Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Шапошников, О единственности вероятностного решения задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 1, 77–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 10:43:52

© 2011 г.

ШАПОШНИКОВ С. В.*

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ВЕРОЯТНОСТНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА¹⁾

Получены достаточные условия единственности решения задачи Коши на всем пространстве для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова относительно вероятностных мер при широких предположениях о коэффициентах и произвольном начальном распределении. В частности, не предполагается ограничений на рост коэффициента сноса.

Ключевые слова и фразы: уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, единственность решения задачи Коши для параболического уравнения, переходные вероятности.

1. Введение. В этой работе мы исследуем пространство решений задачи Коши

$$\begin{cases} \partial_t \mu = L^* \mu, \\ \mu|_{t=0} = \nu, \end{cases} \quad (1.1)$$

где ν — вероятностная мера на $\mathbf{R}^d$ (т.е. ν — такая неотрицательная борелевская мера на $\mathbf{R}^d$, что $\nu(\mathbf{R}^d) = 1$) и дифференциальные операторы L и L^* заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} Lu(x, t) &= \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x, t) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x, t) + \sum_{i=1}^d b^i(x, t) \partial_{x_i} u(x, t), \\ L^* u(x, t) &= \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij}(x, t) u(x, t)) - \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} (b^i(x, t) u(x, t)). \end{aligned}$$

Отметим, что L^* является формально сопряженным к L оператором.

Будем говорить, что семейство вероятностных мер $\mu = (\mu_t)_{0 < t < 1}$ удовлетворяет задаче Коши (1.1), если коэффициенты b^i и a^{ij} локально

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: starticle@mail.ru

¹⁾ Работа поддержана проектами РФФИ 09-01-12157-офи-м, РФФИ 10-01-00518-а грантом Президента РФ МК-3674.2011 и SFB 701 при университете Билефельда.

интегрируемы (т.е. интегрируемы на всяком компакте в $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$) относительно меры $\mu(dx dt) = \mu_t(dx) dt$ и для всякой функции $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ выполняется равенство

$$\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} (\partial_t u(x, t) + Lu(x, t)) \mu_t(dx) dt = 0,$$

причем для всякой функции $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^d} \zeta(x) d\mu_t = \int_{\mathbf{R}^d} \zeta(x) d\nu.$$

Типичным примером семейства вероятностных мер, удовлетворяющего задаче Коши (1.1), являются переходные вероятности диффузионного процесса с производящим оператором L .

Мы предполагаем, что матрица $\mathbf{A} = (a^{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ является симметричной и удовлетворяет следующим условиям:

(C1) для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ существует такое число $\Lambda = \Lambda(U) > 0$, что для всех $x, y \in U$ и $t \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$|a^{ij}(x, t) - a^{ij}(y, t)| \leq \Lambda |x - y|;$$

(C2) для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ существуют такие числа $m = m(U) > 0$ и $M = M(U) > 0$, что для всех $x \in U$, $y \in \mathbf{R}^d$ и $t \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$m|y|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq d} a^{ij}(x, t) y_i y_j \leq M|y|^2.$$

Обозначим $\mathcal{M}_\nu$ множество мер μ на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$, каждая из которых задана таким семейством вероятностных мер $(\mu_t)_{0 < t < 1}$ (т.е. $\mu(dx dt) = \mu_t(dx) dt$), удовлетворяющим задаче Коши (1.1) с начальным условием ν , что для всякого шара U имеет место включение $b \in L^2(\mu, U \times [0, 1])$.

Основная задача этой работы заключается в установлении достаточных условий того, что множество $\mathcal{M}_\nu$ содержит не более одного элемента.

В работе [1] доказано, что при выполнении условий (C1) и (C2) всякое решение μ задается плотностью ϱ относительно меры Лебега на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$. Более того, если вместе с условиями (C1) и (C2) выполняется условие $b \in L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ для некоторого $p > d + 2$, то можно выбрать непрерывную на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ версию ϱ , причем для почти всех $t \in (0, 1)$ функция $\varrho(\cdot, t)$ входит в $W^{1,p}(U)$ для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$. Кроме того, если для всякого $t \in (0, 1)$ мера $\mu_t(dx) = \varrho(x, t) dx$ является вероятностной мерой на $\mathbf{R}^d$, то из неравенства Харнака следует, что для всякого шара U из $\mathbf{R}^d$ и отрезка $J \subset (0, 1)$ существует такая константа $C > 0$, что $\varrho(x, t) \geq C$ для всех $(x, t) \in U \times J$.

Для всякой меры μ , заданной соболевской плотностью ϱ относительно меры Лебега, ее логарифмический градиент β_μ относительно метрики, порожденной матрицей $\mathbf{A}$, определяется следующей формулой:

$$\beta_\mu^i = \sum_{j=1}^d (\partial_{x_j} a^{ij} + a^{ij} \varrho^{-1} \partial_{x_j} \varrho).$$

Пусть выполняются условия (C1), (C2) и $b \in L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ для некоторого $p > d + 2$. Наш основной результат состоит в том, что множество $\mathcal{M}_\nu$ содержит не более одного элемента, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $a^{ij}, b^i \in L^1(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$ хотя бы для одной меры $\mu \in \mathcal{M}_\nu$ и всех $1 \leq i, j \leq d$,
- 2) $a^{ij}, b^i - \beta_\mu^i \in L^1(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$ хотя бы для одной меры $\mu \in \mathcal{M}_\nu$ и всех $1 \leq i, j \leq d$,
- 3) существует такая неотрицательная функция $V \in C^2(\mathbf{R}^d)$, что

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty, \quad LV(x, t) \leq C, \quad \left| \sqrt{A(x, t)} \nabla V(x) \right|^2 \leq C$$

для всех $(x, t) \in \mathbf{R}^d \times (0, 1)$ и некоторого числа $C > 0$.

Приведем пример, иллюстрирующий условие 3). Пусть $V(x) = \ln(\ln(1 + |x|))$ при $|x| \geq 1$. Тогда для выполнения условия 3) достаточно, чтобы имели место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \text{trace } A(x, t) &\leq C + C|x|^2 \ln(1 + |x|), \quad (A(x, t)x, x) \leq C + C|x|^4 \ln^2(1 + |x|), \\ (b(x, t), x) &\leq C + C|x|^2 \ln(1 + |x|) \end{aligned}$$

для всех $(x, t) \in \mathbf{R}^d \times (0, 1)$.

Существование решения задачи Коши (1.1) при широких предположениях о коэффициентах уравнения доказано в работе [2]. Единственность решения задачи Коши (1.1) исследовалась в работах [3] и [4]. В работе [3] условие 2) предполагается выполненным не для какой-либо одной меры μ из $\mathcal{M}_\nu$, а для всех мер из этого класса. Кроме того, достаточность условия 3) доказана с дополнительными предположениями о существовании плотности у начального распределения ν с конечной энтропией и ограничениями на рост коэффициента b . В работе [4] рассмотрен случай глобально ограниченных коэффициентов, причем от коэффициента b требуется дополнительная локальная регулярность, а от начального условия требуется наличие плотности, интегрируемой в некоторой степени $q > 1$ относительно меры Лебега, однако коэффициент диффузии $\mathbf{A}$ может быть вырожденным. Кроме единственности вероятностного решения в нескольких работах исследовалась единственность интегрируемого решения. В работе [5] приводятся достаточные условия единственности решения задачи Коши для

уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова в классе таких функций u , что $u \in L^\infty((0, 1), L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R}^d))$ и $\sqrt{A} \nabla u \in L^2((0, 1), L^2(\mathbf{R}^d))$, а в работе [6] — в классе функций $\mathbf{C}(\mathbf{R}^+, L^1(\mathbf{R}^d))$. Отметим также статью [7], в которой приводятся достаточные условия единственности решения в классе неотрицательных функций $u \in L^\infty([0, T], L^1(\mathbf{R}^d)) \cap L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbf{R}^d))$. В настоящей работе (как в [3] и [4]) рассматривается именно класс вероятностных решений, что позволяет значительно ослабить предположения о коэффициентах уравнения и начальном условии, которые делаются в перечисленных выше работах.

