathbf{R}^d$, $J = \Lambda$) следующий пример.

П р и м е р 1.1. Пусть случайный вектор $\xi \in \mathbf{R}^2$ принимает три значения $\beta^{(1)} = (0, 2)$, $\beta^{(2)} = (1, 1)$, $\beta^{(3)} = (1, -1)$ с вероятностями $p^{(1)} = 1/2$, $p^{(2)} = 1/4$, $p^{(3)} = 1/4$ соответственно. В силу л.п.б.у. (1.3) справедливо

$$\Lambda(\beta^{(i)}) = -\ln p^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Выберем множество $B = B_1 \cup \{\beta^{(2)}\}$, где B_1 — открытый треугольник с вершинами в точках $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$, $\beta^{(4)} = (1, 2)$. Поскольку $\Lambda(\alpha) = \infty$, если точка α лежит вне замкнутого треугольника с вершинами $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$, $\beta^{(3)}$, то $\Lambda(B) = -\ln p^{(2)} = \ln 4$. При этом $\Lambda([B]) \leq \Lambda(\beta^{(1)}) = \ln 2$. Таким образом, имеем

$$\Lambda([B]) < \Lambda(B) < \infty.$$

Равенства (1.10) не выполнены.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.3. Напомним, что функция уклонений $\Lambda(\cdot)$ содержит всю информацию о распределении величины ξ , так как по формуле обращения по $\Lambda(\cdot)$ однозначно восстанавливается функция $A(\cdot)$. В частности, справедливо следующее соотношение, позволяющее выразить «одномерные» функции уклонений через «многомерные».

Лемма 1.2. Для любого $\alpha_1 \in \mathbf{R}$ справедливо равенство

$$\Lambda^{(\xi_{(1)})}(\alpha_1) = \inf_{\alpha_2, \dots, \alpha_d} \Lambda(\alpha), \quad (1.15)$$

где $\xi_{(i)}$, α_i — координаты векторов ξ , α соответственно.¹⁾

Справедливость равенства (1.15) в точках α_1 непрерывности функции $\Lambda^{(\xi_{(1)})}(\alpha_1)$ доказана в [6, теорема 16.3].

¹⁾ Соотношение (1.15) допускает простую вероятностную интерпретацию с помощью л.п.б.у. (1.3), которая может быть положена в основу «вероятностного» доказательства соотношения (1.15). В соответствии с л.п.б.у. $\Lambda^{(\xi_{(1)})}(\alpha_1)$ определяет асимптотику $n^{-1} \ln \mathbf{P}(S_{1,n}/n \in (\alpha_1)_\varepsilon)$ при $n \rightarrow \infty$ и малых ε , где $S_{1,n}$ — первая координата S_n . Будем считать для удобства изложения в этих пояснениях, что норма $|\alpha|$ определяется соотношением $|\alpha| = \max_j |\alpha_j|$. Тогда окрестности $(\alpha)_\varepsilon$ (с присоединенными «правыми» $d - 1$ гранями, соответствующими координатам $\alpha_2, \dots, \alpha_d$) будут «кубиками» и $\mathbf{P}(S_{1,n}/n \in (\alpha_1)_\varepsilon)$ может быть описана также как

$$\Sigma_\varepsilon := \sum_k \mathbf{P}(\zeta_n \in (z_k)_\varepsilon),$$

где z_k — центры кубиков из пласта $(\alpha_1)_\varepsilon$ таких, что $\bigcup_k (z_k)_\varepsilon = (\alpha_1)_\varepsilon$. Нетрудно видеть, что асимптотику $n^{-1} \ln \Sigma_\varepsilon$ будет определять максимальное слагаемое в сумме Σ_ε , которое в свою очередь в соответствии с л.п.б.у. (1.3) будет определять значение $\min_k \Lambda(z_k)$. Это приводит к (1.15).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $f(\alpha_1)$ и $g(\alpha_1)$ левую и правую части (1.15) соответственно. Убедимся, что функция $g(\alpha_1)$ выпукла. В силу выпуклости функции уклонений для любых $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$, $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \in \mathbf{R}^d$ выполняется

$$g(p\alpha_1^{(1)} + q\alpha_1^{(2)}) \leq \Lambda(p\alpha^{(1)} + q\alpha^{(2)}) \leq p\Lambda(\alpha^{(1)}) + q\Lambda(\alpha^{(2)}).$$

Минимизируя правую часть последнего неравенства по переменным $\alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_d^{(1)}$ и $\alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_d^{(2)}$, получаем

$$g(p\alpha_1^{(1)} + q\alpha_1^{(2)}) \leq pg(\alpha_1^{(1)}) + qg(\alpha_1^{(2)}).$$

Выпуклость функции $g(\alpha_1)$ установлена.

Докажем теперь равенство (1.15) для всех точек α_1 , в которых функция $f(\alpha_1)$ непрерывна. Следуя доказательству теоремы 16.3 в [6] и вычисляя преобразование Лежандра g^* над функцией $g(\alpha_1)$, получаем

$$\begin{aligned} g^*(\alpha_1) &:= \sup_{\alpha_1} \{\lambda_1 \alpha_1 - g(\alpha_1)\} = \sup_{\alpha_1} \left\{ \lambda_1 \alpha_1 - \inf_{\alpha_2, \dots, \alpha_d} \Lambda(\alpha) \right\} \\ &= \sup_{\alpha_1} \sup_{\alpha_2, \dots, \alpha_d} \{\lambda_1 \alpha_1 - \Lambda(\alpha)\} = A^{(\xi)}((\lambda_1, 0, \dots, 0)) = A^{(\xi_{(1)})}(\lambda_1). \end{aligned}$$

Поэтому двойное преобразование g^{**} над g имеет вид

$$g^{**}(\alpha_1) = \sup_{\lambda_1} \{\lambda_1 \alpha_1 - A^{(\xi_{(1)})}(\lambda_1)\} = \Lambda^{(\xi_{(1)})}(\alpha_1) = f(\alpha_1).$$

Мы доказали тождество

$$f(\alpha_1) = g^{**}(\alpha_1).$$

Поскольку выпуклая функция $g(\alpha_1)$ может не совпадать с $g^{**}(\alpha_1)$ только в точках разрывов этих функций (точки разрывов функций $f(\alpha_1)$, $g(\alpha_1)$, $g^{**}(\alpha_1)$ совпадают), то тождество (1.15) для всех точек непрерывности функций $f(\alpha_1)$, $g(\alpha_1)$ доказано.

Функция $f(\alpha_1) = \Lambda^{(\xi_{(1)})}(\alpha_1)$ может иметь лишь две точки разрыва $\alpha_{1\pm}$, являющиеся границами множества $\Lambda_{<\infty}^{(\xi_{(1)})}$. Точки $\alpha_{1\pm}$ будут точками разрыва лишь в случае, когда $p_{\pm} := \mathbf{P}(\xi_{(1)} = \alpha_{1\pm}) > 0$; при этом $p_{\pm} = \exp\{-\Lambda^{(\xi_{(1)})}(\alpha_{1\pm})\}$.

Для доказательства равенства $f(\alpha_{1\pm}) = g(\alpha_{1\pm})$ покажем сначала, что

$$f(\alpha_{1\pm}) \leq g(\alpha_{1\pm}). \quad (1.16)$$

Для фиксированного $\alpha_1 \in (\alpha_{1-}, \alpha_{1+})$ положим $\alpha_{1,p} = p\alpha_1 + (1-p)\alpha_{1+}$. Тогда в силу выпуклости функции g имеем

$$g(\alpha_{1,p}) \leq pg(\alpha_1) + (1-p)g(\alpha_{1+}), \quad \overline{\lim}_{p \downarrow 0} g(\alpha_{1,p}) \leq g(\alpha_{1+}).$$

Так как $f(\alpha_{1,p}) = g(\alpha_{1,p})$ и функция f непрерывна изнутри $[\alpha_{1-}, \alpha_{1+}]$, то

$$f(\alpha_{1+}) = \overline{\lim}_{p \downarrow 0} f(\alpha_{1,p}) = \overline{\lim}_{p \downarrow 0} g(\alpha_{1,p}) \leq g(\alpha_{1+}).$$

Проводя аналогичные рассуждения для точки α_{1-} , мы получим (1.16).

