Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Рохлин, Рекуррентные формулы для границ цен платежных обязательств в моделях рынков с дискретным временем, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 1, 47–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 08:19:10

© 2011 г.

РОХЛИН Д. Б.*

**РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГРАНИЦ ЦЕН
ПЛАТЕЖНЫХ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ В МОДЕЛЯХ РЫНКОВ С
ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ**

Вычисление границ цен платежных обязательств сведено к решению последовательности связанных между собой конечномерных оптимизационных задач, зависящих от параметра. В модели идеального рынка полученные формулы описывают верхнюю цену хеджирования, а в модели мультивалютного рынка с операционными издержками — множество начальных портфелей, позволяющих суперхеджировать векторное платежное обязательство. Указанные формулы не содержат мартингаловых мер и их аналогов. Доказательства основаны на теореме о мартингаловом выборе. Эффективность предлагаемого подхода иллюстрируется рядом примеров.

Ключевые слова и фразы: цены хеджирования, операционные издержки, дискретное время, теорема о мартингаловом выборе, измеримые многозначные отображения, выпуклость.

1. Основные результаты. Определение границ множества справедливых цен платежных обязательств является одной из основных задач финансовой математики. В данной работе рассматриваются модели рынков на общих вероятностных пространствах в случае конечного дискретного времени. При таких предположениях указанная задача хорошо изучена как для классической модели идеального рынка, так и для моделей рынков с операционными издержками.

Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, наделенное фильтрацией $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$, где $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Будем предполагать, что σ -алгебры $\mathcal{F}_t$ полны относительно меры $\mathbf{P}$. Модель идеального рынка определяется заданием согласованного с фильтрацией d -мерного процесса $\hat{S}_t = (\hat{S}_t^1, \dots, \hat{S}_t^d)$, $d \geq 2$, цен рискованных активов. Предположим, что $\hat{S}_t^i > 0$, и произведем дисконтирование, т.е. выразим цены всех активов в единицах первого: $S_t^i = \hat{S}_t^i / \hat{S}_t^1$. Дисконтированный капитал X_t^γ

*Южный федеральный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, ул. Мильчакова, 8А, 344090 Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: rokhlin@math.rsu.ru

инвестора представляет собой сумму неслучайного начального капитала x и выигрыша G_t^γ при ставках на приращения цен:

$$X_t^\gamma = x + G_t^\gamma = x + \sum_{k=1}^t \gamma_k \cdot \Delta S_k, \quad \Delta S_k = S_k - S_{k-1}, \quad 1 \leq t \leq T.$$

Здесь $(\gamma_t^2, \dots, \gamma_t^d)$ — предсказуемый процесс портфеля, а $a \cdot b$ обозначает скалярное произведение. Будем считать, что модель удовлетворяет условию *отсутствия арбитража*, т.е. из неравенства $G_T^\gamma \geq 0$ п.н. (по мере $\mathbf{P}$) вытекает, что $G_T^\gamma = 0$ п.н.

Пусть $L^0(\mathcal{F})$ — множество классов эквивалентности $\mathcal{F}$ -измеримых вещественнозначных случайных величин. Обозначим $\mathbf{C}^*(f_T)$ минимальный начальный капитал, позволяющий продавцу хеджировать платежное обязательство, представленное случайной величиной $f_T \in L^0(\mathcal{F}_T)$:

$$\mathbf{C}^*(f_T) = \inf\{x: x + G_T^\gamma \geq f_T \text{ для некоторого предсказуемого процесса } \gamma\}.$$

Данная величина называется *верхней ценой хеджирования* (или *ценой продавца*). Аналогичным образом определяется *нижняя цена хеджирования* (*цена покупателя*):

$$\mathbf{C}_*(f_T) = \sup\{x: f_T + G_T^\gamma \geq x \text{ для некоторого предсказуемого процесса } \gamma\}.$$

Величина $\mathbf{C}_*(f_T)$ представляет собой наибольшую сумму денег, которую без риска можно заплатить при покупке f_T .

Введем множество $\mathcal{P}(S)$ эквивалентных $\mathbf{P}$ вероятностных мер $\mathbf{Q}$ (обозначение $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$), относительно которых процесс S является мартингалом. Хорошо известно, что имеют место равенства

$$\mathbf{C}_*(f_T) = \inf\{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} f_T: \mathbf{Q} \in \mathcal{P}(S), \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} |f_T| < \infty\}, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{C}^*(f_T) = \sup\{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} f_T: \mathbf{Q} \in \mathcal{P}(S), \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} |f_T| < \infty\}. \quad (1.2)$$

Для ограниченных снизу случайных величин f_T доказательство равенства (1.1) можно найти в [8] (теорема 2.1.11), а для ограниченных f_T — в [25] (гл. 6, § 1с, теорема 1). В общем случае данные утверждения вытекают, например, из результатов работы [21] (теорема 4.1). Множество «справедливых» цен f_T заключено между $\mathbf{C}_*(f_T)$ и $\mathbf{C}^*(f_T)$ (см. [2, гл. 2], [8, гл. 2]).

Несмотря на теоретическую важность указанного двойственного описания цен продавца и покупателя, непосредственное применение формул (1.1), (1.2) может оказаться затруднительным, так как обычно множество мартингальных мер является очень большим. В представленные ниже рекуррентные формулы мартингальные меры не входят, а вычисления сводятся к решению последовательности связанных между собой конечномерных оптимизационных задач, зависящих от параметра.

Для формулировки результатов работы нам потребуются определения измеримого интегранда [14, гл. 14D] и регулярного условного математического ожидания [3]. Расширенная функция $\psi: \Omega \times \mathbf{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$ называется $\mathcal{F}$ -измеримым *интеграндом*, если функция $\psi(\cdot, x)$ является $\mathcal{F}$ -измеримой для любого $x \in \mathbf{R}^d$.

Многозначное отображение G , ставящее в соответствие каждому $\omega \in \Omega$ некоторое множество $G(\omega) \subset \mathbf{R}^d$, называется $\mathcal{F}$ -измеримым, если $\{\omega: G(\omega) \cap V \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$ для любого открытого множества $V \subset \mathbf{R}^d$. Интегранд называется *нормальным*, если его надграфик

$$\omega \mapsto \text{epi } \psi(\omega, \cdot) = \{(x, y): f(\omega, x) \leq y\} \subset \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$$

является замкнутым и $\mathcal{F}$ -измеримым. Используя терминологию стохастического анализа, назовем интегранды ψ_1, ψ_2 *неразличимыми*, если множество $A = \{(\omega, x): \psi_1(\omega, x) \neq \psi_2(\omega, x)\}$ является *пренебрежимым*, т.е. $\mathbf{P}\{\omega: (\omega \times \mathbf{R}^d) \cap A \neq \emptyset\} = 0$. Фактически, мы будем рассматривать классы эквивалентности неразличимых интеграндов. Через $L^0(\mathcal{F}, G)$ обозначим множество классов эквивалентности $\mathcal{F}$ -измеримых случайных векторов, принимающих значения в G п.н.

Рассмотрим случайную величину $f(\omega, z)$, зависящую от параметра $z \in \mathbf{R}^k$. Пусть f ограничена и $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^k)$ -измерима, где $\mathcal{B}(\mathbf{R}^k)$ — борелевская σ -алгебра пространства $\mathbf{R}^k$. Положим $f_\varphi(\omega) = f(\omega, \varphi(\omega))$. Функция

$$\hat{f} = \mathbf{E}^r(f | \mathcal{H}): \Omega \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$$

называется *регулярным условным математическим ожиданием* (см. [3]) случайной величины f относительно σ -алгебры $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$, если

- (i) $\hat{f}$ является $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ -измеримой,
- (ii) $\hat{f}_\varphi = \mathbf{E}(f_\varphi | \mathcal{H})$ п.н. для любой $\mathcal{H}$ -измеримой функции $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$.

В работе [3] установлено, что регулярное условное математическое ожидание существует и единственно с точностью до неразличимости.

Полезно рассмотреть частный случай. Пусть $W \in L^0(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^m))$ и $f(\omega, z) = g(\omega, W(\omega), z)$, где g есть $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^k)$ -измеримая ограниченная функция. Обозначим $\mu(\omega, dx)$ регулярное условное распределение W относительно $\mathcal{H}$. Легко видеть, что

$$\mathbf{E}^r(g(\omega, W, z) | \mathcal{H}) = \int_{\mathbf{R}^m} g(\omega, x, z) \mu(\omega, dx) \quad \text{п.н.}$$

Правая часть данного соотношения определяет одну из версий регулярного условного математического ожидания.

Пусть $\mathbf{I}(A)(x) = 1$, если $x \in A$, и $\mathbf{I}(A)(x) = 0$, если $x \notin A$.

Теорема 1. *Определим согласованные с фильтрацией $\mathbf{F}$ последовательности $(w_t^u)_{t=0}^T, (w_t^l)_{t=0}^T$ посредством рекуррентных формул:*

$$\begin{aligned} w_T^u &= w_T^l = f_T, \\ w_t^u(\omega) &= \inf\{\alpha + \beta \cdot S_t(\omega) : (\alpha, \beta) \in G_t^u(\omega)\}, \\ w_t^l(\omega) &= \sup\{\alpha + \beta \cdot S_t(\omega) : (\alpha, \beta) \in G_t^l(\omega)\}, \\ G_t^u &= \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d-1} : \mathbf{E}^r(\mathbf{I}(\alpha + \beta \cdot S_{t+1} \geq w_{t+1}^u) \mid \mathcal{F}_t)(\omega, \alpha, \beta) = 1\right\}, \\ G_t^l &= \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d-1} : \mathbf{E}^r(\mathbf{I}(\alpha + \beta \cdot S_{t+1} \leq w_{t+1}^l) \mid \mathcal{F}_t)(\omega, \alpha, \beta) = 1\right\}. \end{aligned}$$

(i) Если $G_m^u = \emptyset$ (соответственно $G_m^l = \emptyset$) на множестве положительной меры для некоторого m , то $\mathbf{C}^*(f_T) = +\infty$ (соответственно $\mathbf{C}_*(f_T) = -\infty$).

(ii) В противном случае $\mathbf{C}^*(f_T) = w_0^u$, $\mathbf{C}_*(f_T) = w_0^l$.

Формулы теоремы 1 напоминают рекуррентные соотношения метода динамического программирования. Близкие результаты получены в работе [1]. В отличие от [1] мы не используем операцию существенного супремума семейства случайных величин: оптимизационные задачи, определяющие функции w_t^u , w_t^l , конечномерны. Кроме того, мы не предполагаем, что фильтрация $\mathbf{F}$ порождается процессом S .

Заметим, что достаточно было ограничиться рассмотрением только одного набора рекуррентных соотношений, например, для верхней цены хеджирования. Действительно, $\mathbf{C}_*(f_T) = -\mathbf{C}^*(-f_T)$ и аналогичными равенствами связаны функции w_t^l и w_t^u . Формула для верхней цены хеджирования чаще используется в приложениях. С другой стороны, как будет видно в дальнейшем, формулы для нижней цены имеют более естественный вид с точки зрения выпуклого анализа. Поэтому мы предпочитаем сохранить оба набора формул.

Проверим, что последовательность (w_t^l) корректно определена. Если функция w_{t+1}^l является $\mathcal{F}_{t+1}$ -измеримой, то функция

$$f(\omega, \alpha, \beta) = \mathbf{I}(\alpha + \beta \cdot S_{t+1}(\omega) \geq w_{t+1}^u(\omega))$$

измерима относительно $\mathcal{F}_{t+1} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^{d-1})$ и полунепрерывна сверху по (α, β) при фиксированном ω . Согласно [3, теорема 2.2], функция $\hat{f} = \mathbf{E}^r(f \mid \mathcal{F}_t)(\omega, \alpha, \beta)$ также полунепрерывна сверху по (α, β) при почти всех ω . Кроме того, по определению, эта функция является $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^{d-1})$ -измеримой. Отсюда следует, что $(-\hat{f})$ — нормальный интегранд [14, следствие 14.34]. Но тогда многозначное отображение

$$\omega \mapsto G_t^l(\omega) = \{(\alpha, \beta) : \hat{f}(\omega, \alpha, \beta) = 1\} = \{(\alpha, \beta) : \hat{f}(\omega, \alpha, \beta) \geq 1\}$$

является $\mathcal{F}_t$ -измеримым [14, предложение 14.33]. Здесь учтено, что $\hat{f} \leq 1$ в силу неравенства $f \leq 1$. Пример 14.51 из [14] показывает теперь, что w_t^l измерима относительно $\mathcal{F}_t$.

Далее основное внимание будет уделено более общей модели рынка с операционными издержками (или рынка с «трением»). Имеется ряд альтернативных моделей такого рода: см. [8, гл. 3]. Мы рассматриваем предложенную в работе [21] модель «рынка обмена» (barter market), которая наилучшим образом укладывается в схему рассуждений настоящей работы. Для наглядности активы будем считать валютами.