Аналогичные вопросы единственности для эллиптических уравнений исследовались в [8] и [9]. Локальные и глобальные свойства решений параболических уравнений для мер исследованы в работах [1], [10]–[14]. В работе [15] можно найти полный обзор последних результатов и библиографию по эллиптическим и параболическим уравнениям для мер.

Мы используем следующие обозначения. Обозначаем $\mathbf{C}^\infty$ и $\mathbf{C}_0^\infty$ множество гладких функций и множество гладких функций с компактным носителем. $L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ — пространство таких измеримых функций u , что $u \in L^p(U \times J)$ для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ и всякого отрезка $J \subset (0, 1)$. Мощность множества M обозначается $\sharp M$. Градиент функции $u = u(x, t)$ по пространственной переменной x обозначается $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \dots, \partial_{x_d} u)$. Для всякого векторного поля $h = h(x, t)$ с помощью $\operatorname{div} h$ обозначаем его дивергенцию по переменной x , т.е. $\operatorname{div} h = \partial_{x_1} h^1 + \partial_{x_2} h^2 + \dots + \partial_{x_d} h^d$.

2. Основные результаты. Мы всюду предполагаем, что коэффициент b локально интегрируем в степени $p > d + 2$ относительно меры Лебега на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ и выполняются условия (C1) и (C2).

Предположим, что есть два решения задачи Коши (1.1) из класса $\mathcal{M}_\nu$, заданные плотностями σ и ϱ относительно меры Лебега. Как отмечалось выше, можно считать, что плотности являются непрерывными функциями на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$. Кроме того, функции σ и ϱ строго положительны. Положим $v(x, t) = \sigma(x, t)/\varrho(x, t)$. Функция v непрерывна и положительна на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$.

Лемма 2.1. *Предположим, что для всех $0 < t < 1$ и $\lambda > 0$ имеет место неравенство*

$$\int_{\mathbf{R}^d} e^{\lambda(1-v(x,t))} \varrho(x, t) dx \leq 1. \quad (2.1)$$

Тогда $v \equiv 1$, т.е. $\sigma = \varrho$.

Доказательство. Если найдется такой шар $U \subset \mathbf{R}^d$, что $v(x, t) \leq 1 - \delta$ для всякого $x \in U$ и некоторого $\delta > 0$, то

$$e^{\lambda\delta} \int_U \varrho dx \leq \int_U e^{\lambda(1-v)} \varrho dx \leq 1.$$

Устремляя λ в бесконечность, приходим к противоречию. Следовательно, $v(x, t) \geq 1$ для всех $x \in \mathbf{R}^d$. Предположим теперь, что найдется такой шар $V \subset \mathbf{R}^d$, что для всякого $x \in V$ и некоторого $\gamma > 0$ имеем $v(x, t) \geq 1 + \gamma$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbf{R}^d} v(x, t) \varrho(x, t) dx = \int_V v(x, t) \varrho(x, t) dx + \int_{\mathbf{R}^d \setminus V} v(x, t) \varrho(x, t) dx \\ &\geq (1 + \gamma) \int_V \varrho(x, t) dx + \int_{\mathbf{R}^d \setminus V} \varrho(x, t) dx = 1 + \gamma \int_V \varrho(x, t) dx. \end{aligned}$$

Опять получили противоречие. Лемма доказана.

Следующая лемма является основной в наших рассуждениях. В ней в качестве f можно брать одну из двух функций $e^{\lambda(1-z)}$ и $e^{\lambda(1-z)} - e^\lambda$.

Лемма 2.2. Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, $\psi \geq 0$ и $0 < t < 1$. Имеет место следующая оценка:

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(v(x, t)) \varrho(x, t) \psi(x) dx \leq f(1) \int_{\mathbf{R}^d} \psi(x) d\nu + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho f(v) L\psi dx ds. \quad (2.2)$$

Если, кроме того, $(b - \beta_\mu) \varrho \in L^1(U \times (0, 1))$ для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$, то

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} f(v(x, t)) \varrho(x, t) \psi(x) dx &\leq f(1) \int_{\mathbf{R}^d} \psi(x) d\nu \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho (A \nabla \psi, \nabla \psi) \psi^{-1} |f'(v)|^2 f''(v)^{-1} dx ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} f(v) (b - \beta_\mu, \nabla \psi) \varrho dx ds. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Полное доказательство леммы будет дано в следующем разделе, а сейчас мы приведем неформальное рассуждение, которое, однако, будет строгим, если мы работаем в классе гладких функций на $\mathbf{R}^d \times [0, 1]$ и предполагаем, что начальное условие задано строго положительной плотностью.

Доказательство. Положим

$$h^i = b^i - \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} a^{ij}.$$

Напомним соотношения, являющиеся непосредственным следствием формулы Лейбница и формулы дифференцирования сложной функции. Для всяких $\xi, \eta \in C^\infty(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ и $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} L^* \Phi(\xi) &= \Phi'(\xi) L^* \xi + \Phi''(\xi) (A \nabla \xi, \nabla \xi) + (\xi \Phi'(\xi) - \Phi(\xi)) \operatorname{div} h, \\ L^*(\xi \cdot \eta) &= \eta L^* \xi + \xi L^* \eta + 2(A \nabla \xi, \nabla \eta) + \xi \eta \operatorname{div} h. \end{aligned}$$

Итак, $\sigma = v\rho$ и

$$\partial_t \sigma = L^* \sigma, \quad \partial_t \rho = L^* \rho.$$

Умножая уравнения $\partial_t \rho = L^* \rho$ на v и вычитая получившееся соотношение из уравнения $\partial_t \sigma = L^* \sigma$, приходим к следующему соотношению на функцию v :

$$\rho \partial_t v = \rho L^* v + 2(\mathbf{A} \nabla \rho, \nabla v) + \rho v \operatorname{div} h.$$

Умножая последнее соотношение на функцию $f'(v)$ и принимая во внимание равенства $\partial_t f(v) = f'(v) \partial_t v$ и $\nabla f(v) = f'(v) \nabla v$, получаем

$$\rho \partial_t (f(v)) = \rho f'(v) L^* v + 2(\mathbf{A} \nabla \rho, \nabla f(v)) + \rho v f'(v) \operatorname{div} h.$$

Так как

$$f'(v) L^* v = L^* f(v) - f''(v)(\mathbf{A} \nabla v, \nabla v) - (v f'(v) - f(v)) \operatorname{div} h,$$

то

$$\rho \partial_t (f(v)) = \rho L^* f(v) + 2(\mathbf{A} \nabla \rho, \nabla f(v)) + \rho f(v) \operatorname{div} h - \rho f''(v)(\mathbf{A} \nabla v, \nabla v).$$

Складывая последнее равенство и равенство $f(v) \partial_t \rho = f(v) L^* \rho$, находим

$$\partial_t (\rho f(v)) = L^* (\rho f(v)) - \rho f''(v)(\mathbf{A} \nabla v, \nabla v).$$

Умножая это уравнение на функцию ψ и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t (f(v) \rho) \psi \, dx \, ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \rho (\mathbf{A} \nabla v, \nabla v) f''(v) \psi \, dx \, ds \tau \\ = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \psi L^* (\rho f(v)) \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Применяя формулу Ньютона–Лейбница и учитывая равенство $v(x, 0) \equiv 1$, получаем:

$$\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t (f(v) \rho) \psi \, dx \, ds = \int_{\mathbf{R}^d} f(v(x, t)) \rho(x, t) \psi(x) \, dx - f(1) \int_{\mathbf{R}^d} \psi(x) \, d\nu.$$

Так как L^* сопряжен к L , то

$$\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \psi L^* (\rho f(v)) \, dx \, ds = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \rho f(v) L \psi \, dx \, ds.$$