Докажем теперь обратное неравенство

$$f(\alpha_{1\pm}) \geq g(\alpha_{1\pm}). \quad (1.17)$$

Для этого рассмотрим «условный» случайный вектор $\xi^{(\alpha_{1\pm})}$ с распределением

$$\mathbf{P}(\xi^{(\alpha_{1\pm})} \in B) := \mathbf{P}(\xi \in B \mid \xi_{(1)} = \alpha_{1\pm}) = \frac{\mathbf{P}(\xi \in B, \xi_{(1)} = \alpha_{1\pm})}{p_{\pm}}.$$

Поскольку

$$A^{(\xi^{(\alpha_{1\pm})})}(\lambda) \leq A(\lambda) - \ln p_{\pm},$$

то, учитывая равенство $-\ln p_{\pm} = f(\alpha_{1\pm})$, получаем неравенство

$$\Lambda^{(\xi^{(\alpha_{1\pm})})}(\alpha) \geq \Lambda(\alpha) - f(\alpha_{1\pm}). \quad (1.18)$$

Поскольку минимум любой функции уклонений равен 0 и функция уклонений, стоящая в левой части неравенства (1.18), равна ∞ для всех $\alpha_1 \neq \alpha_{1\pm}$ (координата $\xi_{(1)}^{(\alpha_{1\pm})}$ равна $\alpha_{1\pm}$ с вероятностью 1), то получаем

$$\inf_{\alpha_2, \dots, \alpha_d} \Lambda^{(\xi^{(\alpha_{1\pm})})}(\alpha)|_{\alpha_1 = \alpha_{1\pm}} = 0.$$

Отсюда и из (1.18) получаем (1.17). Равенство $f(\alpha_1) = g(\alpha_1)$ для всех $\alpha_1 \in \mathbf{R}$ установлено. Лемма 1.2 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 1.3. Обозначим $\gamma = \langle e, \xi \rangle$. Тогда с помощью ортогонального преобразования соотношение (1.15) можно записать в виде

$$\Lambda^{(\gamma)}(v) = \inf_{\langle e, \alpha \rangle = v} \Lambda(\alpha). \quad (1.19)$$

(i) Пусть множество B является Λ -отделимым и $\Lambda(B) = \infty$. Тогда $\Pi_{>} \cap \Lambda_{<\infty} = \emptyset$ и, стало быть, $\Lambda(\Pi_{>}) = \infty$. Другими словами, $\Lambda(\alpha) = \infty$ для всех $\alpha \in \Pi_{>}$. Отсюда и из (1.19) следует, что $\Lambda^{(\gamma)}(v) = \infty$ для всех $v > b$ и, значит, $\Lambda^{(\gamma)}((b, \infty)) = \infty$.

В силу (1.11) имеем

$$\mathbf{P}(\xi \in B) \leq \mathbf{P}(\xi \in \Pi_{>}) = \mathbf{P}(\langle e, \xi \rangle > b) = \mathbf{P}(\gamma > b). \quad (1.20)$$

Так как $\mathbf{P}(\gamma > b) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\gamma \geq b + 1/k)$, то в силу экспоненциального неравенства Чебышёва (1.5)

$$\mathbf{P}(\gamma > b) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\Lambda^{(\gamma)}(b+1/k)} = e^{-\Lambda^{(\gamma)}(b+0)}, \quad (1.21)$$

где $\Lambda^{(\gamma)}(b+0) = \Lambda^{(\gamma)}((b, \infty)) = \infty$. Следовательно, $\mathbf{P}(\xi \in B) = 0$, и неравенство (1.12) доказано.

(ii) Пусть теперь $\mathbf{P}(B) < \infty$. Из (1.19) получаем

$$\Lambda^{(\gamma)}((b, \infty)) = \inf_{\Pi_{>}} \Lambda(\alpha) = \Lambda(\Pi_{>}).$$

Поэтому вновь в силу неравенств (1.20), (1.21) находим

$$\mathbf{P}(\xi \in B) \leq e^{-\Lambda^{(\gamma)}((b, \infty))} = e^{-\Lambda(\Pi_{>})}.$$

Но множества Λ_{v_B} и $\Pi_{>}$ не пересекаются. Поэтому $\Lambda(\alpha) > v_B$ для любого $\alpha \in \Pi_{>}$. Это означает, что $\Lambda(\Pi_{>}) \geq v_B$. Неравенство (1.12) установлено. Теорема 1.3 доказана.

Отметим, что если множество B не является Λ -отделимым, то равенство $\Lambda([B]) = \infty$ не влечет за собой, вообще говоря, равенство $\mathbf{P}(\xi \in B) = 0$ (напомним, что множество $\Lambda_{<\infty}$ с точностью до границы совпадает с выпуклой оболочкой носителя распределения вектора ξ). На это указывает следующий пример.

Пример 1.2. Пусть Γ — единичная сфера в $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$, и $B \supset \Gamma$ — ее замкнутая внешность. Тогда $\Lambda([B]) = \infty$, $\mathbf{P}(\xi \in B) = 1$.

Доказательство теоремы 1.1. Так как множества Λ_v , $\Lambda_{<\infty}$ выпуклы, то по теореме Хана–Банаха (см., например, [7, гл. III, § 2, п. 5°, с. 137]) открытое выпуклое множество B является Λ -отделимым, и для него по теореме 1.3 справедливо (1.12). Остается воспользоваться следствием 1.1, в силу которого правая часть (1.12) совпадает с правой частью (1.6). Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Поскольку $B \subset B^{\text{con}}$, то достаточно убедиться, что (1.7) справедливо для любого выпуклого множества $B = B^{\text{con}}$.

Множество $B_N := \{\alpha \in B: |\alpha| \leq N\}$ вместе с B является выпуклым. Выпуклым множеством является также и ε -окрестность $(B_N)_\varepsilon$ множества B_N . Поэтому в силу теоремы 1.1

$$\mathbf{P}(\xi \in B) \leq \mathbf{P}(\xi \in (B_N)_\varepsilon) + P_N \leq e^{-\Lambda((B_N)_\varepsilon)} + P_N, \quad P_N := \mathbf{P}(|\xi| > N).$$

Пусть $\varepsilon > \varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и α_k — последовательность точек из $(B_N)_{\varepsilon_k} \subset [(B_N)_\varepsilon]$ такая, что $\Lambda(\alpha_k) \leq \Lambda((B_N)_{\varepsilon_k}) + 1/k$. Считая, не ограничивая общности, что α_k при $k \rightarrow \infty$ сходится к $\alpha_0 \in [B_N]$, получим в силу полунепрерывности снизу функции Λ

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi \in B) &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} e^{-\Lambda((B_N)_{\varepsilon_k})} + P_N \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} e^{-\Lambda(\alpha_k) + 1/k} + P_N \\ &\leq e^{-\Lambda(\alpha_0)} + P_N \leq e^{-\Lambda([B_N])} + P_N. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Поскольку $\Lambda([B_N]) \downarrow \Lambda([B])$ при $N \uparrow \infty$, то, переходя в (1.22) к пределу при $N \uparrow \infty$, получаем (1.12). Теорема 1.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.4. Так как $B \subset \{\alpha: \Lambda(\alpha) \geq \Lambda(B)\}$, то при $\Lambda(B) \geq \mathbf{E} \gamma$

$$\mathbf{P}(\xi \in B) \leq \mathbf{P}(\Lambda(\xi) \geq \Lambda(B)) = \mathbf{P}(\gamma \geq \Lambda(B)) \leq e^{-\Lambda^{(\gamma)}(\Lambda(B))}.$$

Теорема доказана.

2. Экспоненциальные неравенства чебышевского типа для сумм случайных векторов и для траекторий случайных блужданий.