Итак, пусть имеется согласованный с фильтрацией процесс $(d \times d)$ -матриц обменных курсов $\Pi_t = (\pi_t^{ij})_{i,j=1}^d$. Элемент π_t^{ij} определяет количество единиц i -й валюты, которое можно обменять на единицу j -й валюты в момент времени t . Предполагается, что выполняются соотношения $\pi^{ij} > 0$, $\pi^{ii} = 1$ и $\pi^{ij} \leq \pi^{ik} \pi^{kj}$, последнее из которых означает, что прямой обмен не хуже, чем цепочка обменов. *Конусом платежеспособности* называется выпуклый конус K_t , порожденный векторами стандартного базиса $\{e_i\}_{i=1}^d$ и векторами $\pi_t^{ij} e_i - e_j$.

Пусть компоненты $\mathcal{F}_t$ -измеримого случайного вектора $\theta_t = (\theta_t^1, \dots, \theta_t^d)$ описывают количество единиц каждой валюты в портфеле инвестора в момент времени t . Элементами K_t являются портфели, которые могут быть ликвидированы. Процесс портфеля $(\theta_t)_{t=0}^d$ называется *самофинансируемым*, если его приращения могут быть «приобретены бесплатно»:

$$\theta_t - \theta_{t-1} \in -K_t \quad \text{п.н.}, \quad t = 0, \dots, T; \quad \theta_{-1} = 0.$$

Обозначим $A_T(\Pi)$ выпуклый конус в множестве $L^0(\mathcal{F}_T, \mathbf{R}^d)$, состоящий из элементов θ_T самофинансируемых портфелей. Говорят (см. [21]), что процесс обменных курсов $(\Pi_t)_{t=0}^T$ удовлетворяет условию *робастного отсутствия арбитража* (NA^r: robust no-arbitrage), если существует процесс $(\tilde{\Pi}_t)_{t=0}^T$ обменных курсов с меньшими операционными издержками:

$$\left[\frac{1}{\tilde{\pi}_t^{ji}}, \tilde{\pi}_t^{ij} \right] \subset \text{ri} \left[\frac{1}{\pi_t^{ji}}, \pi_t^{ij} \right],$$

удовлетворяющий условию *отсутствия арбитража* (NA):

$$A_T(\tilde{\Pi}) \cap L^0(\mathcal{F}_T, \mathbf{R}_+^d) = \{0\}, \quad \mathbf{R}_+^d = \{x \in \mathbf{R}^d: x^i \geq 0\}.$$

Здесь и далее ri обозначает относительную внутренность множества (см. [13, гл. 2, § 6]).

Пусть $\mathbf{H}_+ = \mathbf{H}_+(\zeta_T)$ обозначает множество портфелей $\zeta_0 \in \mathbf{R}^d$, которые позволяют суперхеджировать платежное векторное обязательство $\zeta_T \in L^0(\mathcal{F}_T, \mathbf{R}^d)$:

$$\mathbf{H}_+(\zeta_T) = \{\zeta_0 \in \mathbf{R}^d: \zeta_T - \zeta_0 \in A_T(\Pi)\}.$$

Аналогичным образом определяется множество $\mathbf{H}_-$ портфелей, позволяющих субхеджировать ζ_T : $\mathbf{H}_-(\zeta_T) = \{\zeta_0 \in \mathbf{R}^d: \zeta_0 - \zeta_T \in A_T(\Pi)\}$.

Пусть $\mathcal{M}(\text{ri } K^*)$ обозначает множество $\mathbf{P}$ -мартингалов, элементы Z_t которых принимают значения в относительной внутренности конусов $K_t^* = \{y: x \cdot y \geq 0, x \in K_t\}$, сопряженных к K_t : $Z_t \in \text{ri } K_t^*$. В работе [21] элементы $\mathcal{M}(\text{ri } K^*)$ называются строго согласованными процессами цен. При выполнении условия NA^r множество $\mathcal{M}(\text{ri } K^*)$ непусто [21, теорема 1.7], а множество $\mathbf{H}_+$ допускает двойственное описание (см. [21, теорема 4.1]):

$$\mathbf{H}_+(\zeta_T) = \{\zeta_0 \in \mathbf{R}^d: \zeta_0 \cdot Z_0 \geq \mathbf{E}(\zeta_T \cdot Z_T), Z \in \mathcal{M}(\text{ri } K^*, \zeta_T)\}. \quad (1.3)$$

Здесь $\mathcal{M}(\text{ri } K^*, \zeta_T)$ — множество элементов $\mathcal{M}(\text{ri } K^*)$, удовлетворяющих дополнительному условию $\mathbf{E}|\zeta_T \cdot Z_T| < \infty$. Аналогичным образом описывается и $\mathbf{H}_-$:

$$\mathbf{H}_-(\zeta_T) = \{\zeta_0 \in \mathbf{R}^d: \zeta_0 \cdot Z_0 \leq \mathbf{E}(\zeta_T \cdot Z_T), Z \in \mathcal{M}(\text{ri } K^*, \zeta_T)\}. \quad (1.4)$$

Нетрудно проверить (см. [21]), что

$$\text{ri } K_t^* = \left\{ w \in \mathbf{R}_{++}^d: \frac{w^j}{w^i} \in \text{ri} \left[\frac{1}{\pi_t^{ji}}, \pi_t^{ij} \right], 1 \leq i, j \leq d \right\},$$

где $\mathbf{R}_{++}^d$ — множество векторов со строго положительными компонентами.

Введем опорную и индикаторную функции множества $B \subset \mathbf{R}^d$:

$$s(x|B) = \sup_{y \in B} (x \cdot y), \quad \delta(x|B) = \begin{cases} 0, & x \in B, \\ +\infty, & x \notin B, \end{cases}$$

а также субдифференциал сублинейной функции p в нуле:

$$\partial p = \{x: x \cdot y \leq p(y), y \in \mathbf{R}^d\}.$$

Основной результат настоящей работы содержится в теореме 2. В ней представлены рекуррентные формулы для множеств $\mathbf{H}_+$, $\mathbf{H}_-$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие робастного отсутствия арбитража (NA^r). Определим согласованные с фильтрацией последовательности нормальных интеграндов $(h_t^l)_{t=0}^T$, $(h_t^u)_{t=0}^T$ посредством рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} h_T^l(\omega, x^*) &= \zeta_T \cdot x^* + \delta(x^* | K_T^*), & h_T^u(\omega, x^*) &= \zeta_T \cdot x^* - \delta(x^* | K_T^*), \\ h_t^l(\omega, x^*) &= s(x^* | G_t^l) + \delta(x^* | K_t^*), & h_t^u(\omega, x^*) &= -s(-x^* | G_t^u) - \delta(x^* | K_t^*), \\ G_t^l(\omega) &= \left\{ z \in \mathbf{R}^d: \mathbf{E}^r(\mathbf{I}(z \in \partial h_{t+1}^l) | \mathcal{F}_t)(\omega, z) = 1 \right\}, \\ G_t^u(\omega) &= \left\{ z \in \mathbf{R}^d: \mathbf{E}^r(\mathbf{I}(-z \in \partial(-h_{t+1}^u)) | \mathcal{F}_t)(\omega, z) = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

(i) Если $G_m^u = \emptyset$ (соответственно $G_m^l = \emptyset$) на множестве положительной меры для некоторого m , то $\mathbf{H}_+(\zeta_T) = \emptyset$ (соответственно $\mathbf{H}_-(\zeta_T) = \emptyset$). При этом $h_t^u, h_t^l, t \leq m$, не определены.

(ii) В противном случае $\mathbf{H}_-(\zeta_T) = \partial h_0^l, \mathbf{H}_+(\zeta_T) = -\partial(-h_0^u)$.

Отметим, что имеет место равенство $\mathbf{H}_-(\zeta_T) = -\mathbf{H}_+(-\zeta_T)$, и аналогичные соотношения связывают функции h_t^l и h_t^u . Поэтому один из указанных в теореме 2 наборов рекуррентных соотношений по существу является излишним.

Проверим, что последовательность (h_t^l) корректно определена и ее элементы являются сублинейными нормальными интеграндами. Введем преобразование Юнга–Фенхеля выпуклой функции ψ :

$$\psi^*(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^d} (x \cdot y - \psi(y)).$$

Пусть h_{t+1} — сублинейный нормальный $\mathcal{F}_{t+1}$ -измеримый интегранд. Заметим, что

$$f(\omega, z) := \mathbf{I}(z \in \partial h_{t+1}^l) = \mathbf{I}(h_{t+1}^{l,*}(\omega, z) \leq 0), \quad (1.6)$$

где $h_{t+1}^{l,*}$ — преобразование Юнга–Фенхеля функции h_{t+1}^l по второму аргументу. Но поскольку $h_{t+1}^{l,*}$ — нормальный интегранд [14, теорема 14.50], то функция f является $\mathcal{F}_{t+1} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ -измеримой и полунепрерывной сверху по z . По тем же соображениям, что и при рассмотрении последовательности (w_t^l) , отсюда вытекает, что $\hat{f} = \mathbf{E}^r(f | \mathcal{F}_t)$ — нормальный интегранд и многозначное отображение G_t^l является $\mathcal{F}_t$ -измеримым. Но тогда h_t^l является $\mathcal{F}_t$ -измеримым нормальным интеграндом (см. [14, пример 14.51, предложение 14.44]).

Представляет интерес конкретизация теоремы 2 для модели с избранной валютой — банковским счетом. В такой модели операция обмена актива с номером i на актив с номером j эквивалентна последовательному обмену i -го актива на банковский счет и обмену полученных денег на j -й актив. Если банковский счет имеет номер 1, то элементы матрицы обменных курсов представимы в виде $\pi^{ij} = \pi^{i1} \pi^{1j}$ [5], [16]. При этом

$$S^{b,i} = \frac{1}{\pi^{i,1}}, \quad S^{a,i} = \pi^{1,i}, \quad i = 2, \dots, d,$$

где согласованные положительные процессы $S^{b,i} \leq S^{a,i}$ определяют цены продажи и покупки i -й валюты, выраженные в единицах банковского счета. Для данной модели

$$K_t^* = \{\lambda(1, y^*): y^* \in C_t = [S_t^{2,b}, S_t^{2,a}] \times \dots \times [S_t^{d,b}, S_t^{d,a}], \lambda \geq 0\}.$$

Теорема 3. Пусть модель валютного рынка с банковским счетом удовлетворяет условию (NA^r) . Для заданного платежного обязатель-

ства $\zeta_T = (\xi_T, \eta_T) \in L^0(\mathcal{F}_T, \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d-1})$ введем согласованные с фильтрацией последовательности $(g_t^l)_{t=0}^T, (g_t^u)_{t=0}^T$ по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} g_T^l(\omega, y^*) &= g_T^u(\omega, y^*) = \xi_T + \eta_T \cdot y^*, & y^* \in C_T, \\ g_t^l(\omega, y^*) &= \sup\{\alpha + \beta \cdot y^*: (\alpha, \beta) \in G_t^l\}, & y^* \in C_t, \\ g_t^u(\omega, y^*) &= \inf\{\alpha + \beta \cdot y^*: (\alpha, \beta) \in G_t^u\}, & y^* \in C_t, \\ G_t^l(\omega) &= \left\{(\alpha, \beta): \mathbf{E}^r(\mathbf{I}\{\alpha + \beta \cdot y^* \leq g_{t+1}^l(\omega, y^*), y^* \in C_{t+1}\} | \mathcal{F}_t) = 1\right\}, \\ G_t^u(\omega) &= \left\{(\alpha, \beta): \mathbf{E}^r(\mathbf{I}\{\alpha + \beta \cdot y^* \geq g_{t+1}^u(\omega, y^*), y^* \in C_{t+1}\} | \mathcal{F}_t) = 1\right\}. \end{aligned}$$

(i) Если $G_m^u = \emptyset$ (соответственно $G_m^l = \emptyset$) на множестве положительной меры для некоторого m , то $\mathbf{H}_+ = \emptyset$ (соответственно $\mathbf{H}_- = \emptyset$). При этом $g_t^u, g_t^l, t \leq m$, не определены.

(ii) В противном случае

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_-(\xi_T, \eta_T) &= \{(\xi_0, \eta_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d-1}: \xi_0 + \eta_0 \cdot y^* \leq g_0^l(y^*), y^* \in C_0\}, \\ \mathbf{H}_+(\xi_T, \eta_T) &= \{(\xi_0, \eta_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d-1}: \xi_0 + \eta_0 \cdot y^* \geq g_0^u(y^*), y^* \in C_0\}. \end{aligned}$$

В предположении, что начальный портфель содержит только банковский счет, верхнюю и нижнюю цены хеджирования в рассматриваемой модели естественно определить следующим образом:

$$\mathbf{C}^*(\xi_T, \eta_T) = \inf\{\xi_0: (\xi_0, 0) \in \mathbf{H}_+\} = \sup\{g_0^u(y^*): y^* \in C_0\}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{C}_*(\xi_T, \eta_T) = \sup\{\xi_0: (\xi_0, 0) \in \mathbf{H}_-\} = \inf\{g_0^l(y^*): y^* \in C_0\}. \quad (1.8)$$

Приведенные выше результаты имеют достаточно прозрачный экономический смысл. Для модели идеального рынка (или рынка без трения) функцию w_t^u , введенную в теореме 1, можно рассматривать как верхнюю цену (цену продавца) платежного обязательства f_T в момент времени t . При $t = T$ эта цена равна выплате f_T . Если цена w_{t+1}^u определена, то w_t^u определяется как минимальная цена $\alpha + \beta \cdot S_t$ портфеля (α, β) , который позволяет с условной вероятностью 1 расплатиться по платежному обязательству w_{t+1}^u в момент времени $t + 1$.