Таким образом, получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} f(v(x, t)) \rho(x, t) \psi(x) \, dx + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \rho (\mathbf{A} \nabla v, \nabla v) f''(v) \psi \, dx \, ds \\ = f(1) \int_{\mathbf{R}^d} \psi(x) \, d\nu + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \rho f(v) L \psi \, dx \, ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Учитывая условие (C2) и неравенства $f'' \geq 0$ и $\psi \geq 0$, получаем оценку (2.2). Чтобы вывести оценку (2.3), надо провести в (2.4) дополнительные преобразования. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho f(v) a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \psi \, dx \, ds &= - \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho f'(v) (\mathbf{A} \nabla v, \nabla \psi) \, dx \, ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho f(v) (\beta_\mu, \nabla \psi) \, dx \, ds. \end{aligned}$$

По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$|(\mathbf{A} \nabla v, \nabla \psi)| \leq \sqrt{(\mathbf{A} \nabla v, \nabla v)} \cdot \sqrt{(\mathbf{A} \nabla \psi, \nabla \psi)}.$$

Применяя неравенство $qr \leq 2^{-1}(q^2 + r^2)$ с показателями

$$q = |f''(v)|^{1/2} |\psi|^{1/2} (\mathbf{A} \nabla v, \nabla v)^{1/2}$$

и

$$r = |f''(v)|^{-1/2} |\psi|^{-1/2} (\mathbf{A} \nabla \psi, \nabla \psi)^{1/2} |f'(v)|,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} f'(v) (\mathbf{A} \nabla v, \nabla \psi) \varrho \, dx \, ds &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho (\mathbf{A} \nabla v, \nabla v) f''(v) \psi \, dx \, ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho (\mathbf{A} \nabla \psi, \nabla \psi) \psi^{-1} |f'(v)|^2 f''(v)^{-1} \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} f(v(x, t)) \varrho(x, t) \psi(x) \, dx &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho (\mathbf{A} \nabla v, \nabla v) f''(v) \psi \, dx \, ds \\ &\leq f(1) \int_{\mathbf{R}^d} \psi(x) \, d\nu + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho (\mathbf{A} \nabla \psi, \nabla \psi) \psi^{-1} |f'(v)|^2 f''(v)^{-1} \, dx \, ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} f(v) (\mathbf{b} - \beta_\mu, \nabla \psi) \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Так как $f'' \geq 0$ и выполняется условие (C2), то последнее неравенство дает оценку (2.3). Лемма доказана.

Отметим, что в предложенном выше неформальном доказательстве было важно, что $v(\cdot, 0) = 1$. В общем случае такого равенства ни в каком смысле утверждать нельзя. Кроме того, при наших предположениях плотность решения не обязана быть дифференцируемой по переменной t .

Теорема 2.1. *Предположим, что выполняются условия (C1), (C2) и $b \in L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ для некоторого $p > d + 2$. Пусть также для некоторой меры μ из класса $\mathcal{M}_\nu$ имеет место включение*

$$a^{ij}, b^i \in L^1(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1)) \quad \text{для всех } 1 \leq i, j \leq d.$$

Тогда $\sharp \mathcal{M}_\nu = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть мера μ задана плотностью ϱ относительно меры Лебега. Предположим, что есть еще одна мера из $\mathcal{M}_\nu$, заданная плотностью σ . Как и выше, положим $v = \sigma/\varrho$. Пусть $\psi(x) = \zeta(x/N)$, где неотрицательная функция $\zeta \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ такова, что $\zeta(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $\zeta(x) = 0$ при $|x| > 2$, причем существует такое число $K > 0$, что для всех x выполняются неравенства

$$|\zeta(x)| \leq K, \quad |\nabla \zeta(x)| \leq K, \quad \sum_{i,j=1}^d |\partial_{x_i} \partial_{x_j} \zeta(x)| \leq K.$$

Пусть $f(z) = e^{\lambda(1-z)}$. Ясно, что $|f(z)| \leq e^\lambda$ при $z \geq 0$. Используя неравенство (2.2) из леммы 2.2, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} e^{\lambda(1-v(x,t))} \varrho(x,t) \zeta(x/N) dx &\leq \int_{\mathbf{R}^d} \zeta(x/N) d\nu \\ &+ e^\lambda K N^{-2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |a^{ij}| \varrho dx ds + e^\lambda K N^{-1} \sum_{i=1}^d \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |b^i| \varrho dx ds. \end{aligned}$$

По условию $|a^{ij}| \varrho, |b^i| \varrho \in L^1(\mathbf{R}^d \times (0,1))$. Устремляя N к бесконечности, приходим к соотношению (2.1). Следовательно, лемма 2.1 дает требуемое утверждение.

Теорема 2.2. *Предположим, что выполняются условия (C1), (C2) и $b \in L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^d \times (0,1))$ для некоторого $p > d+2$. Пусть также для некоторой меры μ из класса $\mathcal{M}_\nu$ имеет место включение*

$$a^{ij}, b^i - \beta_\mu^i \in L^1(\mu, \mathbf{R}^d \times (0,1)) \quad \text{для всех } 1 \leq i, j \leq d.$$

Тогда $\sharp \mathcal{M}_\nu = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть мера μ задана плотностью ϱ относительно меры Лебега. Предположим, что есть еще одна мера из $\mathcal{M}_\nu$, заданная плотностью σ . Как и выше, положим $v = \sigma/\varrho$. Пусть $\psi(x) = \zeta(x/N)$, где неотрицательная функция $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ такова, что $\zeta(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $\zeta(x) = 0$ при $|x| > 2$, причем существует такое число $K > 0$, что для всех x выполняются неравенства

$$|\zeta(x)| \leq K, \quad |\nabla \zeta(x)| \leq K, \quad |\nabla \zeta(x)|^2 \zeta^{-1}(x) \leq K.$$

Пусть $f(z) = e^{\lambda(1-z)}$. Тогда $|f(z)| \leq e^\lambda$ при $z \geq 0$. Используя неравенство (2.3) из леммы 2.2, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} e^{\lambda(1-v(x,t))} \varrho(x,t) \zeta(x/N) dx &\leq \int_{\mathbf{R}^d} \zeta(x/N) d\nu \\ &+ e^\lambda K N^{-2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |a^{ij}| \varrho dx ds + e^\lambda K N^{-1} \sum_{i=1}^d \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |b^i - \beta_\mu^i| \varrho dx ds. \end{aligned}$$

По условию $|a^{ij}|\varrho, |b^i - \beta_\mu^i|\varrho \in L^1(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$. Устремляя N к бесконечности и применяя лемму 2.1, получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Теорема 2.3. Пусть выполняются условия (C1), (C2) и $b \in L_{loc}^p(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ для некоторого $p > d + 2$. Предположим, что существует положительная функция $V \in C^2(\mathbf{R}^d)$ такая, что $V(x) \rightarrow +\infty$ при $|x| \rightarrow +\infty$ и для некоторого числа $C > 0$ и всех $(x, t) \in \mathbf{R}^d \times [0, 1]$ выполнены неравенства

$$LV(x, t) \leq C, \quad |\sqrt{A(x, t)} \nabla V(x)| \leq C.$$

Тогда $\sharp \mathcal{M}_\nu \leq 1$.