2.1. Экспоненциальные неравенства чебышевского типа для сумм случайных векторов. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных d -мерных случайных векторов,

$$S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad n \geq 1.$$

Положим

$$\zeta_n := \frac{S_n}{n}, \quad A^{(\zeta_n)}(\lambda) := \ln \mathbf{E} e^{\langle \lambda, \zeta_n \rangle} = nA\left(\frac{\lambda}{n}\right).$$

Тогда функция уклонений $\Lambda^{(\zeta_n)}(\alpha)$ для ζ_n равна

$$\Lambda^{(\zeta_n)}(\alpha) = \sup_{\lambda} \left\{ \langle \lambda, \alpha \rangle - nA\left(\frac{\lambda}{n}\right) \right\} = n \sup_{\lambda} \left\{ \left\langle \frac{\lambda}{n}, \alpha \right\rangle - A\left(\frac{\lambda}{n}\right) \right\} = n\Lambda(\alpha). \quad (2.1)$$

Поэтому непосредственно из теорем 1.1, 1.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.1. (i) Для произвольного открытого выпуклого множества B справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(\zeta_n \in B) \leq e^{-n\Lambda(B)}. \quad (2.2)$$

(ii) Для произвольного выпуклого множества B справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(\zeta_n \in B) \leq e^{-n\Lambda([B^{\text{con}}])},$$

где B^{con} — выпуклая оболочка B .

Из принципа больших уклонений для ζ_n следует, что оценка (2.2) «экспоненциально» неулучшаема. Для множеств $B \subset B_v := \{\alpha: \Lambda(\alpha) \geq v\}$ в [8] установлена оценка

$$\mathbf{P}(\zeta_n \in B) \leq \mathbf{P}(\zeta_n \in B_v) \leq cn^{(d-1)/2} e^{-n\Lambda(B_v)} (1 + \varepsilon_n), \quad (2.3)$$

где $\Lambda(B_v) = v$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, постоянная c зависит от распределения случайного вектора ξ и от размерности d ($c = 2$, $\varepsilon_n = 0$ при $d = 1$).

Интегро-локальные предельные теоремы о точной асимптотике вероятности попадания S_n в малый куб в так называемой крамеровской зоне больших уклонений позволяют установить, что для множеств B_v справедливо при $n \rightarrow \infty$ представление

$$\mathbf{P}(\zeta_n \in B_v) = c' n^{d/2-1} e^{-nv} (1 + \varepsilon'_n), \quad (2.4)$$

где $\varepsilon'_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, c' зависит от распределения векторов ξ и размерности d .

Это означает, что погрешность оценки (2.3) имеет при $n \rightarrow \infty$ порядок роста $n^{1/2}$. Порядок роста «минимальной» погрешности неравенства (2.2) (для наиболее широких *выпуклых* множеств $B = \Pi_{\geq}$) также составляет $n^{1/2}$.

Следует отметить, что оценки (2.3), (2.4) являются *асимптотическими*, при этом явный вид поправочных членов $\varepsilon_n, \varepsilon'_n$ изучен недостаточно. Столь же хороших *точных* оценок для $\mathbf{P}(\zeta_n \in B)$ с произвольными множествами B получить не удастся. Однако можно привести следующее утверждение.

Следствие 2.2. Если $\Lambda(B) \geq \mathbf{E} \gamma$, то

$$\mathbf{P}(\zeta_n \in B) \leq e^{-n\Lambda^{(\gamma)}(\Lambda(B))}. \quad (2.5)$$

Неравенство (2.5) не является «экспоненциально» неулучшаемым из-за «потерь» в первом неравенстве в (2.6) (см. ниже). Об этом говорит также неравенство $\Lambda^{(\gamma)}(v) < v - \mathbf{E} \gamma$ (см. (3.8) ниже), справедливое для неограниченных сверху величин ξ . Однако при больших v выполняется $\Lambda^{(\gamma)}(v) \sim v$ и неравенства (2.2), (2.5) в известном смысле сближаются ($\Lambda^{(\gamma)}(\Lambda(B)) \sim \Lambda(B)$ при больших $\Lambda(B)$).

Доказательство следствия 2.2. В силу выпуклости функции уклонений $\Lambda(\alpha)$ имеем

$$n\Lambda(\zeta_n) \leq \sum_{k=1}^n \gamma_k, \quad \gamma_k := \Lambda(\xi_k).$$

Так как $B \subset \{\alpha: \Lambda(\alpha) \geq \Lambda(B)\}$, то

$$\{\zeta_n \in B\} \subset \{\Lambda(\zeta_n) \geq \Lambda(B)\} \subset \left\{ \sum_{k=1}^n \gamma_k \geq n\Lambda(B) \right\}.$$

Из этого соотношения при $\Lambda(B) \geq \mathbf{E} \gamma$ получаем в силу экспоненциального неравенства Чебышёва

$$\mathbf{P}(\zeta_n \in B) \leq \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \geq n\Lambda(B)\right) \leq e^{-n\Lambda^{(\gamma)}(\Lambda(B))}. \quad (2.6)$$

Следствие 2.2 доказано.

2.2. Экспоненциальные неравенства чебышевского типа для траекторий случайных блужданий. Рассмотрим непрерывные случайные ломаные $s_n = s_n(t)$, $t \in [0, 1]$, построенные по узловым точкам $(k/n, S_k/n)$, где $S_0 = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$. Траектории $s_n(t)$ будут рассматриваться как элементы метрического пространства $(\mathbf{C}, \rho)$, где $\mathbf{C} = \mathbf{C}^d[0, 1]$ — пространство непрерывных функций $f = f(t)$ на отрезке $[0, 1]$ со значениями в $\mathbf{R}^d$, с «равномерной» метрикой

$$\rho(f, g) := \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|.$$

Как и прежде, мы будем изучать возможность оценивания сверху вероятности $\mathbf{P}(s_n \in B)$. Важную роль в этой задаче играет интеграл Лебега

$$I(f) := \int_0^1 \Lambda(f'(t)) dt,$$

определяемый на пространстве абсолютно непрерывных функций $\mathbf{C}_a$ и называемый интегралом уклонений (см. [1], [2]). Здесь $f' = f'(t)$ обозначает производную абсолютно непрерывной функции

$$f(t) = (f_{(1)}(t), \dots, f_{(d)}(t)) \in \mathbf{C}_a: \quad f'(t) = (f'_{(1)}(t), \dots, f'_{(d)}(t)), \quad t \in [0, 1].$$

Функционал I позволяет с помощью принципа больших уклонений описывать асимптотическое поведение последовательности $\ln \mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon)$ при малых $\varepsilon > 0$ и $n \rightarrow \infty$. Для формулировки этого принципа, который содержится в [9], [10] (близкие результаты имеются в [11]), нам наряду с условием $[\mathbf{C}_0]$ понадобится условие Крамера в его наиболее сильной форме.

$$[\mathbf{C}_\infty]. \quad \mathbf{E} e^{(\lambda, \xi)} < \infty \text{ для всех } \lambda.$$

Положим

$$I_a(B) := \inf \{I(f): f \in B \cap \mathbf{C}_a, f(0) = 0\},$$

где нижнюю грань по пустому множеству считаем равной ∞ .

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие $[\mathbf{C}_\infty]$. Тогда:

(i) (принцип больших уклонений) для любого борелевского множества $B \subset \mathbf{C}$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) \leq -I_a([B]), \quad (2.7)$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) \geq -I_a((B)); \quad (2.8)$$

(ii) (локальный принцип больших уклонений) для любой функции $f \in \mathbf{C}_a$, $f(0) = 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in (f)_\varepsilon) = -I(f). \quad (2.9)$$

Если $f \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{C}_a$ или $f(0) \neq 0$, то правую часть в (2.9) следует положить равной $-\infty$.

Утверждения (2.8), (2.9) теоремы 2.1 будут полезны для сравнения с последующими результатами работы.

В [2] показано, что условие $[\mathbf{C}_\infty]$ для утверждений (2.8), (2.9) является излишним. Отчасти на это будет указывать следствие 2.3, приведенное ниже.