Для модели рынка с трением при наличии банковского счета (теорема 3) функции g_t^u имеют тот же смысл, но зависят от дополнительного параметра y^* , который описывает возможные цены активов на «виртуальном» рынке без трения. Эти цены расположены между «реальными» ценами покупки и продажи: $y^* \in [S_t^{2,b}, S_t^{2,a}] \times \dots \times [S_t^{d,b}, S_t^{d,a}]$, и при определении верхней цены g_t^u инвестор ориентируется на худший вариант в момент времени $t + 1$.

В общей модели рынка с трением (теорема 2) функции h_t^u дают «инвариантное» описание верхней цены платежного обязательства

$(\zeta_T^1, \dots, \zeta_T^d)$ в момент времени t , в том смысле, что эти функции зависят только от матрицы π^{ij} обменных курсов. Векторы $x^* \in K_t^*$ описывают цены на виртуальном рынке без трения, согласованные с данными обменными курсами: $x^{*,j}/x^{*,i} \in [1/\pi_t^{ji}, \pi_t^{ij}]$.

2. Субдифференциальное описание множеств $\mathbf{H}_+$, $\mathbf{H}_-$. Прежде всего сформулируем теорему о мартингальном выборе [15], [17], на которой основаны дальнейшие рассуждения.

Случайный вектор η называется селектором G , если $\eta(\omega) \in G(\omega)$ для всех $\omega \in \text{dom } G := \{\omega' : G(\omega') \neq \emptyset\}$. Последовательность $(\eta_i)_{i=1}^\infty$ $\mathcal{F}$ -измеримых селекторов G таких, что множества $\{\eta_i(\omega)\}_{i=1}^\infty$ плотны в $G(\omega)$ при каждом $\omega \in \text{dom } G$, называется *представлением Кастэна* для G . Известно, что для $\mathcal{F}$ -измеримости многозначного отображения с непустыми замкнутыми значениями необходимо и достаточно существования $\mathcal{F}$ -измеримого представления Кастэна (см. [14, теорема 14.5]).

С помощью cl и conv далее обозначаются замыкание и выпуклая оболочка подмножества конечномерного пространства. Рассмотрим представление Кастэна $(\eta_i)_{i=1}^\infty$ для $\mathcal{F}$ -измеримого многозначного отображения G с п.н. непустыми замкнутыми значениями $G(\omega)$ и, следуя [15], положим

$$\kappa(G, \mathcal{H}; \omega) = \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^\infty \kappa(\eta_i, \mathcal{H}; \omega) \right),$$

где $\kappa(\eta_i, \mathcal{H})$ — носитель регулярного условного распределения η_i относительно σ -алгебры $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. В работе [15] показано, что $\mathcal{H}$ -измеримое многозначное отображение $\omega \mapsto \kappa(G, \mathcal{H}; \omega)$ не зависит от выбора представления Кастэна с точностью до множества нулевой меры. Если $G = \emptyset$ на множестве положительной меры, то полагаем $\kappa(G, \mathcal{H}) = \emptyset$.

Пусть теперь имеется последовательность $\mathcal{F}_t$ -измеримых многозначных отображений G_t , $t = 0, \dots, T$, с непустыми выпуклыми значениями $G_t(\omega) \subset \mathbf{R}^d$. Следуя [15], [17], будем говорить, что для последовательности $(G_t)_{t=0}^T$ разрешима *задача о мартингальном выборе*, если существуют согласованный с $\mathbf{F}$ случайный процесс $S_t \in \text{ri } G_t$ и вероятностная мера $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ такие, что S является $\mathbf{Q}$ -мартингалом. Введем последовательность многозначных отображений W_t по рекуррентной формуле

$$W_T = \text{cl } G_T; \tag{2.1}$$

$$W_t = \text{cl}(\text{ri } G_t \cap \text{ri } Y_t), \quad Y_t = \text{cl}(\text{conv } \kappa(W_{t+1}, \mathcal{F}_t)), \quad 0 \leq t \leq T-1. \tag{2.2}$$

Данная последовательность корректно определена и согласована с фильтрацией (см. [17]). Заметим, что если $W_t = \emptyset$ на множестве положительной меры, то $W_j = \emptyset$ при всех $j < t$.

Теорема 4 (о мартингальном выборе). *Для согласованной с фильтрацией последовательности $(G_t)_{t=0}^T$ многозначных отображений с непустыми выпуклыми значениями $G_t(\omega)$ задача о мартингальном выборе разрешима тогда и только тогда, когда все элементы W_t последовательности (2.1), (2.2) принимают непустые значения п.н.*

В полной общности теорема 4 доказана в работе [17]. Если множества $G_t(\omega)$ являются конусами, то разрешимость задачи о мартингальном выборе равносильна существованию $\mathbf{P}$ -мартингала S , удовлетворяющего условию $S_t \in \text{ri} G_t$ (см. [15, введение]). Из этого замечания и схемы доказательства теоремы 4 легко вытекает следующий результат.

Лемма 1. *Рассмотрим согласованную с фильтрацией последовательность $(G_t)_{t=0}^T$ многозначных отображений с непустыми выпуклыми коническими значениями $G_t(\omega)$. Для $x \in \mathbf{R}^d$ существует процесс $Y \in \mathcal{M}(\text{ri} G)$, удовлетворяющий условию $Y_0 = x$, тогда и только тогда, когда $x \in \text{ri} W_0$.*

Заметим, что аналогичное утверждение сформулировано в работе [18].

Зафиксируем платежное обязательство $\zeta_T \in L^0(\mathcal{F}_T, \mathbf{R}^d)$ и введем согласованный с фильтрацией многозначный случайный процесс

$$U_t^* = K_t^* \times \mathbf{R}, \quad 0 \leq t < T; \quad U_T^* = \{(x^*, y^*): x^* \in K_T^*, y^* = \zeta_T \cdot x^*\},$$

где K_t — конусы платежеспособности. Заметим, что

$$\begin{aligned} \text{ri} U_t^* &= \text{ri} K_t^* \times \mathbf{R}, \quad 0 \leq t < T; \\ \text{ri} U_T^* &= \{(x^*, y^*): x^* \in \text{ri} K_T^*, y^* = \zeta_T \cdot x^*\}. \end{aligned}$$

Для многозначного случайного процесса с коническими значениями $G_t^*(\omega)$ положим

$$\mathcal{W}_T^G =: G_T^*, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{W}_t^G =: (\text{ri} G_t^* \cap \text{ri} \mathcal{Y}_t^G), \quad \mathcal{Y}_t^G =: (\text{conv } \kappa(\mathcal{W}_{t+1}^G, \mathcal{F}_t)), \quad 0 \leq t \leq T-1. \quad (2.4)$$

Лемма 2. *Пусть в модели валютного рынка с трением выполнено условие NA^r . Тогда для любого платежного обязательства $\zeta_T \in L^0(\mathcal{F}_T, \mathbf{R}^d)$ и любого $\zeta_0 \in \mathbf{R}^d$ следующие условия эквивалентны:*

- (a) $\zeta_0 \cdot Z_0 = \mathbf{E}(\zeta_T \cdot Z_T)$ для некоторого $Z \in \mathcal{M}(\text{ri} K^*, \zeta_T)$;
- (b) существует элемент $x^* \in \text{ri} \mathcal{W}_0^K$ такой, что $(x^*, \zeta_0 \cdot x^*) \in \text{ri} \mathcal{W}_0^U$ (в обозначениях (2.3), (2.4)).

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). При выполнении условия (a) положим $y_t = \mathbf{E}(\zeta_T \cdot Z_T | \mathcal{F}_t)$. Поскольку $Z \in \mathcal{M}(\text{ri} K^*)$, то $(Z, y) \in \mathcal{M}(\text{ri} U^*)$ и по лемме 1

$$(Z_0, y_0) = (Z_0, \zeta_0 \cdot Z_0) \in \text{ri} \mathcal{W}_0^U, \quad Z_0 \in \text{ri} \mathcal{W}_0^K.$$

(b) $\Rightarrow$ (a). По лемме 1 при выполнении условия (b) существует $(Z, y) \in \mathcal{M}(\text{ri } U^*)$ такой, что

$$(Z_0, y_0) = (x^*, \zeta_0 \cdot x^*) \in \text{ri } \mathcal{W}_0^U.$$

При этом $y_0 = \zeta_0 \cdot Z_0 = \mathbf{E}y_T = \mathbf{E}(\zeta_T \cdot Z_T)$. Лемма доказана.

Для $(x, y) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ положим $\text{Pr}(x, y) = x$. В следующей лемме устанавливается связь между процессами $\mathcal{W}^U$ и $\mathcal{W}^K$.

Лемма 3. *Справедливы равенства $\text{ri } \mathcal{W}_t^K = \text{Pr}(\text{ri } \mathcal{W}_t^U)$ п.н., $t = 0, \dots, T$.*

Доказательство. Из определения U_T^* следует, что

$$\text{Pr } \mathcal{W}_T^U = \text{Pr } U_T^* = K_T^* = \mathcal{W}_T^K.$$

Предположим, что $\text{ri } \mathcal{W}_{t+1}^K = \text{Pr}(\text{ri } \mathcal{W}_{t+1}^U)$. Интересен лишь случай $\mathcal{W}_{t+1}^K \neq \emptyset$ п.н. Пусть $(\xi_{t+1}^i)_{i=1}^\infty$ — $\mathcal{F}_{t+1}$ -измеримое представление Кастэна для $\mathcal{W}_{t+1}^U$. Тогда $(\eta_{t+1}^i)_{i=1}^\infty$, $\eta_{t+1}^i = \text{Pr } \xi_{t+1}^i$, — представление Кастэна для $\text{cl}(\text{Pr } \mathcal{W}_{t+1}^U) = \mathcal{W}_{t+1}^K$. Пусть $\mathbf{P}_{\eta_{t+1}}$ — регулярное условное распределение η_{t+1} относительно $\mathcal{F}_t$. Если $\eta_{t+1} = \text{Pr } \xi_{t+1}$, то

$$\varkappa(\eta_{t+1}, \mathcal{F}_t) = \text{cl}(\text{Pr } \varkappa(\xi_{t+1}, \mathcal{F}_t)) \quad \text{п.н.} \quad (2.5)$$

Чтобы доказать это утверждение, заметим сначала, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\eta_{t+1}}(\omega, B) &= \mathbf{P}(\eta_{t+1} \in B \mid \mathcal{F}_t)(\omega) = \mathbf{P}(\xi_{t+1} \in B \times \mathbf{R} \mid \mathcal{F}_t)(\omega) \\ &= \mathbf{P}_{\xi_{t+1}}(\omega, B \times \mathbf{R}) \quad \text{п.н.,} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d). \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{P}_{\eta_{t+1}}(\omega, V) = \mathbf{P}_{\xi_{t+1}}(\omega, V \times \mathbf{R})$ для всех $\omega \in \Omega'$, где $\mathbf{P}(\Omega') = 1$, и всех V из некоторой счетной базы $\mathcal{V}$ открытых множеств $\mathbf{R}^d$. Если $\omega \in \Omega'$ и точка $(x, y) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ принадлежит $\varkappa(\xi_{t+1}, \mathcal{F}_t)(\omega)$, то

$$\mathbf{P}_{\eta_{t+1}}(\omega, V_x) = \mathbf{P}_{\xi_{t+1}}(\omega, V_x \times \mathbf{R}) > 0 \quad (2.6)$$

для любой окрестности $V_x \in \mathcal{V}$ точки x . Следовательно, $x \in \varkappa(\eta_{t+1}, \mathcal{F}_t)$.

С другой стороны, для $x \in \varkappa(\eta_{t+1}, \mathcal{F}_t)(\omega)$, $\omega \in \Omega'$, также выполняются соотношения (2.6). Следовательно, множество $(V_x \times \mathbf{R}) \cap \varkappa(\xi_{t+1}, \mathcal{F}_t)$ непусто и содержит точку (x', y') , проекция которой принадлежит V_x .

Итак, доказано, что

$$\text{Pr } \varkappa(\xi_{t+1}, \mathcal{F}_t) \subset \varkappa(\eta_{t+1}, \mathcal{F}_t) \subset \text{cl}(\text{Pr } \varkappa(\xi_{t+1}, \mathcal{F}_t)) \quad \text{п.н.}$$

Отсюда вытекает (2.5).