Доказательство. Предположим, что в классе $\mathcal{M}_\nu$ есть две меры, заданные плотностями σ и ϱ относительно меры Лебега. Положим $v = \sigma/\varrho$. Пусть $\psi(x) = \zeta(N^{-1}V(x))$, где неотрицательная функция $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ такова, что $\zeta(z) = 1$ при $|z| < 1$ и $\zeta(z) = 0$ при $|z| > 2$, кроме того, $\zeta'(z) \leq 0$ при $z > 0$ и существует такое число $K > 0$, что для всех z выполняются неравенства

$$|\zeta(z)| \leq K, \quad |\zeta'(z)| \leq K, \quad |\zeta''(z)| \leq K.$$

Пусть $f(z) = e^{\lambda(1-z)} - e^\lambda$. Тогда $f(z) \leq 0$ и $|f(z)| \leq 2e^\lambda$ при $z \geq 0$. Заметим, что

$$f(v)\zeta'LV \leq Cf(v)\zeta',$$

так как $f(v)\zeta' \geq 0$. Используя неравенство (2.2) из леммы 2.2, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} (e^{\lambda(1-v(x,t))} - e^\lambda) \varrho(x, t) \zeta(N^{-1}V(x)) dx &\leq (1 - e^\lambda) \int_{\mathbf{R}^d} \zeta(N^{-1}V(x)) d\nu \\ &+ 2e^\lambda CK(N^{-1} + CN^{-2}) \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho dx ds. \end{aligned}$$

Устремляя N к бесконечности, находим

$$\int_{\mathbf{R}^d} (e^{\lambda(1-v(x,t))} - e^\lambda) \varrho(x, t) dx \leq (1 - e^\lambda) \int_{\mathbf{R}^d} d\nu.$$

Так как $\varrho(\cdot, t)$ — вероятностная плотность и ν — вероятностная мера, то

$$\int_{\mathbf{R}^d} e^{\lambda(1-v(x,t))} \varrho(x, t) dx \leq 1.$$

Применяя лемму 2.1, завершаем доказательство.

Пример 2.1. Пусть $V(x) = \ln(\ln(1 + |x|))$ при $|x| > 1$. Тогда при $|x| > 1$ имеем:

$$|\sqrt{A(x, t)} \nabla V(x)|^2 = (\mathbf{A}(x, t) \nabla V(x), \nabla V(x)) = \frac{(\mathbf{A}(x, t)x, x)}{|x|^2(|x| + 1)^2 \ln^2(|x| + 1)}.$$

Вычислим $LV(x, t)$ при $|x| > 1$:

$$LV(x, t) = -\frac{(\mathbf{A}(x, t)x, x)}{|x|^2(1 + |x|)^2 \ln(1 + |x|)} \left(1 + \frac{1}{\ln(1 + |x|)} + \frac{1 + |x|}{|x|}\right) + \frac{\text{trace } \mathbf{A}(x, t)}{|x|(1 + |x|) \ln(1 + |x|)} + \frac{(b(x, t), x)}{|x|(|x| + 1) \ln(|x| + 1)}.$$

Для выполнения условий теоремы достаточно иметь оценки

$$\begin{aligned} \text{trace } \mathbf{A}(x, t) &\leq C + C|x|^2 \ln(1 + |x|), & (\mathbf{A}(x, t)x, x) &\leq C + C|x|^4 \ln^2(1 + |x|), \\ (b(x, t), x) &\leq C + C|x|^2 \ln(1 + |x|) \end{aligned}$$

для всех $(x, t) \in \mathbf{R}^d \times (0, 1)$.

Объединяя теорему 2.3, последний пример и теорему 2.6.1 о существовании вероятностного решения задачи Коши (1.1) из [15], получаем следующую теорему существования и единственности.

Теорема 2.4. *Предположим, что выполняются условия (C1), (C2) и для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ мы имеем*

$$\sup_{(x, t) \in U \times [0, 1]} |b(x, t)| < \infty.$$

Предположим также, что найдется такое число $C > 0$, что

$$\begin{aligned} \text{trace } \mathbf{A}(x, t) &\leq C + C|x|^2 \ln(1 + |x|), & (\mathbf{A}(x, t)x, x) &\leq C + C|x|^4 \ln^2(1 + |x|), \\ (b(x, t), x) &\leq C + C|x|^2 \ln(1 + |x|) \end{aligned}$$

для всех $(x, t) \in \mathbf{R}^d \times (0, 1)$. Тогда для каждой борелевской вероятностной меры ν на $\mathbf{R}^d$ существует единственное семейство $(\mu_t)_{0 < t < 1}$ вероятностных мер на $\mathbf{R}^d$, удовлетворяющее задаче Коши (1.1).

З а м е ч а н и е 2.1. Отметим, что в доказанных выше теоремах единственности нельзя отказаться от невырожденности матрицы $\mathbf{A}$, не изменяя условия на коэффициент b . Это легко видеть в случае $\mathbf{A} \equiv 0$, когда мы получаем задачу Коши для транспортного уравнения, которое даже в случае непрерывного коэффициента b может иметь более одного вероятностного решения.

3. Доказательство основной леммы. Пусть, как и выше, коэффициент b локально интегрируем в степени $p > d + 2$ относительно меры Лебега на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ и даны два решения задачи Коши (1.1) из класса $\mathcal{M}_\nu$, заданные непрерывными и положительными на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ плотностями σ и ρ относительно меры Лебега. Положим $v(x, t) = \sigma(x, t)/\rho(x, t)$.

Пусть $\omega \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, $\omega \geq 0$, $\|\omega\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} = 1$ и $|\nabla \omega|^2 \omega^{-1} \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^d)$.

Эти условия легко обеспечить, взяв $\omega(x) = c_0 \zeta(|x|)$, где c_0 — нормировочная константа и $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta(y) = 0$ при $|y| \geq 1$,

$\zeta(y) > 0$ при $|y| < 1$, $\zeta(y) = 1$ при $|y| \leq 1/2$ и $\zeta(y) = \exp[(y^2 - 1)^{-1}]$ вблизи точек -1 и 1 . Всюду ниже мы используем именно такую функцию ω .

Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $\omega_\varepsilon = \varepsilon^{-d}\omega(x\varepsilon^{-1})$. Для всякой локально интегрируемой функции g через g_ε обозначим свертку $g * \omega_\varepsilon$. Отметим несколько существенных для нас свойств функций g_ε :

(1) имеет место равенство $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(x) = g(x)$ для почти всех x , а если g — непрерывная функция, то равенство выполняется для всех x ;

(2) если $g \in L^1(U)$ для некоторого шара U , то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|g_\varepsilon - g\|_{L^1(U')} = 0$ для всякого шара $\bar{U}' \subset U$;

(3) функция g_ε лежит в классе C^∞ , а если g непрерывна и строго положительна, то g_ε также строго положительна.

Из непрерывности σ и ϱ на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ следует, что функции σ_ε и ϱ_ε непрерывны на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$. Более того,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon(x, t) = \sigma(x, t), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varrho_\varepsilon(x, t) = \varrho(x, t).$$

Так как $\omega_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, то для всех $x \in \mathbf{R}^d$ при $t \rightarrow 0$

$$\varrho_\varepsilon(x, t) = \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(y, t) \omega_\varepsilon(x - y) dy \rightarrow \int_{\mathbf{R}^d} \omega_\varepsilon(x - y) \nu(dy) = \nu * \omega_\varepsilon(x).$$

Аналогичное утверждение имеет место для σ_ε . Доопределим функции $\varrho_\varepsilon(x, t)$ и $\sigma_\varepsilon(x, t)$ при $t = 0$ значением $\nu * \omega_\varepsilon(x)$. Таким образом, мы получили функции, непрерывные на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ и при каждом фиксированном x непрерывные на $[0, 1]$ по t .

Так как для каждого $t \in (0, 1)$ функции $\varrho(\cdot, t)$ и $\sigma(\cdot, t)$ являются вероятностными плотностями, то при фиксированном ε функции ϱ_ε и σ_ε равномерно ограничены на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$. Поэтому для всякого шара U

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\varrho_\varepsilon(\cdot, t) - \nu * \omega_\varepsilon\|_{L^1(U)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|\sigma_\varepsilon(\cdot, t) - \nu * \omega_\varepsilon\|_{L^1(U)} = 0.$$

Следовательно, $\lim_{t \rightarrow 0} \|\varrho_\varepsilon(\cdot, t) - \sigma_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^1(U)} = 0$.

Кроме того, функции σ_ε и ϱ_ε являются абсолютно непрерывными по переменной t . Действительно, в смысле обобщенных функций имеем

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_\varepsilon &= \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \varrho)_\varepsilon - \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} (b^i \varrho)_\varepsilon, \\ \partial_t \sigma_\varepsilon &= \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \sigma)_\varepsilon - \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} (b^i \sigma)_\varepsilon, \end{aligned}$$

причем правые части этих равенств интегрируемы на $[0, 1]$, так как в силу определения класса $\mathcal{M}_\nu$ и условий (C1), (C2) функции $b\varrho$, $b\sigma$ и $a^{ij}\varrho$, $a^{ij}\sigma$ интегрируемы на $U \times [0, 1]$ для всякого шара U .