Основным утверждением в этом пункте является следующая теорема.

Теорема 2.2. (i) Для любого открытого выпуклого множества $B \subset \mathbf{C}$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(s_n \in B) \leq e^{-nI_a(B)}. \quad (2.10)$$

(ii) Для любого борелевского множества $B \subset \mathbf{C}$

$$\mathbf{P}(s_n \in B) \leq e^{-nI_a([B^{\text{con}}])}, \quad (2.11)$$

где B^{con} — выпуклая оболочка множества B .

(iii) Если B — борелевское множество, $I_a(B) \geq \mathbf{E} \gamma$, $\gamma = \Lambda(\xi)$, то

$$\mathbf{P}(s_n \in B) \leq e^{-n\Lambda^{(\gamma)}(I_a(B))}. \quad (2.12)$$

В связи с теоремой 2.2 и некоторыми последующими утверждениями оказывается полезной следующая лемма.

Лемма 2.1. Если $B \subset \mathbf{C}$ — выпуклое множество, $I_a((B)) < \infty$, то

$$I_a((B)) = I_a(B) = I_a([B]). \quad (2.13)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный функционал

$$I^{\text{lim}}(f) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_a((f)_\varepsilon),$$

определенный на всех элементах $f \in \mathbf{C}$. Функционал I^{lim} совпадает с интегралом уклонений J , определенным в [12] (см. определение 2.1 и следствие 4.1 в [12]), хотя по форме определения этих функционалов различны.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.2. Функционал $I^{\text{lim}}(f)$ является выпуклым и полунепрерывным снизу.

Доказательство. (i) Убедимся сначала, что функционал I^{lim} является выпуклым. Для $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$, $f, g \in \mathbf{C}$ найдутся последовательности (f_n) и (g_n) такие, что $f_n \rightarrow f$ и $g_n \rightarrow g$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$pI^{\text{lim}}(f) + qI^{\text{lim}}(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} (pI(f_n) + qI(g_n)).$$

В силу выпуклости $I(f)$ имеем $pI(f_n) + qI(g_n) \geq I(pf_n + qg_n)$. Поэтому

$$pI^{\lim}(f) + qI^{\lim}(g) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I(pf_n + qg_n).$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n выполняется $pf_n + qg_n \in (pf + qg)_\varepsilon$. Поэтому

$$I(pf_n + qg_n) \geq I((pf + qg)_\varepsilon), \quad pI^{\lim}(f) + qI^{\lim}(g) \geq I_a((pf + qg)_\varepsilon).$$

Переходя к пределу в правой части последнего неравенства при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$pI^{\lim}(f) + qI^{\lim}(g) \geq I^{\lim}(pf + qg).$$

Выпуклость функционала $I^{\lim}(f)$ установлена.

(ii) Докажем теперь полунепрерывность $I^{\lim}(f)$ снизу. Возьмем произвольную последовательность f_n , сходящуюся к f при $n \rightarrow \infty$. Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется $N = N_\varepsilon < \infty$ такое, что для любых $\delta \in (0, \varepsilon)$, $n \geq N$ выполняется

$$(f_n)_\delta \subset (f)_{2\varepsilon}, \quad I_a((f_n)_\delta) \geq I_a((f)_{2\varepsilon}).$$

Поэтому для $n \geq N$

$$I^{\lim}(f_n) = \lim_{\delta \rightarrow 0} I_a((f_n)_\delta) \geq I_a((f)_{2\varepsilon}), \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I^{\lim}(f_n) \geq I_a((f)_{2\varepsilon}).$$

Переходя в правой части последнего неравенства к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I^{\lim}(f_n) \geq I^{\lim}(f).$$

Полунепрерывность снизу функционала $I^{\lim}(f)$, а вместе с ней и лемма 2.2 доказаны.

Вернемся к доказательству леммы 2.1. В силу следствия 1.1 для выпуклого и полунепрерывного снизу функционала

$$J(f) = I^{\lim}(f)$$

в $\mathbf{C}$ имеют место равенства

$$J((B)) = J(B) = J([B]), \tag{2.14}$$

в которых $J(B)$ для любого множества $B \subset \mathbf{C}$ определяется соотношением

$$J(B) := \inf_{f \in B} J(f).$$

Докажем теперь (2.13). Так как для $f \in \mathbf{C}_a$ выполняется $I(f) \geq J(f)$ и для любого $B \subset \mathbf{C}$

$$I_a(B) = \inf\{I(f): f \in B \cap \mathbf{C}_a, f(0) = 0\},$$

то

$$I_a((B)) \geq I_a(B) \geq I_a([B]) \geq J([B]). \quad (2.15)$$

Покажем, что

$$J((B)) \geq I_a((B)). \quad (2.16)$$

Для любого $f \in (B)$ и любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$(f)_\varepsilon \subset (B), \quad I_a((f)_\varepsilon) \geq I_a((B)).$$

Поэтому

$$J(f) = I^{\lim}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_a((f)_\varepsilon) \geq I_a((B)), \quad f \in (B).$$

Отсюда следует (2.16). Из соотношений (2.14)–(2.16) вытекает (2.13). Лемма 2.1 доказана.

Отметим, что если выполнено условие $[C_\infty]$, то, как показано в [9], [10], $I^{\lim}(f) = \infty$ при $f \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{C}_a$. Поскольку $I^{\lim}(f) = I(f)$ при $f \in \mathbf{C}_a$, то в этом случае требуемое свойство выпуклости и полунепрерывности снизу функционала $I^{\lim}(f)$ на $\mathbf{C}$ является очевидным следствием свойств I на $\mathbf{C}_a$ и, стало быть, утверждение леммы 2.1 немедленно вытекает из следствия 1.1.

Из теоремы 2.2 и леммы 2.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.3. Пусть $B \subset \mathbf{C}$ — выпуклое множество. Тогда:

(i) имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(s_n \in B) \leq e^{-nI_a([B])}; \quad (2.17)$$

(ii) если дополнительно выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- а) множество B является открытым,
- б) множество B является замкнутым,
- с) $I_a((B)) < \infty$,

то $[B]$ в правой части (2.17) можно заменить на B ;

(iii) если B удовлетворяет условиям а) или с) утверждения (ii) и выполнено соотношение (2.8), то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) = -I_a(B). \quad (2.18)$$

В [2] показано, что соотношение (2.18) справедливо всегда (условие (2.8) является излишним).

Для выпуклых множеств B неравенство (2.10) (см. утверждение (i) следствия 2.3) существенно уточняет и усиливает оценку сверху (2.7) в теореме 2.1 сразу в нескольких направлениях: (а) неравенство (2.10)

является точным неравенством, а не асимптотическим; (b) оно не требует выполнения условия $[\mathbf{C}_\infty]$; (c) в его правой части отсутствует операция замыкания множества B . Неравенства (2.10), (2.11) могут использоваться также и для доказательства усиленной версии самой теоремы 2.1 (см. [2]).

Соотношение (2.18) показывает, что «экспоненциальная часть» неравенства (2.10) неумлучшаема.

Неравенство (2.12) также уточняет (в известном смысле) оценку (2.7), так как эта оценка, например, для множеств $B_v = \{f: I(f) \geq v\}$ вообще теряет смысл, поскольку $[B_v]$ совпадает с $\mathbf{C}$ и оценка (2.7) становится тривиальной. В то же время (2.12) при $v > \mathbf{E} \gamma$ дает содержательную экспоненциально неумлучшаемую оценку для $\mathbf{P}(s_n \in B_v)$ (см. ниже).