Пусть B, B_i — любые подмножества $\mathbf{R}^{d+1}$. Используя элементарные соотношения $\text{cl}(\bigcup_{i=1}^\infty \text{cl } B_i) = \text{cl}(\bigcup_{i=1}^\infty B_i)$, $\text{ri}(\text{conv}(\text{cl } B)) = \text{ri}(\text{conv } B)$ и

формулу (2.5), находим

$$\begin{aligned}
\kappa(\mathcal{W}_{t+1}^K, \mathcal{F}_t) &= \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \kappa(\eta_{t+1}^i, \mathcal{F}_t) \right) = \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{cl}(\text{Pr } \kappa(\xi_{t+1}^i, \mathcal{F}_t)) \right) \\
&= \text{cl} \left(\text{Pr} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \kappa(\xi_{t+1}^i, \mathcal{F}_t) \right) \right) = \text{cl}(\text{Pr } \kappa(\mathcal{W}_{t+1}^U, \mathcal{F}_t)) \quad \text{п.н.}; \\
\text{ri } \mathcal{Y}_t^K &= \text{ri}(\text{conv } \kappa(\mathcal{W}_{t+1}^K, \mathcal{F}_t)) = \text{ri} \left(\text{conv}(\text{cl}(\text{Pr } \kappa(\mathcal{W}_{t+1}^U, \mathcal{F}_t))) \right) \\
&= \text{ri}(\text{Pr}(\text{conv } \kappa(\mathcal{W}_{t+1}^U, \mathcal{F}_t))) = \text{Pr}(\text{ri } \mathcal{Y}_t^U) \quad \text{п.н.}
\end{aligned}$$

Доказательство леммы 3 завершает следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
\text{ri } \mathcal{W}_t^K &= \text{ri } K_t^* \cap \text{ri } \mathcal{Y}_t^K = \text{Pr}(\text{ri}(K_t^* \times \mathbf{R})) \cap \text{Pr}(\text{ri } \mathcal{Y}_t^U) \\
&= \text{Pr}(\text{ri } U_t^* \cap \text{ri } \mathcal{Y}_t^U) = \text{Pr}(\text{ri } \mathcal{W}_t^U) \quad \text{п.н.}
\end{aligned}$$

Следующая лемма показывает, что функции, которые определяются формулами

$$\varphi_t^l(x^*) = \inf\{y^*: (x^*, y^*) \in \mathcal{Y}_t^U\}, \quad \psi_t^l(x^*) = \inf\{y^*: (x^*, y^*) \in \mathcal{W}_t^U\}, \quad (2.7)$$

являются положительно однородными, выпуклыми и замкнутыми. Напомним, что расширенная выпуклая функция f называется *собственной*, если ее надграфик непуст и не содержит вертикальных прямых: [13, гл. 1, § 4].

Лемма 4. *Для замкнутого выпуклого конуса $A \subset \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ функция*

$$\psi(x) = \inf\{y: (x, y) \in A\}$$

положительно однородна, выпукла и замкнута. Она является собственной тогда и только тогда, когда

$$\{x' \in \mathbf{R}^d: (-x', 1) \in A^*\} \neq \emptyset. \quad (2.8)$$

Если ψ собственная, то условие $z \in \partial\psi$ равносильно неравенству

$$x \cdot z \leq \psi(x), \quad x \in \text{ri}(\text{Pr } A) \quad (2.9)$$

и имеет место представление

$$\psi(x) = \sup\{x \cdot x': (-x', 1) \in A^*\}. \quad (2.10)$$

Если ψ несобственная, то

$$\psi(x) = -\infty, \quad x \in \text{Pr } A; \quad \psi(x) = +\infty, \quad x \notin \text{Pr } A. \quad (2.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых $(x_i, z_i) \in \text{epi } \psi$, $i = 1, 2$, существуют $y_i \leq z_i$ такие, что $(x_i, y_i) \in A$, $i = 1, 2$. В силу выпуклости A имеем

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \in A,$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. Далее, поскольку $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \leq \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$, то ψ является выпуклой: $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) \in \text{epi } \psi$.

Рассмотрим последовательность $(x_k, z_k) \in \text{epi } \psi$, $k \in \mathbf{N}$, сходящуюся к (x, z) . Существуют $y_k \leq z_k$ такие, что $(x_k, y_k) \in A$. Выберем подпоследовательность (y_{k_n}) , сходящуюся к y . В силу замкнутости A имеем

$$(x_{k_n}, y_{k_n}) \rightarrow (x, y) \in A, \quad y \leq z.$$

Значит, множество $\text{epi } \psi$ замкнуто: $(x, z) \in \text{epi } \psi$.

Положительная однородность ψ очевидна:

$$\psi(\lambda x) = \inf\{y: (\lambda x, y) \in A\} = \inf\{\lambda y: (\lambda x, \lambda y) \in A\} = \lambda \psi(x), \quad \lambda > 0.$$

Если условие (2.8) выполнено, то существует $x' \in \mathbf{R}^d$ такой, что $y \geq x \cdot x'$, $(x, y) \in A$. Следовательно, $\psi(x) > -\infty$, $x \in A$, и ψ является собственной. Пусть ψ — собственная функция. Найдем ее вторую сопряженную по Юнгу–Фенхелю:

$$\begin{aligned} \psi^*(x') &= \sup_x \{x \cdot x' - \psi(x)\} = \sup \{x \cdot x' - y: (x, y) \in A\} = \delta((-x', 1) | A^*), \\ \psi^{**}(x) &= \sup_{x'} \{x \cdot x' - \psi^*(x')\} = \sup \{x \cdot x': (-x', 1) \in A^*\}. \end{aligned}$$

Поскольку ψ является выпуклой и замкнутой, то $\psi = \psi^{**}$ (см. [13, теорема 12.2]). Отсюда вытекает (2.8) и представление (2.10).

Ясно, что $\text{Pr}(\text{epi } \psi) = \text{Pr } A$, если ψ является собственной. Далее, множество $\text{ri}(\text{epi } \psi)$ состоит из пар (x, y) , для которых $x \in \text{ri}(\text{Pr}(\text{epi } \psi))$, $\psi(x) < y$ (см. [13, лемма 7.3]), и из неравенства (2.9) вытекает, что $x \cdot z \leq y$ для всех таких пар. Отсюда очевидным образом следует, что $z \in \partial\psi$.

Соотношения (2.11) вытекают из того, что несобственная замкнутая выпуклая функция ψ не может принимать конечных значений (см. [13], следствие 7.2.1). Лемма доказана.

Введем функции

$$\varphi_t^u(x^*) = \sup\{y^*: (x^*, y^*) \in \mathcal{Y}_t^U\}, \quad \psi_t^u(x^*) = \sup\{y^*: (x^*, y^*) \in \mathcal{W}_t^U\}.$$

Ясно, что $-\varphi_t^u, -\psi_t^u$ положительно однородны, выпуклы и замкнуты. Из теоремы 4 и леммы 3 вытекает разрешимость задачи о мартингальном выборе для процесса U^* при выполнении условия NA^r . При этом $\text{ri } \mathcal{W}_t^U = \text{ri}(K_t^* \times \mathbf{R}) \cap \text{ri } \mathcal{Y}_t^U \neq \emptyset$ п.н. и

$$\mathcal{W}_t^U = (K_t^* \times \mathbf{R}) \cap \mathcal{Y}_t^U \quad \text{п.н.}$$

Таким образом, $\psi_t^l(x^*) = \varphi_t^l(x^*) + \delta(x^* | K_t^*)$, $\psi_t^u(x^*) = \varphi_t^u(x^*) - \delta(x^* | K_t^*)$.
Заметим, что

$$\{y^*: (x^*, y^*) \in \mathcal{W}_t^U\} = \{y^*: y^* \in [\psi_t^l(x^*), \psi_t^u(x^*)] \cap \mathbf{R}\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Поскольку $\text{ri}(\text{Pr } \mathcal{W}_t^U) = \text{ri } \mathcal{W}_t^K$ по лемме 3, то в силу теоремы 6.8 из [13] имеем

$$\text{ri } \mathcal{W}_t^U = \{(x^*, y^*): x^* \in \text{ri } \mathcal{W}_t^K, y^* \in \text{ri}([\psi_t^l(x^*), \psi_t^u(x^*)] \cap \mathbf{R})\}. \quad (2.12)$$

Пусть $\mathbf{J}(\zeta_T)$ обозначает множество элементов $\zeta_0 \in \mathbf{R}^d$, удовлетворяющих условию (а) леммы 2. Согласно условию (b) указанной леммы $\zeta_0 \in \mathbf{J}(\zeta_T)$, тогда и только тогда, когда существует $x^* \in \text{ri } \mathcal{W}_0^K$ такой, что

$$\zeta_0 \cdot x^* \in \text{ri}([\psi_0^l(x^*), \psi_0^u(x^*)] \cap \mathbf{R}).$$

Теорема 5. При выполнении условия NA^r справедливы равенства

$$\mathbf{H}_-(\zeta_T) = \partial\psi_0^l, \quad \mathbf{H}_+(\zeta_T) = -\partial(-\psi_0^u). \quad (2.13)$$

Доказательство. Пусть $\zeta_0 \in \partial\psi_0^l$. Так как $\text{ri } \mathcal{W}_0^K \subset \mathbf{R}_{++}^d$, то

$$(\zeta_0 - a) \cdot x^* < \psi_0^l(x^*), \quad x^* \in \text{ri } \mathcal{W}_0^K, \quad a \in \mathbf{R}_{++}^d.$$

Следовательно, $\zeta_0 - a \notin \mathbf{J}(\zeta_T)$, т.е.

$$(\zeta_0 - a) \cdot Z_0 \neq \mathbf{E}(\zeta_T \cdot Z_T), \quad Z \in \mathcal{M}(\text{ri } K^*, \zeta_T). \quad (2.14)$$

С другой стороны, для любого $x' \in \text{ri } \mathcal{W}_0^K$ существует элемент $b \in \mathbf{R}_+^d$ такой, что

$$(\zeta_0 + b) \cdot x' \in \text{ri}([\psi_0^l(x'), \psi_0^u(x')] \cap \mathbf{R}). \quad (2.15)$$

При этом $\zeta_0 + b \in \mathbf{J}(\zeta_T)$ и существует $Z' \in \mathcal{M}(\text{ri } K^*, \zeta_T)$, удовлетворяющий соотношениям

$$(\zeta_0 - a) \cdot Z'_0 < (\zeta_0 + b) \cdot Z'_0 = \mathbf{E}(\zeta_T \cdot Z'_T).$$

Если предположить, что $(\zeta_0 - a) \cdot Z''_0 > \mathbf{E}(\zeta_T \cdot Z''_T)$ для некоторого $Z'' \in \mathcal{M}(\text{ri } K^*, \zeta_T)$, то найдется $\alpha \in (0, 1)$ такое, что

$$(\zeta_0 - a) \cdot Z_0^\alpha = \mathbf{E}(\zeta_T \cdot Z_T^\alpha),$$

где $Z^\alpha = \alpha Z' + (1 - \alpha)Z''$. Но это противоречит (2.14). Следовательно, $\zeta_0 - a \in \mathbf{H}_-$ (см. (1.4)) и $\zeta_0 \in \mathbf{H}_-$ в силу замкнутости $\mathbf{H}_-$.

Пусть теперь $\zeta_0 \in \mathbf{H}_-$. Тогда для любого $a \in \mathbf{R}_{++}^d$ имеем

$$(\zeta_0 - a) \cdot Z_0 < \zeta_0 \cdot Z_0 \leq \mathbf{E}(\zeta_T \cdot Z_T), \quad Z \in \mathcal{M}(\text{ri } K^*, \zeta_T).$$

Следовательно, $\zeta_0 - a \notin \mathbf{J}(\zeta_T)$. По лемме 2 отсюда следует, что

$$(\zeta_0 - a) \cdot x^* \notin \text{ri}([\psi_0^l(x^*), \psi_0^u(x^*)] \cap \mathbf{R}) \quad (2.16)$$

для любого $x^* \in \text{ri } \mathcal{W}_0^K$. Более того, не существует такой пары $x', x'' \in \text{ri } \mathcal{W}_0^K$, что

$$(\zeta_0 - a) \cdot x' \leq \psi_0^l(x'), \quad (\zeta_0 - a) \cdot x'' \geq \psi_0^u(x''). \quad (2.17)$$

Действительно, пусть указанная пара x', x'' существует. Тогда $\psi_0^l, -\psi_0^u$ являются собственными и их значения на $\text{ri } \mathcal{W}_0^K$ конечны. Для любой непрерывной функции $\beta: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} x' \cdot (\zeta_0 - a) &< \beta(1)\psi_0^l(x') + (1 - \beta(1))\psi_0^u(x') \in \text{ri}[\psi_0^l(x'), \psi_0^u(x')], \\ x'' \cdot (\zeta_0 - a) &> \beta(0)\psi_0^l(x'') + (1 - \beta(0))\psi_0^u(x'') \in \text{ri}[\psi_0^l(x''), \psi_0^u(x'')] \end{aligned}$$

и существует $\alpha \in (0, 1)$, для которого справедливо равенство

$$\begin{aligned} (\alpha x' + (1 - \alpha)x'') \cdot (\zeta_0 - a) &= \beta(\alpha)\psi_0^l(\alpha x' + (1 - \alpha)x'') \\ &\quad + (1 - \beta(\alpha))\psi_0^u(\alpha x' + (1 - \alpha)x''). \end{aligned}$$

Но существование такой точки $\alpha x' + (1 - \alpha)x'' \in \text{ri } \mathcal{W}_0^K$ противоречит (2.16).