Положим $v^\varepsilon(x, t) = \sigma_\varepsilon(x, t)/\varrho_\varepsilon(x, t)$ при $0 < t < 1$ и $x \in \mathbf{R}^d$. Тогда $v^\varepsilon(x, t)$ стремится к $v(x, t) = \sigma(x, t)/\varrho(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ при всех $x \in \mathbf{R}^d$ и $t \in (0, 1)$.

Пусть

$$\mathcal{A}\varphi = \sum_{i,j=1}^d a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi, \quad \mathcal{A}^* \varphi = \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \varphi).$$

Пусть также

$$R_{\varrho,\varepsilon}^i = \sum_{j=1}^d (\partial_{x_j} (a^{ij} \varrho)_\varepsilon - \partial_{x_j} (a^{ij} \varrho_\varepsilon)), \quad R_{\sigma,\varepsilon}^i = \sum_{j=1}^d (\partial_{x_j} (a^{ij} \sigma)_\varepsilon - \partial_{x_j} (a^{ij} \sigma_\varepsilon)).$$

Имеют место следующие равенства:

$$\partial_t \varrho_\varepsilon = \mathcal{A}^* \varrho_\varepsilon - \operatorname{div}((b\varrho)_\varepsilon - R_{\varrho,\varepsilon}), \quad (3.1)$$

$$\partial_t \sigma_\varepsilon = \mathcal{A}^* \sigma_\varepsilon - \operatorname{div}((b\sigma)_\varepsilon - R_{\sigma,\varepsilon}). \quad (3.2)$$

Зафиксируем пару чисел s, t , для которых $0 < s < t < 1$. Уравнение (3.2) эквивалентно интегральному тождеству

$$\int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t (v^\varepsilon \varrho_\varepsilon) \varphi \, dx \, d\tau = \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon v^\varepsilon \mathcal{A} \varphi + ((b\sigma)_\varepsilon - R_{\sigma,\varepsilon}, \nabla \varphi) \, dx \, d\tau$$

для всякой непрерывной на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ функции φ , имеющей непрерывные производные до второго порядка включительно и равной нулю для всех x , лежащих вне некоторого шара $U \subset \mathbf{R}^d$.

Пусть f — любая из двух функций $e^{\lambda(1-z)} - e^\lambda$ и $e^{\lambda(1-z)}$. Пусть также $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^d)$. Положим $\varphi = f'(v^\varepsilon)\psi$. Заметим, что

$$\partial_t (v^\varepsilon \varrho_\varepsilon) f'(v^\varepsilon) = \partial_t (f(v^\varepsilon) \varrho_\varepsilon) - (f(v_\varepsilon) - v_\varepsilon f'(v_\varepsilon)) \partial_t \varrho_\varepsilon.$$

Подставляя φ указанного вида в интегральное тождество, приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t (f(v^\varepsilon) \varrho_\varepsilon) \psi \, dx \, d\tau &= \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} (f(v^\varepsilon) - v^\varepsilon f'(v^\varepsilon)) \psi \partial_t (\varrho_\varepsilon) \, dx \, d\tau \\ &+ \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} [\varrho_\varepsilon v^\varepsilon \mathcal{A} (f'(v^\varepsilon) \psi) + f'(v^\varepsilon) ((b\sigma)_\varepsilon - R_{\sigma,\varepsilon}, \nabla \psi) \\ &+ \psi f''(v^\varepsilon) ((b\sigma)_\varepsilon - R_{\sigma,\varepsilon}, \nabla v^\varepsilon)] \, dx \, d\tau. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Уравнение (3.1) эквивалентно интегральному тождеству

$$\int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t \varrho_\varepsilon \varphi \, dx \, d\tau = \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon \mathcal{A} \varphi + ((b\varrho)_\varepsilon - R_{\varrho,\varepsilon}, \nabla \varphi) \, dx \, d\tau$$

для всякой непрерывной на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ функции φ , имеющей непрерывные производные до второго порядка включительно и равной нулю для всех x , лежащих вне некоторого шара $U \subset \mathbf{R}^d$. Положим $\varphi = (f(v^\varepsilon) - v^\varepsilon f'(v^\varepsilon))\psi$. Подставляя такую функцию φ в интегральное тождество, приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} (f(v^\varepsilon) - v^\varepsilon f'(v^\varepsilon))\psi \partial_t(\varrho_\varepsilon) dx d\tau &= \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} [\varrho_\varepsilon \mathcal{A}((f(v^\varepsilon) - v^\varepsilon f'(v^\varepsilon))\psi) \\ &\quad + (f(v^\varepsilon) - v^\varepsilon f'(v^\varepsilon))((b\varrho)_\varepsilon - R_{\varrho, \varepsilon}, \nabla \psi) \\ &\quad - \psi v^\varepsilon f''(v^\varepsilon)((b\varrho)_\varepsilon - R_{\varrho, \varepsilon}, \nabla v^\varepsilon)] dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Напомним, что для всяких функций $\xi, \eta \in C^\infty(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ и $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\xi\eta) &= \eta \mathcal{A}\xi + \xi \mathcal{A}\eta + 2(\mathbf{A}\nabla\xi, \nabla\eta), \\ \mathcal{A}\Phi(\xi) &= \Phi'(\xi)\mathcal{A}\xi + \Phi''(\xi)(\mathbf{A}\nabla\xi, \nabla\xi). \end{aligned}$$

Применяя эти соотношения, приходим к равенству

$$\mathcal{A}((f(v^\varepsilon) - v^\varepsilon f'(v^\varepsilon))\psi) = f(v^\varepsilon)\mathcal{A}\psi - (\mathbf{A}\nabla v^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)f''(v^\varepsilon)\psi - v^\varepsilon \mathcal{A}(f'(v^\varepsilon)\psi).$$

Складывая равенства (3.4) и (3.3), получаем

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t(f(v^\varepsilon)\varrho_\varepsilon)\psi dx d\tau + \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} (A\nabla v^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)f''(v^\varepsilon)\varrho_\varepsilon\psi dx d\tau \\ = \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} [\varrho_\varepsilon f(v^\varepsilon)\mathcal{A}\psi + f(v^\varepsilon)((b\varrho)_\varepsilon, \nabla\psi)] dx d\tau + K_\varepsilon(s, t) + L_\varepsilon(s, t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(s, t) &= \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} [(W_\varepsilon, \nabla\psi)f'(v^\varepsilon) + (W_\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)f''(v^\varepsilon)\psi] dx d\tau, \\ W_\varepsilon &= (b\sigma)_\varepsilon - (b\varrho)_\varepsilon v^\varepsilon; \\ L_\varepsilon(s, t) &= - \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} [f'(v^\varepsilon)(R_{\sigma, \varepsilon}, \nabla\psi) + (f(v^\varepsilon) - v^\varepsilon f'(v^\varepsilon))(R_{\varrho, \varepsilon}, \nabla\psi) \\ &\quad + \psi f''(v^\varepsilon)(R_{\sigma, \varepsilon} - v^\varepsilon R_{\varrho, \varepsilon}, \nabla v^\varepsilon)] dx d\tau. \end{aligned}$$

Далее всюду мы предполагаем, что параметр ε принимает только значения вида $1/n$, где n — натуральное число.

Докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 3.1. Пусть $\lambda > 0$. Для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ и $0 < t < 1$ имеем

$$(1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_U |W_\varepsilon| e^{-\lambda v^\varepsilon} dx ds = 0, \quad (2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_U \frac{|W_\varepsilon|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon} dx ds = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем шар U' такой, что $U \subset U'$ и для всяких $y \in U$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ носитель функции $x \mapsto \omega_\varepsilon(x - y)$ лежит в шаре U . Докажем первое соотношение. Зафиксируем s такое, что

$$|b(\cdot, s)|\varrho(\cdot, s), |b(\cdot, s)|^2\varrho(\cdot, s), |b(\cdot, s)|\sigma(\cdot, s), |b(\cdot, s)|^2\sigma(\cdot, s) \in L^1(U').$$

По теореме Фубини множество тех s , где эти включения нарушены, имеет меру нуль. Заметим, что для почти всех x

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_\varepsilon(x, s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (b\sigma)_\varepsilon(x, s) - (b\varrho)_\varepsilon(x, s)v^\varepsilon(x, s) \rightarrow 0.$$

Следовательно, для сходимости достаточно доказать равномерную интегрируемость. Заметим, что $(b\varrho)_\varepsilon$ и $(b\sigma)_\varepsilon$ равномерно интегрируемы, так как сходятся в $L^1(U')$. Кроме того, функции $|v^\varepsilon|e^{-\lambda v^\varepsilon}$, $e^{-\lambda v^\varepsilon}$ равномерно по ε ограничены. Остается отметить, что произведение функций, равномерно по ε ограниченных, на функции, равномерно по ε интегрируемые, являются равномерно интегрируемыми. Следовательно, для почти всех s имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U |W_\varepsilon| e^{-\lambda v^\varepsilon} dx = 0.$$

Кроме того, существует такая константа C , не зависящая от ε , что

$$\int_U |W_\varepsilon| e^{-\lambda v^\varepsilon} dx \leq C(\|b(\cdot, s)\varrho(\cdot, s)\|_{L^1(U')} + \|b(\cdot, s)\sigma(\cdot, s)\|_{L^1(U')}).$$

Применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем требуемое.

Перейдем ко второму утверждению. Зафиксируем такое же число s , как и выше. По неравенству Коши–Буняковского

$$\frac{|(b\varrho)_\varepsilon|^2}{\varrho_\varepsilon} \leq (|b|^2\varrho)_\varepsilon, \quad \frac{|(b\sigma)_\varepsilon|^2}{\varrho_\varepsilon} \leq (|b|^2\sigma)_\varepsilon v^\varepsilon.$$

Поэтому

$$\frac{|W_\varepsilon|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon} \leq 2(|b|^2\varrho)_\varepsilon |v^\varepsilon|^2 e^{-\lambda v^\varepsilon} + 2(|b|^2\sigma)_\varepsilon v^\varepsilon e^{-\lambda v^\varepsilon}.$$

Так как $(|b|^2\sigma)_\varepsilon$ и $(|b|^2\varrho)_\varepsilon$ равномерно интегрируемы по ε , а функции $|v^\varepsilon|^2 e^{-\lambda v^\varepsilon}$ и $v^\varepsilon e^{-\lambda v^\varepsilon}$ равномерно ограничены по ε , то семейство функций

$$2(|b|^2\varrho)_\varepsilon |v^\varepsilon|^2 e^{-\lambda v^\varepsilon} + 2(|b|^2\sigma)_\varepsilon v^\varepsilon e^{-\lambda v^\varepsilon}$$

равномерно по ε интегрируемо и, следовательно, равномерно интегрируемы функции

$$\frac{|W_\varepsilon|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon}.$$

Для почти всех x при $\varepsilon \rightarrow 0$ последнее выражение стремится к нулю. Таким образом, для почти всех s

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U \frac{|W_\varepsilon|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon} dx = 0.$$

Кроме того, существует константа C , не зависящая от ε , для которой

$$\int_U \frac{|W_\varepsilon|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon} dx \leq C \left(\int_{U'} |b|^2 \varrho dx + \int_{U'} |b|^2 \sigma dx \right).$$

Таким образом, для функций

$$\int_U \frac{|W_\varepsilon|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon} dx$$

на отрезке $[0, 1]$ выполняются условия теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. Пусть $\lambda > 0$. Для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ и $0 < t < 1$ имеем:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_U |R_{\varrho, \varepsilon}| dx ds = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_U |R_{\sigma, \varepsilon}| dx ds = 0, \\ 2) \quad & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_U \frac{|R_{\varrho, \varepsilon}|^2}{\varrho_\varepsilon} |v^\varepsilon|^2 e^{-\lambda v^\varepsilon} dx ds = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_U \frac{|R_{\sigma, \varepsilon}|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon} dx ds = 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Зафиксируем шар U' такой, что $U \subset U'$ и для всяких $y \in U$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ носитель функции $x \rightarrow \omega_\varepsilon(x - y)$ лежит в шаре U . Докажем первое соотношение. Напомним, что по условию функции a^{ij} липшицевы по переменной x и, следовательно, имеют ограниченные соболевские производные по x . Кроме того, для почти всех s функция $\varrho(\cdot, s)$ лежит в соболевском классе $W^{1,p}(U')$. Зафиксируем s такое, что для всех i, j

$$\varrho(\cdot, s) \partial_{x_j} a^{ij}(\cdot, s), a^{ij}(\cdot, s) \partial_{x_j} \varrho(\cdot, s) \in L^1(U).$$

Множество тех s , для которых это не выполняется, имеет меру нуль. Заметим, что

$$R_{\varrho, \varepsilon}^i = \sum_{j=1}^d [(\varrho \partial_{x_j} a^{ij})_\varepsilon + (a^{ij} \partial_{x_j} \varrho)_\varepsilon - \varrho_\varepsilon \partial_{x_j} a^{ij} - a^{ij} (\partial_{x_j} \varrho)_\varepsilon].$$

Для почти всех x имеем $R_{\varrho, \varepsilon}^i(x, s) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, при фиксированном s семейство функций $R_{\varrho, \varepsilon}^i(\cdot, s)$ равномерно интегрируемо по ε . Следовательно, для почти всех s выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U |R_{\varrho, \varepsilon}| dx = 0.$$

Теперь запишем $R_{\varrho, \varepsilon}$ в другом виде:

$$\begin{aligned} R_{\varrho, \varepsilon}^i(x, s) &= \sum_{j=1}^d \int_{\mathbf{R}^d} (a^{ij}(y, s) - a^{ij}(x, s)) \varrho(y, s) \varepsilon^{-d-1} \partial_{x_j} \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \\ &\quad - \varrho_\varepsilon(x, s) \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} a^{ij}(x, s). \end{aligned}$$

Используя условие (C1), выбираем число $\Lambda = \Lambda(U') > 0$ и получаем неравенство

$$|R_{\varrho, \varepsilon}^i(x, s)| \leq d\Lambda \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(y, s) \varepsilon^{-d} \frac{|x-y|}{\varepsilon} \left| \nabla \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right| dy + d\Lambda \varrho_\varepsilon(x, s).$$

Интегрируя по x и учитывая, что $\varrho(\cdot, s)$ является вероятностной плотностью, находим, что

$$\int_U |R_{\varrho, \varepsilon}^i(x, s)| dx \leq d\Lambda \int_{\mathbf{R}^d} (|x| |\nabla \omega(x)| + |\omega(x)|) dx.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_U |R_{\varrho, \varepsilon}| dx ds = 0.$$

Аналогичные рассуждения дают соответствующее утверждение для $R_{\sigma, \varepsilon}$. Таким образом, пункт (1) доказан.