Совпадение $[B_v]$ с $\mathbf{C}$ вытекает из того, что для любых u, ε и $f \in \mathbf{C}$ легко построить такую «быстроколеблющуюся» функцию g , что $\rho(f, g) < \varepsilon$, а ее вариация $\text{Var } g := \int_0^1 |g'(t)| dt \geq u$ может быть сделана сколь угодно большой. Поскольку при выполнении условия $[\mathbf{C}_0]$ для некоторых $c_1 > 0$, $c_2 < \infty$ и всех $\alpha \in \mathbf{R}^d$ выполняется неравенство $\Lambda(\alpha) \geq c_1 |\alpha| - c_2$, то $I(g) \geq c_1 u - c_2$. Таким образом, для заданного $v > 0$ мы можем построить функцию g , сколь угодно близкую к f и такую, что $I(g) \geq v$ ($g \in B_v$ при $u \geq (v + c_2)/c_1$).

Доказательство теоремы 2.2. (i) Обозначим $\mathbf{L}_n$ подкласс пространства $\mathbf{C}$, состоящий из выходящих из нуля непрерывных ломаных $l = l(t)$, линейных на каждом интервале вида $((i-1)/n, i/n)$ для $i = 1, \dots, n$. Например, случайная ломаная s_n является элементом пространства $\mathbf{L}_n$.

Рассмотрим отображение $H: \mathbf{L}_n \rightarrow \mathbf{R}^{dn}$, которое каждой ломаной $l \in \mathbf{L}_n$ ставит в соответствие вектор $Hl = \vec{h} := (h_1, \dots, h_n)$, где $h_i := n(l((i+1)/n) - l(i/n))$, $i = 1, \dots, n$. Обратное отображение $H^{(-1)}$ по вектору приращений $\vec{h} \in \mathbf{R}^{dn}$ восстанавливает ломаную в $\mathbf{L}_n$ с узлами $(i/n, H_i/n)$, где $H_i = h_1 + \dots + h_i$ при $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что H есть взаимно однозначное линейное непрерывное (при «естественной» равномерной метрике ρ в $\mathbf{L}_n$ и евклидовой норме в $\mathbf{R}^{dn}$) отображение пространства $\mathbf{L}_n$ в пространство $\mathbf{R}^{dn}$. Это отображение ставит в соответствие случайной ломаной s_n случайный вектор $HS_n = \vec{\xi} := (\xi_1, \dots, \xi_n)$. При этом отображении образ $H(B \cap \mathbf{L}_n)$ для любого открытого выпуклого множества $B \subset \mathbf{C}$ будет открытым и выпуклым в пространстве $\mathbf{R}^{dn}$. Поэтому в силу теоремы 1.1 в пространстве размерности dn имеем

$$\mathbf{P}(s_n \in B) = \mathbf{P}(s_n \in B \cap \mathbf{L}_n) = \mathbf{P}(\vec{\xi} \in H(B \cap \mathbf{L}_n)) \leq \exp\{-\Lambda^{(\vec{\xi})}(H(B \cap \mathbf{L}_n))\}. \quad (2.19)$$

Заметим, далее, что для любого $\vec{h} \in \mathbf{R}^{dn}$ функция уклонений $\Lambda^{(\vec{\xi})}(\vec{h})$

случайного вектора $\vec{\xi}$ в силу независимости координат имеет вид

$$\Lambda^{(\vec{\xi})}(\vec{h}) = \sum_{k=1}^n \Lambda(h_k) = n \int_0^1 \Lambda(l'(t)) dt = nI(l),$$

где $l = H^{(-1)}\vec{h}$, $\Lambda(\alpha) = \Lambda^{(\xi)}(\alpha)$. Иначе говоря, для $l \in \mathbf{L}_n$ и $\vec{h} = Hl$ выполняется равенство $\Lambda^{(\vec{\xi})}(\vec{h}) = \Lambda^{(\xi)}(Hl) = nI(l)$. Поэтому, при очевидном толковании обозначений, имеем

$$\Lambda^{(\vec{\xi})}(H(B \cap \mathbf{L}_n)) = nI_a(B \cap \mathbf{L}_n) \geq nI_a(B).$$

Это означает, что правая часть в (2.19) не больше, чем $e^{-nI_a(B)}$. Утверждение (i) теоремы 2.2 доказано.

Утверждение (ii) доказывается аналогично теореме 1.2.

Доказательство утверждения (iii) по существу повторяет доказательство теоремы 1.4. Так как $B \cap \mathbf{C}_a \subset \{f: I(f) \geq I_a(B)\}$, то для $I_a(B) \geq \mathbf{E} \gamma$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s_n \in B) &= \mathbf{P}(s_n \in B \cap \mathbf{C}_a) \leq \mathbf{P}(I(s_n) \geq I_a(B)) \\ &= \mathbf{P}\left(\int_0^1 s'_n(t) dt \geq I_a(B)\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^n \Lambda(\xi_k) \geq nI_a(B)\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \geq nI_a(B)\right) \\ &\leq e^{-n\Lambda^{(\gamma)}(I_a(B))}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Это доказывает (2.12). Теорема 2.2 доказана.

Отметим, что доказательство неравенства (2.12) не содержит «потерь» (ср. с доказательством следствия 2.2) и, стало быть, оценка (2.12) для вероятностей попадания в множества B_v , определяемые поверхностями уровня v , в бесконечномерном случае является экспоненциально неуллучшаемой (в отличие от неравенства (2.5) в конечномерном случае). На неуллучшаемость показателя экспоненты в (2.12) указывает также логарифмическая асимптотика вероятности $\mathbf{P}(s_n \in B_v) = \mathbf{P}(\sum_{k=1}^n \gamma_k \geq nv)$, оцениваемой в (2.20) для множеств $B_v = \{f: I(f) \geq v\}$, $v = I_a(B)$. Согласно принципу больших уклонений (см., например, [3]),

$$\ln \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \geq nv\right) \sim -n\Lambda^{(\gamma)}(v) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Можно добавить также, что $\mathbf{P}(s_n \in B_v) \rightarrow 1$ при любом $v < \mathbf{E} \gamma$, а при значениях $v \in [\mathbf{E} \gamma, v_+)$, где v_+ известно, точная асимптотика этой вероятности может быть найдена в явном виде (см., например, [3]).

Так как $\Lambda^{(\gamma)}(v) < v - \mathbf{E} \gamma$ при $v > \mathbf{E} \gamma$ (см. (3.8)), то сравнение (2.20) с (2.10) показывает, что в бесконечномерном случае вероятность попадания ζ_n в B_v «экспоненциально больше», чем вероятность попадания

в любое выпуклое множество $B \subset B_v$, снаружи касающееся множества Λ_v . В конечномерном случае различие между двумя названными вероятностями определялось степенным множителем (см. замечания к следствию 2.1).

3. Свойства случайной величины $\gamma = \Lambda(\xi)$ и ее функции уклонений.

3.1. Инвариантность величины γ при линейном преобразовании над ξ . Известно (см., например, [4], [3]) что для фиксированных вектора $a \in \mathbf{R}^d$ и квадратной невырожденной матрицы M справедливы соотношения

$$\Lambda^{(\xi+a)}(\alpha) = \Lambda^{(\xi)}(\alpha - a), \quad \Lambda^{(\xi M)}(\alpha) = \Lambda^{(\xi)}(\alpha M^{-1}),$$

где M^{-1} — обратная к M матрица. Поэтому

$$\Lambda^{(\xi+a)}(\xi + a) = \Lambda^{(\xi)}(\xi + a - a) = \gamma,$$

т.е. γ при сдвиге ξ не меняется. Аналогично находим

$$\Lambda^{(\xi M)}(\xi M) = \Lambda^{(\xi)}(\xi M M^{-1}) = \gamma,$$

т.е. γ при «повороте и сжатии» вектора ξ также не меняется. Таким образом, линейное преобразование над вектором ξ не меняет величину γ .

3.2. Свойства случайной величины γ и функции $\Lambda^{(\gamma)}$ в одномерном случае $d = 1$. Пусть $S_{\pm}$ — границы множества $\Lambda_{<\infty}$ или, что то же, — границы выпуклого замыкания S носителя распределения величины ξ , $\Lambda_{\pm} = \Lambda(S_{\pm})$, $\Lambda^* = \max\{\Lambda_+, \Lambda_-\}$, $\Lambda_* = \min\{\Lambda_+, \Lambda_-\}$.