Далее, для любого $Z' \in \mathcal{M}(\text{ri } K^*, \zeta_T)$ существует элемент $b \in \mathbf{R}_+^d$ такой, что $(\zeta_0 + b) \cdot Z'_0 = \mathbf{E}(\zeta_T \cdot Z'_T)$. Значит, $\zeta_0 + b \in \mathbf{J}(\zeta_T)$ и существует $x' \in \text{ri } \mathcal{W}_0^K$, удовлетворяющий (2.15). Таким образом,

$$(\zeta_0 - a, x') < (\zeta_0 + b, x') \leq \psi_0^u(x').$$

Как показано выше, отсюда следует, что первое соотношение (2.17) выполняется для всех $x' \in \text{ri } \mathcal{W}_0^K$. Это означает, что $\zeta_0 - a \in \partial\psi_0^l$ и $\zeta_0 \in \partial\psi_0^l$ в силу замкнутости $\partial\psi_0^l$.

Второе равенство (2.13) устанавливается аналогичным образом.

3. Рекуррентные формулы для $\mathbf{H}_+$, $\mathbf{H}_-$. Пусть $\mathcal{R}$ обозначает множество всех расширенных функций на $\mathbf{R}^d$ с естественным упорядочением: $f \leq_{\mathcal{R}} \psi$, если $f(x) \leq \psi(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}^d$. Будем говорить, что интегранд ψ является *существенным $\mathcal{R}$ -супремумом* семейства $\Psi = \{\psi^\alpha\}_{\alpha \in I}$ интеграндов, если

- 1) $\psi(\omega, \cdot) \geq_{\mathcal{R}} \psi^\alpha(\omega, \cdot)$ п.н.;
- 2) из того, что $\varphi(\omega, \cdot) \geq_{\mathcal{R}} \psi^\alpha(\omega, \cdot)$ п.н., следует, что и $\varphi(\omega, \cdot) \geq_{\mathcal{R}} \psi(\omega, \cdot)$ п.н.

Будем использовать обозначение $\psi = \mathcal{R}\text{-ess sup}\{\psi_\alpha: \alpha \in I\}$. Ясно, что существенный $\mathcal{R}$ -супремум единственен с точностью до неразличимости.

Напомним, что для любого измеримого многозначного отображения G опорная функция $\sup\{z \cdot x: z \in G(\omega)\}$ является выпуклым нормальным интеграндом [14, пример 14.51].

Лемма 5. Пусть многозначное отображение $\omega \mapsto G(\omega) \subset \mathbf{R}^d$ является $\mathcal{H}$ -измеримым. Тогда

$$\mathcal{R}\text{-ess sup}\{\xi \cdot x: \xi \in L^0(\mathcal{H}, G)\} = \sup\{z \cdot x: z \in G(\omega)\} \quad (3.1)$$

с точностью до неразличимости.

Доказательство. Далее все неравенства понимаются с точностью до неразличимости. Для любого $\xi \in L^0(\mathcal{H}, G)$ имеем

$$\xi(\omega) \cdot x \leq \sup\{z \cdot x: z \in G(\omega)\}.$$

Поэтому левая часть (3.1) не превосходит правой части. Чтобы получить противоположное неравенство, рассмотрим $\mathcal{H}$ -измеримое представление Кастэна $(\xi_n)_{n=1}^\infty$ отображения $\text{cl } G$ и заметим, что

$$\sup\{z \cdot x: z \in G(\omega)\} = \sup_n (\xi_n(\omega) \cdot x) \leq \mathcal{R}\text{-ess sup}\{\xi \cdot x: \xi \in L^0(\mathcal{H}, G)\}.$$

Лемма 6. Пусть выполнено условие NA^r . Интегранды φ_t^l , $0 \leq t \leq T-1$, определяемый формулой (2.7), является собственным п.н., тогда и только тогда, когда $L^0(\mathcal{F}_t, \partial\psi_{t+1}^l) \neq \emptyset$. Если φ_t^l является собственным п.н., то

$$\varphi_t^l = \mathcal{R}\text{-ess sup}\{\xi \cdot x^*: \xi \in L^0(\mathcal{F}_t, \partial\psi_{t+1}^l)\}. \quad (3.2)$$

Если $\mathbf{H}_-(\zeta_T) \neq \emptyset$, то интегранд φ_t^l является собственным п.н. для всех t .

Доказательство. Покажем, что

$$L^0(\mathcal{F}_t, \partial\psi_{t+1}^l) = \{\xi: (-\xi, 1) \in L^0(\mathcal{F}_t, (\mathcal{Y}_t^U)^*)\}. \quad (3.3)$$

Заметим, что по леммам 3 и 4 для $\mathcal{F}_t$ -измеримого вектора ξ условие $\xi \in \partial\psi_{t+1}^l$ п.н. равносильно следующему:

$$\xi \cdot x' \leq \psi_{t+1}^l(x'), \quad x' \in \text{ri } \mathcal{W}_{t+1}^K \quad \text{п.н.} \quad (3.4)$$

В свою очередь, (3.4) эквивалентно условию

$$\xi \cdot x' - y' \leq 0, \quad x' \in \text{ri } \mathcal{W}_{t+1}^K, \quad y' \in \text{ri} \left([\psi_{t+1}^l(x'), \psi_{t+1}^u(x')] \cap \mathbf{R} \right) \quad \text{п.н.,}$$

которое в силу (2.12) можно представить в виде $(-\xi, 1) \in (\mathcal{W}_{t+1}^U)^*$ п.н. Согласно лемме 1 работы [16], имеем

$$L^0(\mathcal{F}_t, (\mathcal{W}_{t+1}^U)^*) = L^0(\mathcal{F}_t, (\mathcal{K}(\mathcal{W}_{t+1}^U, \mathcal{F}_t))^*) = L^0(\mathcal{F}_t, (\mathcal{Y}_t^U)^*).$$

Отсюда вытекает (3.3).

Если интегранд φ_t^l является собственным п.н., то по лемме 4 имеем

$$\varphi_t^l(\omega, x^*) = \sup\{x \cdot x^*: (-x, 1) \in (\mathcal{Y}_t^U)^*(\omega)\} \quad \text{п.н.}$$

Но тогда по лемме 5

$$\varphi_t^l = \mathcal{R}\text{-ess sup} \left\{ \xi \cdot x^*: (-\xi, 1) \in L^0(\mathcal{F}_t, (\mathcal{Y}_t^U)^*) \right\},$$

что вместе с (3.3) дает представление (3.2). При этом $L^0(\mathcal{F}_t, \partial\psi_{t+1}^l) \neq \emptyset$.

Если же $L^0(\mathcal{F}_t, \partial\psi_{t+1}^l) \neq \emptyset$, то множество $\{x: (-x, 1) \in (\mathcal{Y}_t^U)^*\}$ непусто п.н. (в силу (3.3)), и интегранд φ_t^l является собственным п.н. по лемме 4.

Докажем последнее утверждение леммы 6. Если $\mathbf{H}_- \neq \emptyset$, то ψ_0^l является собственным по теореме 5. Заметим, что если ψ_t^l — п.н. собственный интегранд, то и φ_t^l является собственным п.н., так как $\psi_t^l = \varphi_t^l$ на K_t^* . По доказанному при этом имеет место равенство (3.2) и, в частности, ψ_{t+1}^l является собственным п.н. По индукции отсюда вытекает, что φ_t^l является собственным для всех t .

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Проведем доказательство для последовательности $(h_t^l)_{t=0}^T$. Заметим сначала, что

$$h_t^l(\omega, x^*) = \mathcal{R}\text{-ess sup} \{ \xi \cdot x^*: \xi \in L^0(\mathcal{F}_t, G_t^l) \} + \delta(x^* | K_t^*), \quad t \leq T-1, \quad (3.5)$$

по лемме 5. Далее, с учетом соотношения (1.6), для $\mathcal{F}_t$ -измеримого вектора ξ по определению регулярного условного математического ожидания справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^r(\mathbf{I}(z \in \partial h_{t+1}^l) | \mathcal{F}_t)(\omega, \xi(\omega)) &= \mathbf{E}(\mathbf{I}(h_{t+1}^{l*}(\omega, \xi(\omega)) \leq 0) | \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{I}(\xi \in \partial h_{t+1}^l) | \mathcal{F}_t)(\omega) \end{aligned}$$

и по определению G_t^l имеем

$$\begin{aligned} L^0(\mathcal{F}_t, G_t^l) &= \{ \xi \in L^0(\mathcal{F}_t, \mathbf{R}^d): \mathbf{E}(\mathbf{I}(\xi \in \partial h_{t+1}^l) | \mathcal{F}_t)(\omega) = 1 \text{ п.н.} \} \\ &= \{ \xi \in L^0(\mathcal{F}_t, \mathbf{R}^d): \mathbf{P}(\xi \in \partial h_{t+1}^l) = 1 \} = L^0(\mathcal{F}_t, \partial h_{t+1}^l). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Предположим, что $G_t(\omega) \neq \emptyset$ п.н. для всех t . По определению $h_T^l = \psi_T^l$:

$$\begin{aligned} \psi_T^l(x^*) &= \inf\{y^*: (x^*, y^*) \in U_T^*\} = \inf\{y^*: x^* \in K_T^*, y^* = \zeta_T \cdot x^*\} \\ &= \zeta_T \cdot x^* + \delta(x^* | K_T^*). \end{aligned}$$

Пусть h_{t+1}^l и ψ_{t+1}^l неразличимы. Заметим, что $L^0(\mathcal{F}_t, G_t^l) \neq \emptyset$ по теореме об измеримом выборе (см. [14, следствие 14.6]) и, значит,

$L^0(\mathcal{F}_t, \partial\psi_{t+1}^l) \neq \emptyset$ в силу (3.6). Из формул (3.5), (3.6) и леммы 6 вытекает, что интегрант φ_t^l является собственным п.н. и

$$\begin{aligned} h_t^l(x^*) &= \mathcal{R}\text{-ess sup}\{\xi \cdot x^*: \xi \in L^0(\mathcal{F}_t, \partial\psi_{t+1}^l)\} + \delta(x^* | K_t^*) \\ &= \varphi_t^l(x^*) + \delta(x^* | K_t^*) = \psi_t^l(x^*). \end{aligned}$$

По индукции интегранды h_t^l , ψ_t^l неразличимы при всех t . При этом $\mathbf{H}_- = \partial\psi_0^l = \partial h_0^l$ по теореме 5.

Предположим теперь, что $G_t \neq \emptyset$ п.н., $t = m+1, \dots, T-1$, и $G_m = \emptyset$ на множестве $A_m \in \mathcal{F}_m$ положительной меры. Предыдущие рассуждения показывают, что ψ_{t+1}^l и h_{t+1}^l неразличимы при $t \geq m$. Из (3.6) следует, что $L^0(\partial\psi_{m+1}^l, \mathcal{F}_m) = \emptyset$. По лемме 6 отсюда вытекает, что $\mathbf{H}_- = \emptyset$. Теорема доказана.

Рассмотрим модель валютного рынка без операционных издержек, в которой матрица обменных курсов имеет вид $\pi^{ij} = \hat{S}_t^j / \hat{S}_t^i$, где $\hat{S}_t = (\hat{S}_t^1, \dots, \hat{S}_t^d)$ — согласованный с $\mathbf{F}$ случайный процесс с положительными компонентами. При этом теорема 2 может быть конкретизирована следующим образом.

Теорема 6. Пусть модель валютного рынка без операционных издержек удовлетворяет условию отсутствия арбитража (NA) (равносильному условию NA^r). Введем согласованные с $\mathbf{F}$ последовательности $(v_t^l)_{t=0}^T$, $(v_t^u)_{t=0}^T$ по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} v_T^l &= v_T^u = \zeta_T \cdot \hat{S}_T, \\ v_t^u &= -s(-\hat{S}_t | G_t^u), \quad v_t^l = s(\hat{S}_t | G_t^l), \\ G_t^u &= \left\{ z \in \mathbf{R}^d: \mathbf{E}^r(\mathbf{I}(z \cdot \hat{S}_{t+1} \geq v_{t+1}^u) | \mathcal{F}_t)(\omega, z) = 1 \right\}, \\ G_t^l &= \left\{ z \in \mathbf{R}^d: \mathbf{E}^r(\mathbf{I}(z \cdot \hat{S}_{t+1} \leq v_{t+1}^l) | \mathcal{F}_t)(\omega, z) = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если $G_m^u = \emptyset$ (соответственно $G_m^l = \emptyset$) на множестве положительной меры для некоторого m , то $\mathbf{H}_+(\zeta_T) = \emptyset$ (соответственно $\mathbf{H}_-(\zeta_T) = \emptyset$). В противном случае

$$\mathbf{H}_+(\zeta_T) = \{\zeta_0 \in \mathbf{R}^d: \zeta_0 \cdot \hat{S}_0 \geq v_0^u\}, \quad \mathbf{H}_-(\zeta_T) = \{\zeta_0 \in \mathbf{R}^d: \zeta_0 \cdot \hat{S}_0 \leq v_0^l\}. \quad (3.8)$$

Доказательство. В рассматриваемом случае $K_t^* = \{\lambda \hat{S}_t: \lambda \geq 0\}$. Проверим, что имеет место равенство

$$v_t^l(\omega) = h_t^l(\omega, \hat{S}_t(\omega)) \quad \text{п.н.} \quad (3.9)$$

При $t = T$ это вытекает непосредственно из формул (1.5), (3.7). Пусть $v_{t+1}^l = h_{t+1}^l(\cdot, \hat{S}_{t+1})$ и $G_{t+1}^l \neq \emptyset$ п.н. В силу положительной однородности h_{t+1}^l условие

$$z \cdot \hat{S}_{t+1} \leq v_{t+1}^l = h_{t+1}^l(\cdot, \hat{S}_{t+1})$$

равносильно следующему: $z \cdot x^* \leq h_{t+1}^l(\cdot, x^*)$, $x^* \in K_{t+1}^*$, и множество G_t^l , введенное в теореме 6, совпадает с аналогичным множеством, определенным в теореме 2. Ясно, что отсюда вытекает равенство (3.9). Если $G_t^l \neq \emptyset$ п.н. для всех t , то по теореме 2 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_- &= \{\zeta_0: \zeta_0 \cdot x^* \leq h_0^l(x^*), x^* \in K_0^*\} = \{\zeta_0: \zeta_0 \cdot \hat{S}_0 \leq h_0^l(\hat{S}_0)\} \\ &= \{\zeta_0: \zeta_0 \cdot \hat{S}_0 \leq v_0^l\}. \end{aligned}$$

Если $G_m^l = \emptyset$ на множестве положительной меры для некоторого m , то $\mathbf{H}_- = \emptyset$ по теореме 2. Последовательность (v_t^u) рассматривается аналогичным образом. Теорема доказана.