Докажем утверждения пункта (2). Зафиксируем такое же число s , как и выше. Для почти всех x

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|R_{\varrho, \varepsilon}(x, s)|^2}{\varrho_\varepsilon(x, s)} |v^\varepsilon(x, s)|^2 e^{-\lambda v^\varepsilon(x, s)} = 0.$$

Кроме того, как уже отмечалось выше,

$$|R_{\varrho, \varepsilon}^i(x, s)| \leq d\Lambda \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(y, s) \varepsilon^{-d} \frac{|x-y|}{\varepsilon} \left| \nabla \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right| dy + d\Lambda \varrho_\varepsilon(x, s).$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(y, s) \varepsilon^{-d} \frac{|x-y|}{\varepsilon} \left| \nabla \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right| dy &= \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(x - \varepsilon z, s) |z| |\nabla \omega(z)| dz \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} (\varrho(x - \varepsilon z, s) \omega(z))^{1/2} (|z| |\nabla \omega(z)| (\varrho^{1/2}(x - \varepsilon z, s) \omega^{-1/2}(z))) dz \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho(x - \varepsilon z, s) \omega(z) dz \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varrho(x - \varepsilon z, s) |z|^2 |\nabla \omega(z)|^2 \omega^{-1}(z) dz \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Итак, для некоторой константы C , не зависящей от ε , имеет место неравенство

$$\frac{|R_{\varrho,\varepsilon}(x,s)|^2}{\varrho_\varepsilon(x,s)} \leq C \varrho * \kappa_\varepsilon(x,s),$$

где $\kappa_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \kappa(x/\varepsilon)$ и $\kappa(x) = c_d(|x|^2 |\nabla \omega(x)|^2 \omega^{-1}(x) + \omega(x))$, c_d — такая нормировочная константа, что $\int_{\mathbf{R}^d} \kappa(x) dx = 1$. Таким образом, функция κ — новое ядро усреднения. Семейство функций $\varrho * \kappa_\varepsilon$ равномерно интегрируемо по ε , так как сходится в L^1 . Следовательно функции

$$\frac{|R_{\varrho,\varepsilon}(x,s)|^2}{\varrho_\varepsilon(x,s)}$$

равномерно интегрируемы по ε . Так как функции $|v^\varepsilon|^2 e^{-\lambda v^\varepsilon}$ равномерно по ε ограничены, то для почти всех s выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U \frac{|R_{\varrho,\varepsilon}(x,s)|^2}{\varrho_\varepsilon(x,s)} |v^\varepsilon(x,s)|^2 e^{-\lambda v^\varepsilon(x,s)} dx = 0.$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\int_U \frac{|R_{\varrho,\varepsilon}|^2}{\varrho_\varepsilon} |v^\varepsilon|^2 e^{-\lambda v^\varepsilon} dx \leq C(\lambda) \int_{\mathbf{R}^d} \kappa(x) dx.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_U \frac{|R_{\varrho,\varepsilon}|^2}{\varrho_\varepsilon} |v^\varepsilon|^2 e^{-\lambda v^\varepsilon} dx ds = 0.$$

Докажем аналогичное равенство для σ . Зафиксируем такое число s , что $\sigma(\cdot, s) \partial_{x_j} a^{ij}(\cdot, s)$, $a^{ij}(\cdot, s) \partial_{x_j} \sigma(\cdot, s) \in L^1(U)$. Множество тех s , для которых это не выполняется, имеет меру нуль. Для почти всех x выражение

$$\frac{|R_{\sigma,\varepsilon}(x,s)|^2}{\varrho_\varepsilon(x,s)} e^{-\lambda v^\varepsilon(x,s)}$$

стремится к нулю. Кроме того,

$$|R_{\sigma,\varepsilon}^i(x,s)| \leq d\Lambda \int_{\mathbf{R}^d} \sigma(y,s) \varepsilon^{-d} \frac{|x-y|}{\varepsilon} \left| \nabla \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right| dy + d\Lambda \sigma_\varepsilon(x,s).$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем, что для некоторой константы C , не зависящей от ε , имеет место неравенство

$$\frac{|R_{\sigma,\varepsilon}(x,s)|^2}{\varrho_\varepsilon} \leq C v^\varepsilon(x,s) (\sigma * \kappa_\varepsilon)(x,s).$$

Функции $\sigma * \kappa_\varepsilon$ равномерно интегрируемы по ε , а функции $v^\varepsilon e^{-\lambda v^\varepsilon}$ равномерно ограничены по ε . Следовательно, функции

$$\frac{|R_{\sigma,\varepsilon}(x,s)|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon}$$

равномерно интегрируемы по ε и для почти всех s выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U \frac{|R_{\sigma, \varepsilon}(x, s)|^2}{\varrho_\varepsilon(x, s)} e^{-\lambda v^\varepsilon(x, s)} dx = 0.$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\int_U \frac{|R_{\sigma, \varepsilon}|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon} dx \leq C \int_{\mathbf{R}^d} \kappa(x) dx.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_U \frac{|R_{\sigma, \varepsilon}|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon} dx ds = 0.$$

Таким образом, утверждения пункта (2) доказаны. Лемма 3.2 доказана.

Продолжим доказательство леммы 2.2. Пусть $\delta > 0$ и U — произвольный шар, содержащий носитель функции ψ .

Оценим слагаемое $K_\varepsilon(s, t)$ из (3.5). Напомним, что $f'' \geq 0$. Имеем

$$K_\varepsilon(s, t) \leq \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} |W_\varepsilon| |\nabla \psi| |f'(v^\varepsilon)| dx d\tau + \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} |W_\varepsilon| |\nabla v^\varepsilon| f''(v^\varepsilon) \psi dx d\tau.$$

Применяя неравенство

$$qr \leq \delta q^2 + \delta^{-1} r^2, \quad (3.6)$$

где $q = |\varrho_\varepsilon|^{1/2} |f''(v^\varepsilon)|^{1/2} |\psi|^{1/2} |\nabla v^\varepsilon|$, $r = |\varrho_\varepsilon|^{-1/2} |f''(v^\varepsilon)|^{1/2} |\psi|^{1/2} |W_\varepsilon|$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} |W_\varepsilon| |\nabla v^\varepsilon| f''(v^\varepsilon) \psi dx d\tau \\ & \leq \delta \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon |\nabla v^\varepsilon|^2 f''(v^\varepsilon) \psi dx d\tau + \frac{1}{\delta} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|W_\varepsilon|^2}{\varrho_\varepsilon} f''(v^\varepsilon) \psi dx d\tau. \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенства $f'(z) = -\lambda e^{\lambda(1-z)}$ и $f''(z) = \lambda^2 e^{\lambda(1-z)}$, находим

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(s, t) & \leq \lambda e^\lambda \sup_x |\nabla \psi(x)| \int_0^t \int_U |W_\varepsilon| e^{-\lambda v^\varepsilon} dx d\tau \\ & \quad + \frac{\lambda^2 e^\lambda}{4\delta} \sup_x |\psi(x)| \int_0^t \int_U \frac{|W_\varepsilon|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon} dx d\tau \\ & \quad + \delta \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon |\nabla v^\varepsilon|^2 f''(v^\varepsilon) \psi dx d\tau. \end{aligned}$$

Оценим слагаемое L_ε из (3.5). Снова применяя неравенство (3.6) с

$$q = |\varrho_\varepsilon|^{1/2} |f''(v^\varepsilon)|^{1/2} |\psi|^{1/2} |\nabla v^\varepsilon|,$$

$$r = |\varrho_\varepsilon|^{-1/2} |f''(v^\varepsilon)|^{1/2} |\psi|^{1/2} |R_{\sigma,\varepsilon}| \quad \text{и} \quad r = |\varrho_\varepsilon|^{-1/2} |f''(v^\varepsilon)|^{1/2} |\psi|^{1/2} |v^\varepsilon| |R_{\varrho,\varepsilon}|,$$

приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \left| \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \psi f''(v^\varepsilon) (R_{\sigma,\varepsilon} - v^\varepsilon R_{\varrho,\varepsilon}, \nabla v^\varepsilon) dx d\tau \right| \\ & \leq \frac{\lambda^2}{\delta} e^\lambda \sup_x |\psi(x)| \int_0^t \int_U \frac{|R_{\sigma,\varepsilon}|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon} dx d\tau \\ & \quad + \frac{\lambda^2}{\delta} e^\lambda \sup_x |\psi(x)| \int_0^t \int_U \frac{|R_{\varrho,\varepsilon}|^2}{\varrho_\varepsilon} |v^\varepsilon|^2 e^{-\lambda v^\varepsilon} dx d\tau \\ & \quad + 2\delta \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon |\nabla v^\varepsilon|^2 f''(v^\varepsilon) \psi dx d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(s, t) & \leq 2\lambda e^\lambda \sup_x |\nabla \psi(x)| \int_0^t \int_U |R_{\sigma,\varepsilon}| + |R_{\varrho,\varepsilon}| dx d\tau \\ & \quad + \frac{\lambda^2}{\delta} e^\lambda \sup_x |\psi(x)| \int_0^t \int_U \frac{|R_{\sigma,\varepsilon}|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon} dx d\tau \\ & \quad + \frac{\lambda^2}{\delta} e^\lambda \sup_x |\psi(x)| \int_0^t \int_U \frac{|R_{\varrho,\varepsilon}|^2}{\varrho_\varepsilon} |v^\varepsilon|^2 e^{-\lambda v^\varepsilon} dx d\tau \\ & \quad + 2\delta \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon |\nabla v^\varepsilon|^2 f''(v^\varepsilon) \psi dx d\tau. \end{aligned}$$