Теорема 3.1. (i) Случайная величина $\gamma = \Lambda(\xi)$ удовлетворяет неравенствам

$$\mathbf{P}(\gamma \geq v) \leq \begin{cases} 2e^{-v}, & \text{если } v \leq \Lambda_*; \\ e^{-v}, & \text{если } v \in (\Lambda_*, \Lambda^*]; \\ 0, & \text{если } v > \Lambda^*. \end{cases} \quad (3.1)$$

(ii) Значение $\mathbf{E}\gamma$ удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{E}\gamma \leq 2 - e^{-\Lambda_*} - e^{-\Lambda^*} \leq 2.$$

(iii) Имеет место альтернатива: либо $\Lambda^* = \infty$, и тогда

$$\Lambda^{(\gamma)}(v) \sim v \quad \text{при } v \rightarrow \infty$$

(или, что то же, $\lambda_+^{(\gamma)} := \sup\{t: \mathbf{E} e^{t\gamma} < \infty\} = 1\}$; либо $\Lambda^* < \infty$, и тогда в случае $\Lambda^* = \Lambda_+$ выполняется $\gamma \leq \Lambda_+$ (и, следовательно, $\lambda_+^{(\gamma)} = \infty$), $\mathbf{P}(\gamma = \Lambda_+) = -\ln \mathbf{P}(\xi = S_+) > 0$; аналогичные соотношения справедливы в случае $\Lambda^* = \Lambda_-$.

Доказательство. (i) Рассмотрим уравнение

$$\Lambda(\alpha) = v > 0.$$

Если $v \leq \Lambda_*$, то в силу выпуклости функции $\Lambda(\alpha)$ и ее непрерывности изнутри $[S_-, S_+]$, существует два решения $\alpha_{\pm}(v)$ этого уравнения; при этом $\alpha_+(v) > \mathbf{E} \xi$, $\alpha_-(v) < \mathbf{E} \xi$. Если $v \in (\Lambda_*, \Lambda^*]$, то существует одно решение $\alpha_+(v)$ (если $\Lambda_* = \Lambda_-$) или $\alpha_-(v)$ (если $\Lambda_* = \Lambda_+$). Второе решение мы положим равным $\mp\infty$ соответственно. Если $v > \Lambda^*$, то решений не существует, и мы положим $\alpha_{\pm}(v) = \pm\infty$. Из сказанного следует, что событие $\{\Lambda(\xi) \geq v\}$ есть объединение двух непересекающихся событий $\{\xi \leq \alpha_-(v)\}$, $\{\xi \geq \alpha_+(v)\}$ (эти события могут быть и пустыми). Поэтому для $\gamma = \Lambda(\xi)$ получаем

$$\mathbf{P}(\gamma \geq v) = \mathbf{P}(\xi \leq \alpha_-(v)) + \mathbf{P}(\xi \geq \alpha_+(v)),$$

так что в силу неравенства Чебышёва

$$\mathbf{P}(\gamma \geq v) \leq e^{-\Lambda(\alpha_-(v))} + e^{-\Lambda(\alpha_+(v))} \leq \begin{cases} 2e^{-v}, & \text{если } v \leq \Lambda_*; \\ e^{-v}, & \text{если } v \in (\Lambda_*, \Lambda^*]; \\ 0, & \text{если } v > \Lambda^*. \end{cases}$$

(ii) Второе утверждение вытекает из первого и равенства

$$\mathbf{E} \gamma = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\gamma \geq v) dv.$$

(iii) Пусть $\Lambda^* = \infty$. Из (i) следует, что $\lambda_+^{(\gamma)} \geq 1$. Нам надо доказать обратное неравенство. Положим $\theta_n := n^{-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k$, где γ_k — независимые копии γ . В силу теоремы 2.1

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\theta_n \geq v) \leq -\Lambda^{(\gamma)}(v). \quad (3.2)$$

Оценим снизу левую часть этого неравенства. В силу выпуклости функции Λ для $\zeta_n := n^{-1} \sum_{k=1}^n \xi_k$ выполняется

$$\Lambda(\zeta_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Lambda(\xi_k) = \theta_n, \quad (3.3)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}(\theta_n \geq v) \geq \mathbf{P}(\Lambda(\zeta_n) \geq v) \geq \mathbf{P}(\zeta_n \geq \alpha_+(v)).$$

Пусть для определенности $\Lambda_+ = \infty$. Тогда функция $\Lambda(\alpha)$ непрерывно возрастает от 0 до ∞ на $(\mathbf{E} \xi, \infty)$, и, стало быть, $\Lambda(\alpha_+(v) + 0) =$

$\Lambda(\alpha_+(v)) = v$. В силу принципа больших уклонений для ζ_n имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\theta_n \geq v) &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\theta_n \geq v) \\ &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\zeta_n \geq \alpha_+(v)) \\ &\geq -\Lambda(\alpha_+(v) + 0) = -v. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.2), (3.4) вытекает, что

$$\Lambda^{(\gamma)}(v) \leq v. \quad (3.5)$$

Известно (см., например, [3]), что функция уклонений $\Lambda^{(\gamma)}(v)$ случайной величины γ (как и любой другой случайной величины) допускает представление

$$\Lambda^{(\gamma)}(v) = \int_{\mathbf{E}\gamma}^v \lambda^{(\gamma)}(u) du, \quad (3.6)$$

где $\lambda^{(\gamma)}(u)$ — точка, в которой достигается верхняя грань в определении $\Lambda^{(\gamma)}(u) = \sup_{\lambda} \{\lambda u - \ln \mathbf{E} e^{\lambda \gamma}\}$, и при этом $\lambda^{(\gamma)}(u) \uparrow \lambda_+^{(\gamma)} := \sup\{\lambda: \mathbf{E} e^{\lambda \gamma} < \infty\}$ при $u \uparrow \infty$. Отсюда следует, что существует

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^{(\gamma)}(v)}{v} = \lambda_+^{(\gamma)}. \quad (3.7)$$

Из (3.5), (3.7) вытекает требуемое неравенство $\lambda_+^{(\gamma)} \leq 1$, означающее, что $\lambda_+^{(\gamma)} = 1$.

Если $\Lambda^* < \infty$, то утверждение теоремы очевидным образом следует из (3.1) и равенства

$$\Lambda_+ = -\ln \mathbf{P}(\xi = S_+)$$

(см., например, [3]). Теорема 3.1 доказана.

Соотношение (3.7) и равенство $\lambda_+^{(\gamma)} = 1$ означают, что в широких предположениях

$$\mathbf{P}(\gamma \geq v) = e^{-v+o(v)} \quad \text{при } v \rightarrow \infty$$

(см. об этом также п. 3.3). Кроме того, из равенства $\lambda_+^{(\gamma)} = 1$ в силу (3.6) вытекает неравенство

$$\Lambda^{(\gamma)}(v) < v - \mathbf{E}\gamma \quad \text{для } v > \mathbf{E}\gamma. \quad (3.8)$$

Пример 3.1. Пусть ξ имеет нормальное распределение. В силу п. 3.1 можно считать, что $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 = 1$. Тогда $\Lambda(\alpha) = \alpha^2/2$ (см., например, [3]), так что $\gamma = \xi^2/2$, $\mathbf{E}\gamma = 1/2$,

$$\mathbf{P}(\gamma \geq v) = 2\mathbf{P}(\xi \geq \sqrt{2v}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2v}}^{\infty} e^{-u^2/2} du \sim \frac{1}{\sqrt{\pi v}} e^{-v} \quad \text{при } v \rightarrow \infty.$$

Далее,

$$\mathbf{E} e^{\lambda \gamma} = \mathbf{E} e^{\lambda \xi^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x^2/2 - x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \quad \text{при } \lambda \leq 1.$$

Поэтому уравнение для точки $\lambda^{(\gamma)}(v)$ принимает вид

$$\left(\lambda v + \frac{1}{2} \ln(1-\lambda) \right)'_{\lambda} = v - \frac{1}{2(1-\lambda)} = 0$$

и имеет единственное решение $\lambda^{(\gamma)}(v) = 1 - 1/(2v)$. Отсюда находим

$$\Lambda^{(\gamma)}(v) = \int_{\mathbf{E}_{\gamma}}^v \left(1 - \frac{1}{2u} \right) du = v - \frac{1}{2} (\ln v + \ln 2 + 1).$$

Ясно также, что в рассматриваемом примере $S_{\pm} = \pm\infty$, $\Lambda_{\pm} = \infty$.