Как показано ниже, утверждения теорем 1 и 3 являются прямым следствием теорем 6 и 2 соответственно.

Доказательство теоремы 1. Проведем доказательство для последовательности $(w_t^u)_{t=0}^T$. Рассмотрим модель валютного рынка без трения такую, что $S_t^k = \hat{S}_t^k / \hat{S}_t^1$, $k = 2, \dots, d$. Ограничиваясь рассмотрением платежного обязательства $\zeta_T = (f_T, 0, \dots, 0)$ и переписывая рекуррентные соотношения теоремы 6 для дисконтированных величин $w_t^u = v_t^u / \hat{S}_t^1$, находим, что последовательность $(w_t^u)_{t=0}^T$ удовлетворяет рекуррентным формулам теоремы 1. Остается проверить, что $w_0^u = \mathbf{C}^*(f_T)$.

В рассматриваемой модели $\text{ri } K_t^* = \{\lambda \hat{S}_t: \lambda > 0\}$ и для любого $\mathcal{F}_t$ -измеримого вектора $Z_t \in \text{ri } K_t^*$ имеет место представление

$$Z_t = Z_0^1 \rho_t(1, S_t^2, \dots, S_t^d), \quad (3.10)$$

где ρ — строго положительный согласованный случайный процесс, который однозначно определяется процессом Z . Нетрудно проверить (см. [21]), что формула (3.10) устанавливает взаимно однозначное соответствие между процессами Z/Z_0^1 , $Z \in \mathcal{M}(\text{ri } K^*)$, и процессами плотностей $\rho_t = \mathbf{E}(d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} | \mathcal{F}_t)$ эквивалентных мартингалльных мер $\mathbf{Q}$ для $(S^2, \dots, S^d)$: $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}(S)$. При этом формула (1.3) принимает вид

$$\mathbf{H}_+ = \left\{ \zeta_0 \in \mathbf{R}^d: \zeta_0^1 + \sum_{i=2}^d \zeta_0^i S_0^i \geq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} f_T, \mathbf{Q} \in \mathcal{P}(S), \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} |f_T| < \infty \right\}. \quad (3.11)$$

С другой стороны, первую формулу (3.8) можно привести к виду

$$\mathbf{H}_+(\zeta_T) = \left\{ \zeta_0 \in \mathbf{R}^d: \zeta_0^1 + \sum_{i=2}^d \zeta_0^i S_0^i \geq w_0^u \right\}.$$

Сопоставляя эту формулу с (3.11), заключаем, что имеет место равенство $w_0^u = \mathbf{C}^*(f_T)$, завершающие доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 3. В обозначениях теоремы 2 введем функции

$$g_t^l(y^*) = h_t^l(1, y^*), \quad g_t^u(y^*) = h_t^u(1, y^*), \quad y^* \in C_t.$$

Легко видеть, что данные функции удовлетворяют рекуррентным соотношениям теоремы 3. Множества G_t^l , G_t^u , $\mathbf{H}_+$, $\mathbf{H}_-$, описанные в теоремах 2 и 3, идентичны.

4. Примеры. Далее условие отсутствия арбитража (NA) (в примерах 4.1–4.3) и условие робастного отсутствия арбитража (NA^r) (в примерах 4.4, 4.5) предполагаются выполненными.

Пример 4.1 (*рынок без трения, конечное вероятностное пространство*). Пусть Ω конечно и $\mathcal{F}_t$ порождается разбиением $\mathcal{D}_t$ с атомами $(D_t^i)_{i=1}^{m_t}$. Мера $\mathbf{P}$ предполагается невырожденной: $\mathbf{P}(D) > 0$, $D \in \mathcal{D}_T$. Пусть атом D_t^i разбиения $\mathcal{D}_t$ является объединением атомов D_{t+1}^j , $j \in \delta_t(i)$, разбиения $\mathcal{D}_{t+1}$. В работе [7] число элементов $|\delta_t(i)|$ множества $\delta_t(i)$ названо *индексом ветвления* атома D_t^i . Любое $\mathcal{F}_t$ -измеримое отображение F_t (однозначное или многозначное) постоянно на D_t^i . Положим для краткости $F_{t,i} = F_t(\omega)$, $\omega \in D_t^i$.

Найдем множество G_t^u , указанное в теореме 1. Элемент $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d-1}$ принадлежит $G_{t,i}^u$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}\{\omega \in D_t^i: \alpha + \beta \cdot S_{t+1} \geq w_{t+1}^u\} = \mathbf{P}(D_t^i)$. Другими словами,

$$G_{t,i}^u = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d-1}: \alpha + \beta \cdot S_{t+1,j} \geq w_{t+1,j}^u, \quad j \in \delta_t(i)\}$$

и $w_{t,i}^u$ совпадает с оптимальным значением целевой функции задачи линейного программирования

$$\alpha + (\beta, S_{t,i}) \rightarrow \min_{\alpha, \beta}, \quad \alpha + \beta \cdot S_{t+1,j} \geq w_{t+1,j}^u, \quad j \in \delta_t(i), \quad (4.1)$$

или двойственной задачи

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \delta_t(i)} w_{t+1,j}^u q_j &\rightarrow \max_q, \\ \sum_{j \in \delta_t(i)} S_{t+1,j} q_j &= S_{t,i}, \quad \sum_{j \in \delta_t(i)} q_j = 1, \quad q_j \geq 0, \quad j \in \delta_t(i). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Таким образом, задача вычисления верхней цены $\mathbf{C}^*$ платежного обязательства f_T сводится к последовательности связанных задач, в каждой из которых требуется вычислить верхнюю цену платежного обязательства w_{t+1} в одношаговой модели на редуцированном вероятностном пространстве, соответствующем атому разбиения $\mathcal{D}_t$. Данная процедура явно указана в работе [10]. В этой же работе содержатся задачи (4.1), (4.2).

Рассмотрим более подробно случай двух активов ($d = 2$, $S_t^1 = 1$, $S_t^2 = S_t$). Пусть на каждом атоме выполняется следующее условие невырожденности: $S_{t+1,j} \neq S_{t,i}$, $j \in \delta_t(i)$. Тогда максимум в (4.2) достигается на векторе q_{t+1}^* , имеющем в точности две ненулевые компоненты, поскольку таким свойством обладают все крайние точки многогранника, описывающего ограничения данной задачи. Введем *относительные цены* $Y_t = S_t/S_{t-1}$, $t = 1, \dots, T$, и пусть

$$I_t^*(i) = \{j \in \delta_t(i): q_{t+1,j}^* \neq 0\} \quad (4.3)$$

обозначает двухэлементное множество «оптимальных» индексов. Имеем:

$$q_{t+1,j} = 0, \quad j \in \delta_t(i) \setminus I_t^*(i), \quad (4.4)$$

$$q_{t+1,l}^* = \frac{1 - Y_{t+1,k}}{Y_{t+1,l} - Y_{t+1,k}}, \quad q_{t+1,k}^* = \frac{Y_{t+1,l} - 1}{Y_{t+1,l} - Y_{t+1,k}}, \quad k, l \in I_t^*(i), \quad (4.5)$$

$$w_{t,i}^u = q_{t+1,k}^* w_{t+1,k}^u + q_{t+1,l}^* w_{t+1,l}^u. \quad (4.6)$$

Таким образом, верхняя цена хеджирования может быть вычислена с использованием специально подобранной биномиальной модели. Однако параметры такой модели зависят от платежного обязательства f_T . Явным образом результаты такого рода для многошаговой модели впервые были представлены, по-видимому, в работе [12]. Еще более конкретизируя задачу, предположим, что величины Y_t независимы и $f_T = g_T(S_T)$, $g_T(x): [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$. Пусть $S_{t,i}$ строго возрастает по i . Покажем, что

$$I_t^*(i) = \{\min \delta_t(i), \max \delta_t(i)\}, \quad (4.7)$$

если g_T выпукла (как в случае опциона-колл) и

$$I_t^*(i) = \left\{ \max_j \{j \in \delta_t(i): Y_{t+1,j} < 1\}, \min_j \{j \in \delta_t(i): Y_{t+1,j} > 1\} \right\}, \quad (4.8)$$

если g_T вогнута.

Предположим, что

$$w_{t+1,i}^u = g_{t+1}(S_{t,i} Y_{t+1,i}), \quad i = 1, \dots, m_{t+1}, \quad (4.9)$$

где $g_{t+1}: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ — выпуклая или вогнутая функция. Для каждого i система уравнений

$$\alpha + \beta S_{t,i} Y_{t+1,j} = g_{t+1}(S_{t,i} Y_{t+1,j}), \quad j \in I_t^*(i), \quad (4.10)$$

имеет единственное решение (α^*, β^*) , и это решение является допустимым для задачи (4.1):

$$\alpha^* + \beta^* S_{t,i} Y_{t+1,j} \geq g_{t+1}(S_{t,i} Y_{t+1,j}), \quad j \notin I_t^*(i). \quad (4.11)$$

Действительно, если g_{t+1} выпукла, то функция $g_{t+1}(y) - \beta^* y$ достигает максимума в одной из экстремальных точек $y = S_{t,i} Y_{t+1,j}$, что соответствует $j \in I_t^*(i)$.

В случае вогнутой функции g_{t+1} определим $I_t^*(i) = \{k, l\}$, $l = k + 1$, формулой (4.8). Пусть $j \geq l$. Проверим выполнение неравенства

$$\begin{aligned} \alpha^* + \beta^* S_{t,i} Y_{t+1,j} - g_{t+1}(S_{t,i} Y_{t+1,j}) \\ = \beta^* S_{t,i} (Y_{t+1,j} - Y_{t+1,k}) + g_{t+1}(S_{t,i} Y_{t+1,k}) - g_{t+1}(S_{t,i} Y_{t+1,j}) \geq 0, \end{aligned}$$

равносильного неравенству (4.1). В силу вогнутости g функция

$$x \mapsto \frac{g(x) - g(a)}{x - a}, \quad x \neq a,$$

является невозрастающей [11, теорема 1.3.1]. Следовательно,

$$\frac{g_{t+1}(S_{t,i} Y_{t+1,j}) - g_{t+1}(S_{t,i} Y_{t+1,k})}{S_{t,i} (Y_{t+1,j} - Y_{t+1,k})} \leq \beta^*, \quad j \geq l,$$

так как при $j = l$ имеет место равенство. Итак, неравенство в (4.1) при $j \geq l$ установлено. Случай $j \leq k$ рассматривается аналогично.

Таким образом, единственное решение $(\alpha_{t+1,i}^*, \beta_{t+1,i}^*)$ системы (4.10) является допустимым для задачи (4.1). С другой стороны, q^* , определяемое формулами (4.4), (4.5), является допустимым решением двойственной задачи (4.2) и

$$(\alpha_{t+1,i}^* + \beta_{t+1,i}^* S_{t+1,j} - w_{t+1,j}^u) q_{t+1,j}^* = 0, \quad j \in \delta_t(i). \quad (4.12)$$

Суммируя данные равенства по $j \in \delta_t(i)$ (или используя вторую теорему двойственности [26, гл. II, § 7, п. 5]), заключаем, что $(\alpha_{t+1,i}^*, \beta_{t+1,i}^*)$, $(q_{t+1,j}^*)_{j \in \delta_t(i)}$ — оптимальные решения задач (4.1), (4.2) соответственно, так как значения целевых функций на этих решениях совпадают. Этим доказаны формулы (4.7), (4.8) в предположении (4.9).

Далее, в силу независимости Y_{t+1} от $\mathcal{F}_t$, множества (4.7), (4.8) не зависят от i : $I_t^*(i) = I_t^*$. Это же касается оптимальных решений задач (4.1), (4.2). Введем последовательность функций $(g_t)_{t=0}^T$ рекуррентной формулой

$$g_t(x) = q_{t+1,k}^* g_{t+1}(x Y_{t+1,k}) + q_{t+1,l}^* g_{t+1}(x Y_{t+1,l}), \quad k, l \in I_t^*.$$

Все функции g_t выпуклы (соответственно вогнуты), если выпукла (соответственно вогнута) функция g_T . В предположении (4.9) в силу (4.6) имеем

$$w_{t,i} = q_{t+1,k}^* g_{t+1}(S_{t,i} Y_{t+1,k}) + q_{t+1,l}^* g_{t+1}(S_{t,i} Y_{t+1,l}) = g_t(S_{t,i}) = g_t(S_{t-1,i} Y_{t,i}).$$

По индукции отсюда следует, что представление (4.9), а значит, и формулы (4.7), (4.8) верны для всех t .

Для наглядности наряду с исходной мультиномиальной моделью с независимыми относительными ценами Y_t рассмотрим две «вложенные» биномиальные модели: 1) с относительными ценами Y'_t , принимающими два экстремальных значения Y_t , и 2) с относительными ценами Y''_t , принимающими два значения Y_t , ближайших к 1. Предыдущие рассуждения показывают, что верхняя цена хеджирования опциона $g_T(S_T)$ с выпуклой (соответственно вогнутой) платежной функцией g_T в мультиномиальной модели равна цене того же опциона во «вложенной» биномиальной модели с относительными ценами Y'_t (соответственно Y''_t), ср. с [12].

П р и м е р 4.2 (*рынок без трения, неограниченные относительные цены*). Следуя [1], предположим, что условное распределение $\mu_t(\omega, dx)$ случайного вектора S_{t+1} относительно $\mathcal{F}_t$ эквивалентно лебеговской мере на $\mathbf{R}_+^d$ для каждого ω . Пусть $f_T = g_T(S_T)$, где $g_T: \mathbf{R}_+^{d-1} \rightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция. В обозначениях теоремы 1 пара $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^{d-1} \times \mathbf{R}$ принадлежит $G_{T-1}^u(\omega)$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}^r\left(\mathbf{I}(\alpha + \beta \cdot S_T \geq g_T(S_T)) \mid \mathcal{F}_t\right) = \mu_{T-1}(\omega, \{y: \alpha + \beta \cdot y \geq g_T(y)\}) = 1 \quad \text{п.н.}$$

В силу непрерывности функции g_T это равносильно условию

$$\alpha + \beta \cdot y \geq g_T(y), \quad y \in \mathbf{R}_+^d. \quad (4.13)$$

Следовательно, $w_{T-1}^u = g_{T-1}(S_{T-1})$, где

$$g_{T-1}(x) = \inf_{\alpha, \beta} \{\alpha + \beta \cdot x: \alpha + \beta \cdot y \geq g_T(y), y \in \mathbf{R}_+^d\}.$$

Функция $g_{T-1}(x)$ вогнута. Более того, если g_T вогнута, то $g_{T-1} = g_T$ (см. [13, теорема 12.1]). По индукции отсюда следует, что $g_0 = \dots = g_{T-1}$ (при этом вогнутости g_T не требуется) и

$$\mathbf{C}^*(f_T) = w_0^u = g_0(S_0) = \inf_{\alpha, \beta} \{\alpha + \beta \cdot S_0: \alpha + \beta \cdot y \geq g_T(y), y \in \mathbf{R}_+^d\}.$$

Аналогичным образом находим

$$\mathbf{C}_*(f_T) = \sup_{\alpha, \beta} \{\alpha + \beta \cdot S_0: \alpha + \beta \cdot y \leq g_T(y), y \in \mathbf{R}_+^d\}.$$

Как отмечено в работе [1], границы цен f_T не зависят от числа шагов T . Для опциона-колл $f_T = (S_T - K)^+$, $d = 2$, имеем

$$\mathbf{C}_*(f_T) = (S_0 - K)^+, \quad \mathbf{C}^*(f_T) = S_0. \quad (4.14)$$

В случае $d = 2$ для платежного обязательства $f_T = g_T(S_T)$ с непрерывной выпуклой функцией $g_T: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_*(f_T) &= g_T(S_0), \\ \mathbf{C}^*(f_T) &= c_0 + c_1 S_0, \quad c_0 = g_T(0), \quad c_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_T(x)}{x}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Первая формула является следствием выпуклости g_T . Чтобы получить вторую, заметим, что если α, β удовлетворяют (4.13), то

$$\alpha \geq c_0, \quad \beta \geq c_1. \quad (4.16)$$

Обратно, если выполнены неравенства (4.16), то α, β удовлетворяют (4.13):

$$\alpha + \beta x \geq c_0 + c_1 x \geq g_T(x).$$

Справедливость последнего неравенства вытекает из того, что функция

$$y \mapsto \frac{g_T(y) - g_T(0)}{y}, \quad y > 0,$$

является неубывающей [11, теорема 1.3.1]. Минимизация линейной функции $\alpha + \beta S_0$ при ограничениях (4.16) дает формулу (4.15) для $\mathbf{C}^*(f_T)$.

В случае условно гауссовской модели для $\ln(S_{t+1}/S_t)$ формулы (4.14), (4.15) получены в работе [24], а в общем случае — в работе [6]. При произвольном d верхняя цена хеджирования для ряда опционов, в том числе экзотических, вычислена в работе [1]. Тривиальность границ интервала безарбитражных цен в примере 4.2 связана с неограниченностью носителя μ_t . В модели с ограниченными относительными ценами, которая рассматривается в следующем примере, границы цен могут быть вычислены по той же схеме, что и в примере 4.1.

Пример 4.3 (*один рисковый актив с ограниченными относительными ценами*). Пусть $d = 2$ и $S_t = S_0 \prod_{k=1}^t Y_k$. Обозначим через $\nu_t(\omega, dy)$ регулярное условное распределение Y_{t+1} относительно $\mathcal{F}_t$. Предположим, что носитель $\text{supp } \nu_t$ меры $\nu_t(\omega, \cdot)$ совпадает с интервалом $[a_t, b_t]$, где $0 < a_t < 1 < b_t < \infty$, и a_t, b_t не зависят от ω . Это условие выполнено, в частности, если Y_{t+1} не зависит от $\mathcal{F}_t$.

Рассмотрим платежное обязательство $f_T = g_T(S_T)$ с выпуклой функцией $g_T: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$. Предположим, что $w_{t+1}^u = g_{t+1}(S_{t+1})$, где g_{t+1} — выпуклая функция (при $t = T - 1$ это выполняется по определению). Для почти всех ω верно, что пара $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ принадлежит $G_t^u(\omega)$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}^r \left(\mathbf{I}(\alpha + \beta S_t Y_{t+1} \geq g_{t+1}(S_t Y_{t+1})) \mid \mathcal{F}_t \right) = \mu_t(\omega, \{\alpha + \beta S_t y \geq g_{t+1}(S_t y)\}) = 1.$$

В силу непрерывности функции g_{t+1} данное условие равносильно следующему:

$$\alpha + \beta S_t y \geq g_{t+1}(S_t y), \quad y \in [a_t, b_t]. \quad (4.17)$$

Но так как функция g_{t+1} выпукла, неравенство (4.17) достаточно проверять только в граничных точках a_t, b_t . Таким образом, точная нижняя грань в выражении для w_t^u (см. теорему 1) достигается на паре α_t, β_t , являющейся решением системы уравнений

$$\alpha + \beta S_t a_t = g_{t+1}(S_t a_t), \quad \alpha + \beta S_t b_t = g_{t+1}(S_t b_t),$$

и

$$w_t^u = \alpha_t + \beta_t S_t = g_t(S_t) := \frac{b_t - 1}{b_t - a_t} g_{t+1}(S_t a_t) + \frac{1 - a_t}{b_t - a_t} g_{t+1}(S_t b_t). \quad (4.18)$$

Определяемая этой формулой функция g_t является выпуклой, и по индукции заключаем, что формула (4.18) верна для всех t .

Таким образом, верхняя цена хеджирования $\mathbf{C}^*(f_T)$ совпадает с ценой f_T в соответствующей биномиальной модели с относительными ценами Y'_t , принимающими значения a_t, b_t . Заметим, что для обоснования рекуррентного соотношения (4.18) достаточно выполнения условия $\{a_t, b_t\} \subset \text{supp } \nu_t \subset [a_t, b_t]$.

Вычислим нижнюю цену хеджирования. Рассуждая как выше, находим

$$w_{T-1}^l = \sup\{\alpha + \beta S_{T-1} y : \alpha + \beta S_{T-1} y \leq g_T(S_{T-1} y), y \in [a_{T-1}, b_{T-1}]\}.$$

В силу выпуклости g_T отсюда вытекает, что $w_{T-1}^l = g_T(S_{T-1})$ (см. [13, теорема 12.1]). По индукции,

$$\mathbf{C}_*(f_T) = w_0^l = g_T(S_0). \quad (4.19)$$

Очевидное уточнение предыдущих рассуждений показывает, что для справедливости формулы $w_{T-1}^l = g_T(S_{T-1})$, а значит, и (4.19), достаточно выполнения условия $1 \in \text{supp } \nu_t$ вместо $\text{supp } \nu_t = [a_t, b_t]$.

Результаты, аналогичные представленным в примере 4.3, получены в [4], [9], [25] [гл. V, § 1с], [6], [20].

П р и м е р 4.4 (*модель рынка с трением при наличии банковского счета, конечное вероятностное пространство*). В обозначениях примера 4.1 формулы теоремы 3 для верхней цены хеджирования принимают вид

$$\begin{aligned} g_{T,i}^u(y^*) &= \xi_{T,i} + \eta_{T,i} \cdot y^*, \quad y^* \in C_{T,i}, \\ g_{t,i}^u(y^*) &= \inf_{\alpha, \beta} \{\alpha + \beta \cdot y^* : \alpha + \beta \cdot z^* \geq g_{t+1,j}^u(z^*), \\ &\quad z^* \in C_{t+1,j}, j \in \delta_t(i)\}, \quad y^* \in C_{t,i}, \\ \mathbf{C}^*(\xi_T, \zeta_T) &= \sup\{g_0^u(y^*) : y^* \in C_0\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Нетрудно проверить, что при $d = 2$ они совпадают с формулами работы [19] и, как указано в [19], обобщают известные алгоритмы вычисления верхней цены хеджирования.

Для иллюстрации рассмотрим биномиальную модель ($|\delta_t(i)| = 2$) с «малыми» операционными издержками ($S_{t,k}^a \leq S_{t,l}^b$, $k < l$). Из указанных рекуррентных формул следует, что если функции $g_{t+1,j}^u$ линейны на $[S_{t+1,j}^b, S_{t+1,j}^a]$, $j \in \delta_t(i)$, то и функция $g_{t,i}^u$ линейна на $[S_{t,i}^b, S_{t,i}^a]$, поскольку интервалы

$$(S_{t+1,j}^b, S_{t+1,j}^a), \quad j \in \delta_t(i),$$

не пересекаются. Пусть $k, l \in \delta_t(i)$. Чтобы найти значения $g_{t,i}^u(S_{t,i}^r)$, $r \in \{a, b\}$, полностью определяющие функцию $g_{t,i}^u$, рассмотрим четыре прямые, проходящие через одну из точек

$$A_{t+1,k}^r = (S_{t+1,k}^r, g_{t+1,k}^u(S_{t+1,k}^r)), \quad r \in \{a, b\},$$

и одну из точек $B_{t+1,l}^r = (S_{t+1,l}^r, g_{t+1,l}^u(S_{t+1,l}^r))$, $r \in \{a, b\}$. Среди точек указанных прямых с абсциссами $S_{t,i}^r$, $r \in \{a, b\}$, выберем ту, которая имеет наибольшую ординату $y_{t,i}^r$, $r \in \{a, b\}$. Ясно, что значение $g_{t,i}(S_{t,i}^r)$, $r \in \{a, b\}$, совпадает с $y_{t,i}^r$:

$$g_{t,i}^u(S_{t,i}^r) = \max_{p,q \in \{a,b\}} \left(\frac{S_{t+1,l}^q - S_{t,i}^r}{S_{t+1,l}^q - S_{t+1,k}^p} g_{t+1,k}^u(S_{t+1,k}^p) + \frac{S_{t,i}^r - S_{t+1,k}^p}{S_{t+1,l}^q - S_{t+1,k}^p} g_{t+1,l}^u(S_{t+1,l}^q) \right) \quad (4.21)$$

при $r \in \{a, b\}$, $k, l \in \delta_t(i)$. По индукции эта формула верна для всех t . Заметим, что равенство (4.21) вытекает также из рассмотрения задачи линейного программирования, двойственной к той, которая определяет функцию $g_{t,i}^u$.

Формула (4.20) принимает вид

$$\mathbf{C}^*(\xi_T, \zeta_T) = \max\{g_0^u(S_0^b), g_0^u(S_0^a)\}. \quad (4.22)$$

Формулы (4.21), (4.22) совпадают с полученными в работе [23].