Пример 3.2. Пусть ξ имеет показательное распределение. В силу п. 3.1 можно считать, что

$$\mathbf{P}(\xi \geq t) = e^{-t} \quad \text{при } t \geq 0.$$

Тогда (см., например, [3])

$$\Lambda(\alpha) = \alpha - 1 - \ln \alpha, \quad \alpha \geq 0,$$

так что $\gamma = \xi - 1 - \ln \xi$. Уравнение $\Lambda(\alpha) = v$ при $v \rightarrow \infty$ имеет решение $\alpha_+(v) = v + \ln v + 1 + O(v^{-1} \ln v)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\gamma \geq v) &= \mathbf{P}(\xi \geq v + \ln v + 1 + O(v^{-1} \ln v)) \\ &= e^{-(v + \ln v + 1 + O(v^{-1} \ln v))} = v^{-1} e^{-v-1} (1 + O(v^{-1} \ln v)) \quad \text{при } v \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В этом примере $S_- = 0$, $S_+ = \infty$, $\Lambda_{\pm} = \infty$.

Пример 3.3. Для бернуллиевской случайной величины ξ , $\mathbf{P}(\xi = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi = 0)$, выполняется (см., например, [3])

$$\gamma = \Lambda(\xi) = \xi \ln \frac{\xi}{p} + (1-\xi) \ln \frac{1-\xi}{1-p}, \quad \mathbf{E} \gamma = -p \ln p - (1-p) \ln(1-p) \leq \ln 2.$$

Поэтому

$$\gamma = \begin{cases} -\ln p & \text{с вероятностью } p, \\ -\ln(1-p) & \text{с вероятностью } 1-p. \end{cases}$$

При $p = 1/2$ величина γ вырождается в постоянную $\ln 2$. Если $p < 1/2$, то γ есть линейное преобразование над ξ :

$$\gamma = \frac{\xi + a}{b - a} \quad \text{при } a = \ln(1-p), \quad b = \ln(1-p) - \ln p,$$

так что

$$\Lambda^{(\gamma)}(v) = \Lambda(v(b-a) - a).$$

Случай $p > 1/2$ рассматривается аналогично. В этом примере $S_- = 0$, $S_+ = 1$, $\Lambda_- = -\ln(1-p)$, $\Lambda_+ = -\ln p$.

3.3. Свойства случайной величины γ и функции $\Lambda^{(\gamma)}$ в случае $d > 1$. В многомерном случае $d > 1$ анализ свойств случайной величины γ оказывается более сложным. Мы ограничимся рассмотрением векторов ξ , распределение которых на бесконечности ведет себя достаточно правильно.

О п р е д е л е н и е 1. Мы будем говорить, что *одномерная случайная величина ξ принадлежит классу $\mathcal{L}$* , если

$$\ln \mathbf{P}(\xi \geq t) \sim -\Lambda^{(\xi)}(t) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Соотношение (3.9) есть соотношение того же типа, что и в принципе больших уклонений, но при $n = 1$, $t \rightarrow \infty$.

Класс $\mathcal{L}$ достаточно широк и содержит в себе классы $\mathcal{ER}$, $\mathcal{ES}$, $\mathcal{SE}$ (см. [13]) случайных величин ξ , для которых соответственно

$$\mathbf{P}(\xi \geq t) = e^{-\lambda_+ t} t^\alpha L(t), \quad \mathbf{P}(\xi \geq t) = e^{-\lambda_+ t \pm t^\beta L(t)}, \quad \mathbf{P}(\xi \geq t) = e^{-t^\nu L(t)},$$

где $\lambda_+ := \sup\{\lambda: \mathbf{E} e^{\lambda \xi} < \infty\} > 0$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$, $\beta \in (0, 1)$, $\nu > 2$, $L(t)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция.

В качестве гипотезы можно назвать следующий критерий принадлежности величины ξ классу $\mathcal{L}$: *для того чтобы случайная величина ξ принадлежала классу $\mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала выпуклая вниз функция $H(t)$ такая, что $-\ln \mathbf{P}(\xi \geq t) \sim H(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Если такая функция существует, то $H(t) \sim \Lambda(t)$ при $t \rightarrow \infty$.*

Ниже будем предполагать, что $\Lambda_{<\infty} = \mathbf{R}^d$. Тогда множества Λ_v неограниченно расширяются при $v \rightarrow \infty$. Обозначим $B_v := \{\alpha: \Lambda(\alpha) \geq v\}$, $\Lambda_{v-} := \{\alpha: \Lambda(\alpha) < v\}$ и положим $\Pi(e, b) := \{\alpha: \langle e, \alpha \rangle \geq b\}$. Нам понадобится следующее условие.

[П]. Для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число K_ε полупространств $\Pi(e_{k,v}, b_{k,v})$ таких, что при всех достаточно больших v выполняется

$$1) B_v \subset U_v := \bigcup_k \Pi(e_{k,v}, b_{k,v});$$

$$2) \Lambda_{v(1-\varepsilon)-} \cap U_v = \emptyset \quad (\text{можно считать, что } \Pi(e_{k,v}, b_{k,v}) \text{ касаются множества } \Lambda_{v(1-\varepsilon)}).$$

Условие [П] означает, что множества $\Lambda_{v(1-\varepsilon)}$ и B_v могут быть разделены с помощью многогранника, имеющего K_ε плоских граней.

Условие [П] выполнено, например, для класса случайных векторов ξ , для которых выполнено условие $[\mathbf{C}_0]$, а множество $A_{<\infty} := \{\lambda: A(\lambda) < \infty\}$ ограничено в $\mathbf{R}^d$. Действительно, для таких векторов функция уклонений Λ асимптотически линейна по любому направлению e :

$$\Lambda(te) \sim t\Lambda_+(e) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\Lambda_+(e) := \sup_{\lambda \in A_{<\infty}} \langle \lambda, e \rangle$ (см. [13]). Поэтому поверхности $\partial\Lambda_v$ уровня v функции $\Lambda(\alpha)$ являются «асимптотически концентрическими поверхностями», которые после сжатия в v раз сближаются с поверхностью

$\Gamma_1 := \{\alpha: \Lambda_+(\alpha) = 1\}$ при $v \rightarrow \infty$, а поверхность $\partial\Lambda_{v(1-\varepsilon)}$ уровня $v(1-\varepsilon)$ сближается с поверхностью $\Gamma_{1-\varepsilon} := \{\alpha: \Lambda_+(\alpha) = (1-\varepsilon)\}$. Так как выполнено условие $[\mathbf{C}_0]$, то $\inf_e \Lambda_+(e) > 0$ и поверхности $\Gamma_1, \Gamma_{1-\varepsilon}$ не соприкасаются. Кроме того, они являются границами выпуклых множеств. Поэтому ясно, что между Γ_1 и $\Gamma_{1-\varepsilon}$ существует разделяющий многогранник и условие $[\Pi]$ выполнено.