Пример 5.5 (опцион-колл в модели с неограниченными относительными ценами при наличии трения). Пусть в модели с банковским счетом $d = 2$, $S_t^b = (1 - b_t)S_t$, $S_t^a = (1 + a_t)S_t$, где $a_t \geq 0$, $b_t \in [0, 1]$ неслучайны. Обозначим через $\mu_t(\omega, dz)$ регулярное условное распределение S_{t+1} относительно $\mathcal{F}_t = \sigma(S_0, \dots, S_t)$ и предположим, что мера $\mu_t(\omega, dz)$ эквивалентна мере Лебега на $\mathbf{R}_+$. Воспользовавшись теоремой 3, при этих предположениях вычислим верхнюю и нижнюю цены хеджирования опциона-колл с поставкой:

$$\xi_T = -K\mathbf{I}\{S_T^b \geq K\}, \quad \eta_T = \mathbf{I}\{S_T^b \geq K\}.$$

При сделанных предположениях функции g_t^l , g_t^u , указанные в теореме 3, имеют вид $g_t^l = g_t^l(S_t, y^*)$, $g_t^u = g_t^u(S_t, y^*)$. Положим

$$\begin{aligned}\chi_t^u(S_t, \beta) &= \sup \left\{ g_t^u(S_t, y^*) - \beta y^*: y^* \in [(1-b_t)S_t, (1+a_t)S_t] \right\}, \\ \chi_t^l(S_t, \beta) &= \inf \left\{ g_t^l(S_t, y^*) - \beta y^*: y^* \in [(1-b_t)S_t, (1+a_t)S_t] \right\}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}G_t^u &= \{(\alpha, \beta): \mathbf{E}^r(\mathbf{I}\{\alpha \geq \chi_{t+1}^u(S_{t+1}, \beta)\} | \mathcal{F}_t) = 1\}, \\ G_t^l &= \{(\alpha, \beta): \mathbf{E}^r(\mathbf{I}\{\alpha \leq \chi_{t+1}^l(S_{t+1}, \beta)\} | \mathcal{F}_t) = 1\}.\end{aligned}$$

Вычислим верхнюю цену хеджирования. Поскольку $g_T^u(S_T, y^*) = \xi_T + \eta_T y^*$, $y^* \in [S_T^b, S_T^a]$, то

$$\chi_T^u(S_T, \beta) = \xi_T + S_T^a(\eta_T - \beta)^+ - S_T^b(\eta_T - \beta)^-.$$

Следовательно, $(\alpha, \beta) \in G_{T-1}^u$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}^r(\mathbf{I}\{\alpha \geq \chi_T^u(S_T, \beta)\} | \mathcal{F}_{T-1}) = \mu_{T-1}(\omega, \{z: \alpha \geq \chi_T^u(z, \beta)\}) = 1.$$

Отсюда следует, что точки $(\alpha, \beta) \in G_{T-1}^u$ описываются неравенством

$$\begin{aligned}\alpha \geq \chi_T^u(z, \beta) &= -K\mathbf{I}\{(1-b_T)z \geq K\} \\ &\quad + (\mathbf{I}\{(1-b_T)z \geq K\} - \beta)^+(1+a_T)z \\ &\quad - (\mathbf{I}\{(1-b_T)z \geq K\} - \beta)^-(1-b_T)z, \quad z \geq 0.\end{aligned}$$

При $\beta < 1$ правая часть данного неравенства неограничена сверху, а при $\beta \geq 1$ она неположительна и обращается в нуль при $z = 0$. Таким образом, $G_{T-1}^u = [0, \infty) \times [1, \infty)$ и

$$g_{T-1}^u(y^*) = \inf\{\alpha + \beta y^*: (\alpha, \beta) \in G_{T-1}^u\} = y^*, \quad y^* \in [S_{T-1}^b, S_{T-1}^a].$$

Далее,

$$\chi_{T-1}^u(S_{T-1}, \beta) = \sup\{y^* - \beta y^*: y^* \in [S_{T-1}^b, S_{T-1}^a]\} = (1-\beta)^+ S_{T-1}^a - (1-\beta)^- S_{T-1}^b$$

и $(\alpha, \beta) \in G_{T-1}^u$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha \geq (1-\beta)^+(1+a_{T-1})z - (1-\beta)^-(1-b_{T-1})z, \quad z \geq 0,$$

что равносильно условиям $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$. Следовательно,

$$G_{T-2}^u = G_{T-1}^u, \quad g_{T-2}^u = y^*, \quad y^* \in [S_{T-2}^b, S_{T-2}^a].$$

По индукции, $g_0(y^*) = y^*$, $y^* \in [S_0^b, S_0^a]$, и по формуле (1.7)

$$\mathbf{C}^*(\xi_T, \eta_T) = S_0^a. \quad (4.23)$$

Перейдем к вычислению нижней цены хеджирования. Имеем:

$$\begin{aligned} \chi_T^l(S_T, \beta) &= \xi_T + \inf\{(\eta_T - \beta)y^*: y^* \in [S_T^b, S_T^a]\} \\ &= \xi_T + S_T^b(\eta_T - \beta)^+ - S_T^a(\eta_T - \beta)^-. \end{aligned}$$

Множество G_{T-1}^l состоит из точек (α, β) , удовлетворяющих условию $\alpha \leq \chi_T^l(z, \beta)$, $z \geq 0$, где

$$\begin{aligned} \chi_T^l(z, \beta) &= -K\mathbf{I}\{(1 - b_T)z \geq K\} + (\mathbf{I}\{(1 - b_T)z \geq K\} - \beta)^+(1 - b_T)z \\ &\quad - (\mathbf{I}\{(1 - b_T)z \geq K\} - \beta)^-(1 + a_T)z. \end{aligned}$$

Простое вычисление показывает, что

$$\inf_{z \geq 0} \chi_T^l(z, \beta) = \begin{cases} -\infty, & \beta > 1; \\ -K \frac{1 + a_T}{1 - b_T} \beta, & \beta \in [0, 1]; \\ 0, & \beta < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} G_{T-1}^l &= \{\alpha \leq 0, \beta < 0\} \cap \left\{ \alpha \leq -K \frac{1 + a_T}{1 - b_T} \beta, \beta \in [0, 1] \right\}, \\ g_{T-1}^l &= \sup_{\alpha, \beta} \{\alpha + \beta y^*: (\alpha, \beta) \in G_{T-1}^l\} = \max_{\beta \in [0, 1]} \left\{ \beta \left(y^* - K \frac{1 + a_T}{1 - b_T} \right) \right\} \\ &= (y^* - K')^+, \quad y^* \in [S_{T-1}^b, S_{T-1}^a], \quad K' = K \frac{1 + a_T}{1 - b_T}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \chi_{T-1}(S_{T-1}, \beta) &= \inf\{g_{T-1}^l(y^*) - \beta y^*: y^* \in [S_{T-1}^b, S_{T-1}^a]\} \\ &= -\beta S_{T-1}^a \mathbf{I}(K' > S_{T-1}^a) \\ &\quad + \min\{-\beta K', -K' + (1 - \beta)^+ K' - (1 - \beta)^- S_{T-1}^a\} \mathbf{I}(S_{T-1}^b \leq K' \leq S_{T-1}^a) \\ &\quad + (-K' + (1 - \beta)^+ S_{T-1}^b - (1 - \beta)^- S_{T-1}^a) \mathbf{I}(K' < S_{T-1}^b). \end{aligned}$$

Анализируя соответствующее выражение для $\chi_{T-1}^l(z, \beta)$, находим

$$\inf_{z \geq 0} \chi_{T-1}^l(z, \beta) = \inf_{z \geq 0} \chi_T^l(z, \beta).$$

Следовательно, $G_{T-2}^l = G_{T-1}^l$ и $g_{T-2}^l = (y^* - K')^+$ при $y^* \in [S_{T-2}^b, S_{T-2}^a]$. По индукции, $g_0^l(y^*) = (y^* - K')^+$ при $y^* \in [S_0^b, S_0^a]$ и

$$\mathbf{C}_*(\xi_T, \eta_T) = \left(S_0^b - K \frac{1 + a_T}{1 - b_T} \right)^+ \quad (4.24)$$

по формуле (1.8).

Формулы (4.23), (4.24) обобщают формулы (4.14) примера 4.2, полученные в предположении отсутствия трения. Отметим, что найденные границы цен являются тривиальными и соответствуют простым стратегиям хеджирования. Продавец опциона-колл получает S_0^a единиц банковского счета и переводит эти деньги в рисковый актив. Если $S_T^b \geq K$, то он передает рисковый актив владельцу опциона.

Покупатель опциона-колл становится обладателем долга в $(S_0^b - K')^+$ единиц банковского счета. Интересен лишь случай $S_0^b > K'$. Осуществляя короткую продажу единицы рискового актива, инвестор получает S_0^b единиц банковского счета. В момент времени T его банковский счет будет составлять

$$S_0^b - (S_0^b - K')^+ - K\mathbf{I}(S_T^b \geq K) = K\left(\frac{1+a_T}{1-b_T} - \mathbf{I}(S_T^b \geq K)\right) \geq 0, \quad (4.25)$$

а количество единиц рискового актива будет равно $-1 + \mathbf{I}(S_T^b \geq K) = -\mathbf{I}(S_T^b < K)$. Количество единиц банковского счета, необходимых для покрытия рискованной части портфеля, составляет

$$S_T^a \mathbf{I}(S_T^b < K) = S_T^b \frac{1+a_T}{1-b_T} \mathbf{I}(S_T^b < K)$$

и не превосходит (4.25).

Тривиальность верхней цены хеджирования в модели Блэка–Шоулза с операционными издержками установлена в [22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carassus L., Gobet E., Temam E. A class of financial products and models where super-replication prices are explicit. — Proceedings of the 6th Ritsumeikan international symposium on stochastic processes and applications to mathematical finance (Kyoto, Japan, 2006). Hackensack, World Scientific, 2007, p. 67–84.
2. Delbaen F., Schachermayer W. The Mathematics of Arbitrage. Berlin: Springer, 2006, 373 p.
3. Дынкин Е. Б., Евстигнеев И. В. Регулярные условные математические ожидания соответствий. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, в. 2, с. 334–347.
4. Ганеев П. В. Расчет верхних и нижних цен опционов Европейского типа. — Успехи матем. наук, 1997, т. 52, № 4, с. 199–200.
5. Grigoriev P. G. On low dimensional case in the fundamental asset pricing theorem with transaction costs. — Statist. Decisions, 2005, v. 23, № 1, p. 33–48.
6. Гуцин А. А., Мордецкий Э. Границы цен опционов для семимартингальных моделей рынка. — Тр. МИАН, 2002, т. 237, с. 80–122.
7. Harrison J. M., Pliska S. R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. — Stochastic Process. Appl., 1981, v. 11, № 3, p. 215–260.
8. Kabanov Yu., Safarian M. Markets with Transaction Costs. Berlin: Springer-Verlag, 2009, 294 p.
9. Kascheev D. E. On the option pricing for a generalization of the binomial model. — J. Math. Sci. (New York), 2000, v. 99, № 3, p. 1267–1272.

10. Мельников А. В., Феокистов К. М. Вопросы безарбитражности и полноты дискретных рынков и расчеты платежных обязательств. — *Обозр. прикл. и промышл. матем.*, 2001, т. 8, в. 1, с. 28–40.
11. Niculescu C. P., Persson L.-E. *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*. New York: Springer, 2006, 255 p.
12. Ritchken P. H., Kuo S. Option bounds with finite revision opportunities. — *J. Finance*, 1988, v. 43, № 2, p. 301–308.
13. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.
14. Rockafellar R. T., Wets R.J.-B. *Variational Analysis*. Berlin: Springer, 1998, 733 p.
15. Рохлин Д. Б. Задача о мартингальном выборе в случае конечного дискретного времени. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, т. 50, в. 3, с. 480–500.
16. Рохлин Д. Б. Конструктивный критерий отсутствия арбитража при наличии операционных издержек в случае конечного дискретного времени. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, т. 52, в. 1, с. 41–59.
17. Рохлин Д. Б. Теорема о мартингальном выборе для случайной последовательности с относительно открытыми выпуклыми значениями. — *Матем. заметки*, 2007, т. 81, в. 4, с. 614–620.
18. Rokhlin D. B. Martingale selection problem and asset pricing in finite discrete time. — *Electron. Comm. Probab.*, 2007, v. 12, p. 1–8.
19. Roux A., Tokarz K., Zastawniak T. Options under proportional transaction costs: An algorithmic approach to pricing and hedging. — *Acta Appl. Math.*, 2008, v. 103, № 2, p. 201–219.
20. Rüschendorf L. On upper and lower prices in discrete time-models. — *Тр. МИАН*, 2002, v. 237, p. 134–139.
21. Schachermayer W. The fundamental theorem of asset pricing under proportional transaction costs in finite discrete time. — *Math. Finance*, 2004, v. 14, № 1, p. 19–48.
22. Soner H. M., Shreve S. E., Cvitanic J. There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs. — *Ann. Appl. Probab.*, 1995, v. 5, № 2, p. 327–355.
23. Tokarz K., Zastawniak T. Dynamic programming algorithms for the ask and bid prices of American options under small proportional transaction costs. — Working paper, 2004, available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=581543>.
24. Шатаев О. В. О справедливой цене опциона европейского типа. — *Успехи матем. наук*, 1998, т. 53, № 6, с. 269–270.
25. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 2: Теория. М.: Фазис, 1998, 528 с.
26. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967, 460 с.

Поступила в редакцию
16.II.2010