Условие ограниченности множества $A_{<\infty}$ для выполнения $[\Pi]$ не является существенным. Пусть, например, $\Lambda(\alpha)$ растет при $|\alpha| \rightarrow \infty$ квадратичным образом с точностью до слагаемого $o(|\alpha|^2)$ (в этом случае $A_{<\infty} = \mathbf{R}^d$). Тогда, сделав нужное линейное преобразование, мы получим функцию $\sum |\alpha_i|^2 + o(|\alpha|^2)$, для которой поверхности уровня v будут сближаться после сжатия в $\sqrt{v}$ раз со сферой $\sum |\alpha_i|^2 = 1$, а поверхности уровня $v(1-\varepsilon)$ — со сферой $\sum |\alpha_i|^2 = 1-\varepsilon$. Так как многогранники при линейном преобразовании переходят в многогранники, то свойство $[\Pi]$ здесь, очевидно, выполнено. Учитывая замечание 3.1 (см. ниже), можно рассматривать и другие виды сходимости $\Lambda(\alpha)$ к ∞ при $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Теорема 3.2. Пусть $\Lambda_{<\infty} = \mathbf{R}^d$ и выполнено условие $[\Pi]$. Тогда:

- (i) $\lambda_+^{(\gamma)} = 1$, $\Lambda^{(\gamma)}(v) = v + o(v)$ при $v \rightarrow \infty$;
- (ii) если дополнительно найдется единичный вектор e такой, что $\langle e, \xi \rangle \in \mathcal{L}$, то при $v \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\gamma \geq v) = e^{-v+o(v)} \quad \text{и} \quad \gamma \in \mathcal{L}.$$

Доказательство. (i) *Оценка сверху.* Имеем в силу теоремы 1.2

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\gamma \geq v) &= \mathbf{P}(\xi \in B_v) \leq \mathbf{P}\left(\xi \in \bigcup_{1 \leq k \leq K_\varepsilon} \Pi(e_{k,v}, b_{k,v})\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{K_\varepsilon} \mathbf{P}(\xi \in \Pi(e_{k,v}, b_{k,v})) \leq \sum_{k=1}^{K_\varepsilon} e^{-\Lambda(\Pi(e_{k,v}, b_{k,v}))} \leq K_\varepsilon e^{-v(1-\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\ln \mathbf{P}(\gamma \geq v) \leq -(1-\varepsilon)v + \ln K_\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \ln \mathbf{P}(\gamma \geq v) \leq -1, \quad \lambda_+^{(\gamma)} \geq 1. \quad (3.10)$$

Оценка снизу. Воспользуемся соотношениями (3.2), (3.3), из которых следует, что

$$-\Lambda^{(\gamma)}(v) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\Lambda(\zeta_n) \geq v) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\zeta_n \in B_v).$$

Так как $\Lambda_{<\infty} = \mathbf{R}^d$, то функция $\Lambda(\alpha)$ всюду непрерывна и, следовательно, $\Lambda((B_v)) = \Lambda(B_v) = v$. Поэтому в силу принципа больших уклонений для нормированных сумм $\zeta_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n \xi_k$ выполняется

$$-\Lambda^{(\gamma)}(v) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\zeta_n \in B_v) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\zeta_n \in B_v) \geq -\Lambda((B_v)) = -v.$$

Мы получили, что $\Lambda^{(\gamma)}(v) \leq v$, $\lambda_+^{(\gamma)} \leq 1$. Вместе с (3.10) это доказывает первое утверждение теоремы.

(ii) Из (3.10) вытекает, что

$$\mathbf{P}(\gamma \geq v) \leq e^{-v+o(v)} \quad \text{при } v \rightarrow \infty.$$

Поэтому для доказательства второго утверждения нам достаточно установить обратное неравенство.

Для любого $v > 0$ и любого фиксированного ϵ имеем

$$\mathbf{P}(\gamma \geq v) = \mathbf{P}(\xi \in B_v) \geq \mathbf{P}(\xi \in \Pi(\epsilon, b_v)) = \mathbf{P}(\langle \epsilon, \xi \rangle \geq b_v),$$

где b_v выбрано так, что полупространство $\Pi(\epsilon, b_v)$ касается ∂B_v . Как и в § 1, убеждаемся, что $\Lambda^{(\langle \epsilon, \xi \rangle)}(b_v) = v$. Ясно, что $b_v \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow \infty$. Выберем ϵ таким образом, что $\langle \epsilon, \xi \rangle \in \mathcal{L}$. Тогда при $v \rightarrow \infty$

$$\ln \mathbf{P}(\gamma \geq v) \geq \ln \mathbf{P}(\langle \epsilon, \xi \rangle \geq b_v) \sim -\Lambda^{(\langle \epsilon, \xi \rangle)}(b_v) = -v.$$

Это означает, что

$$\mathbf{P}(\gamma \geq v) \geq e^{-v+o(v)} \quad \text{при } v \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3.1. (i) Из доказательства теоремы 3.2 видно, что утверждение этой теоремы останется справедливым и в том случае, когда число K_ϵ полупространств в условии [II] растет вместе с v , но так, что $\ln K_\epsilon = o(v)$ при $v \rightarrow \infty$.

(ii) Если $\Lambda_{<\infty}$ не совпадает с $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$, то случайная величина $\gamma = \Lambda(\xi)$ может и не удовлетворять условию Крамера $[\mathbf{C}_0]$, о чем свидетельствует пример 1.2, рассмотренный в § 1. Напомним, что в примере 1.2 случайный вектор ξ имеет равномерное распределение на единичной сфере Γ в $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$. Поскольку для любого $\alpha \in \Gamma$ выполняется $\Lambda(\alpha) = \infty$, то $\gamma = \Lambda(\xi) = \infty$ с вероятностью 1, и условие Крамера для γ не выполнено.

П р и м е р 3.4. Пусть вектор $\xi = (\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(d)})$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. Тогда функция уклонений имеет вид (см., например, [3]) $\Lambda(\alpha) = (1/2) \sum_{i=1}^d \alpha_i^2$ и случайная величина

$$2\gamma = 2\Lambda(\xi) = \xi_{(1)}^2 + \dots + \xi_{(d)}^2$$

имеет известное распределение χ^2 с d степенями свободы, так что

$$\mathbf{P}(\gamma \geq v) = \frac{1}{\Gamma(d/2)} \int_v^\infty u^{d/2-1} e^{-u} du \sim \frac{1}{\Gamma(d/2)} v^{d/2-1} e^{-v} \quad \text{при } v \rightarrow \infty.$$

Условия теоремы 3.2 здесь очевидно выполнены. При $d = 2$ распределение γ оказывается в точности экспоненциальным: $\mathbf{P}(\gamma \geq v) = e^{-v}$, $v \geq 0$.

Заметим также, что если координаты $\xi_{(i)}$ вектора ξ независимы, то $\Lambda(\alpha) = \sum_{i=1}^d \Lambda^{(\xi_{(i)})}(\alpha_i)$, и изучение свойств γ и $\Lambda^{(\gamma)}(v)$ во многом сводится к одномерному случаю, так как к независимым слагаемым $\Lambda^{(\xi_{(i)})}(\xi_{(i)})$ применима теорема 3.1. В частности, всегда имеет место неравенство $\mathbf{E} \gamma \leq 2d$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А., Мозульский А. А. О принципах больших уклонений в метрических пространствах. — Сиб. матем. журн., 2010, т. 51, № 6, с. 1251–1269.
2. Боровков А. А., Мозульский А. А. Расширенный принцип больших уклонений для траекторий случайных блужданий. I, II. Препринт. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010.
3. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2009, 652 с.
4. Боровков А. А., Мозульский А. А. Большие уклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1992, 222 с.
5. Функциональный анализ. М.: Наука, 1964, 424 с. (Справочная математическая библиотека.)
6. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968, 496 с.
8. Боровков А. А. Некоторые неравенства для сумм многомерных случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. 13, в. 1, с. 255–159.
9. Боровков А. А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, в. 4, с. 635–654.
10. Мозульский А. А. Большие уклонения для траекторий многомерных случайных блужданий. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, в. 2, с. 309–323.
11. Varadhan S. R. S. Asymptotic probabilities and differential equations. — Comm. Pure Appl. Math., 1966, v. 19, № 3, p. 261–286.
12. Боровков А. А., Мозульский А. А. Свойства функционала уклонений от траекторий, возникающего при анализе вероятностей больших уклонений случайных блужданий. Препринт. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010.
13. Боровков А. А., Мозульский А. А. О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 2, с. 260–294; в. 4, с. 641–673.

Поступила в редакцию
20.X.2010