Подставляя полученные оценки в (3.5), приходим к равенству:

$$\begin{aligned} & \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t (f(v^\varepsilon) \varrho_\varepsilon) \psi dx d\tau + \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} (A \nabla v^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon) f''(v^\varepsilon) \varrho_\varepsilon \psi dx d\tau \\ & = \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} [\varrho_\varepsilon f(v^\varepsilon) \mathcal{A} \psi + f(v^\varepsilon) ((b \varrho)_\varepsilon, \nabla \psi)] dx d\tau \\ & \quad + 3\delta \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon |\nabla v^\varepsilon|^2 f''(v^\varepsilon) \psi dx d\tau + \Omega(\varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(\varepsilon) & = 2\lambda e^\lambda \sup_x |\nabla \psi(x)| \int_0^t \int_U |R_{\sigma,\varepsilon}| + |R_{\varrho,\varepsilon}| dx d\tau \\ & \quad + \frac{\lambda^2}{\delta} e^\lambda \sup_x |\psi(x)| \int_0^t \int_U \frac{|R_{\sigma,\varepsilon}|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon} dx d\tau \\ & \quad + \lambda e^\lambda \sup_x |\nabla \psi(x)| \int_0^t \int_U |W_\varepsilon| e^{-\lambda v^\varepsilon} dx d\tau \\ & \quad + \frac{\lambda^2 e^\lambda}{4\delta} \sup_x |\psi(x)| \int_0^t \int_U \frac{|W_\varepsilon|^2}{\varrho_\varepsilon} e^{-\lambda v^\varepsilon} dx d\tau. \end{aligned}$$

Заметим, что по леммам (3.1) и (3.2) мы имеем: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega(\varepsilon) = 0$. Используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t(f(v^\varepsilon) \varrho_\varepsilon) \psi \, dx \, d\tau &= \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon(x, t)) \varrho_\varepsilon(x, t) \psi(x) \, dx \\ &\quad - \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon(x, s)) \varrho_\varepsilon(x, s) \psi(x) \, dx. \end{aligned}$$

Кроме того, по условию (C2) для шара U найдется такое число $m = m(U) > 0$, что $(\mathbf{A} \nabla v^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon) \geq m |\nabla v^\varepsilon|^2$. Так как $f'' \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} (\mathbf{A} \nabla v^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon) f''(v^\varepsilon) \varrho_\varepsilon \psi \, dx \, d\tau &\geq \frac{3}{4} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} (\mathbf{A} \nabla v^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon) f''(v^\varepsilon) \varrho_\varepsilon \psi \, dx \, d\tau \\ &\quad + \frac{m}{4} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon |\nabla v^\varepsilon|^2 f''(v^\varepsilon) \psi \, dx \, d\tau. \end{aligned}$$

Полагая $\delta = m/12$, приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^d} (f(v^\varepsilon(x, t)) \varrho_\varepsilon(x, t) \psi(x) \, dx + \frac{3}{4} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon (\mathbf{A} \nabla v^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon) f''(v^\varepsilon) \psi \, dx \, d\tau \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon(x, s)) \varrho_\varepsilon(x, s) \psi(x) \, dx \\ &\quad + \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} [\varrho_\varepsilon f(v^\varepsilon) \mathcal{A} \psi + f(v^\varepsilon) ((b \varrho)_\varepsilon, \nabla \psi)] \, dx \, d\tau + \Omega(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Отбрасывая неотрицательное слагаемое в левой части последнего неравенства, получаем

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^d} (f(v^\varepsilon(x, t)) \varrho_\varepsilon(x, t) \psi(x) \, dx \leq \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon(x, s)) \varrho_\varepsilon(x, s) \psi(x) \, dx \\ &\quad + \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} [\varrho_\varepsilon f(v^\varepsilon) \mathcal{A} \psi + f(v^\varepsilon) ((b \varrho)_\varepsilon, \nabla \psi)] \, dx \, d\tau + \Omega(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Заметим, что при фиксированном ε функция $f(v^\varepsilon) \varrho_\varepsilon \mathcal{A} \psi + f(v^\varepsilon) ((b \varrho)_\varepsilon, \nabla \psi)$ интегрируема на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\lim_{s \rightarrow 0} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon) [\varrho_\varepsilon \mathcal{A} \psi + ((b \varrho)_\varepsilon, \nabla \psi)] \, dx \, d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon) [\varrho_\varepsilon \mathcal{A} \psi + ((b \varrho)_\varepsilon, \nabla \psi)] \, dx \, d\tau. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon(x, s)) \varrho_\varepsilon(x, s) \psi(x) \, dx = f(1) \int_{\mathbf{R}^d} (\nu * \omega_\varepsilon) \psi \, dx.$$

Так как функция f является гладкой, а ее производная ограничена на $[0, +\infty)$ числом λe^λ , то выполняется неравенство $|f(z) - f(1)| \leq \lambda e^\lambda |z - 1|$ для всех $z \geq 0$. Получаем

$$\int_{\mathbf{R}^d} |f(v^\varepsilon(x, s)) - f(1)| \varrho_\varepsilon(x, s) \psi(x) dx \leq \lambda e^\lambda \int_{\mathbf{R}^d} |\sigma_\varepsilon(x, s) - \varrho_\varepsilon(x, s)| \psi(x) dx.$$

Остается заметить, что при $s \rightarrow 0$ последний интеграл стремится к нулю и

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon(x, s) \psi(x) dx = f(1) \int_{\mathbf{R}^d} (\nu * \omega_\varepsilon) \psi dx.$$

Переходя в неравенстве (3.8) к пределу при $s \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon(x, t)) \varrho_\varepsilon(x, t) \psi(x) dx &\leq f(1) \int_{\mathbf{R}^d} (\nu * \omega_\varepsilon) \psi dx \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon) [\varrho_\varepsilon \mathcal{A} \psi + ((b\varrho)_\varepsilon, \nabla \psi)] dx d\tau + \Omega(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Заметим, что при $0 < \tau < t$ выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon(x, \tau)) \varrho_\varepsilon(x, \tau) \mathcal{A} \psi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^d} f(v(x, \tau)) \varrho(x, \tau) \mathcal{A} \psi(x) dx$$

и имеет место оценка

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon) \varrho_\varepsilon \mathcal{A} \psi dx \right| \leq 2e^\lambda M \sup_x |D^2 \psi(x)|.$$

Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon) \varrho_\varepsilon \mathcal{A} \psi dx d\tau = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} f(v) \varrho \mathcal{A} \psi dx d\tau.$$

Пусть U — некоторый шар, содержащий носитель функции ψ . Зафиксируем такой шар U' , что $U \subset U'$ и для всяких $y \in U$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ носитель функции $x \mapsto \omega_\varepsilon(x - y)$ лежит в шаре U . Зафиксируем $\tau \in (0, t)$, для которого $b(\cdot, \tau) \varrho(\cdot, \tau) \in L^1(U)$. Для почти всех $x \in U$ функция $f(v^\varepsilon)(b\varrho)_\varepsilon$ стремится к функции $f(v)b\varrho$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, функции $f(v^\varepsilon)$ равномерно по ε ограничены, а функции $(b\varrho)_\varepsilon$ равномерно по ε интегрируемы. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon) ((b\varrho)_\varepsilon, \nabla \psi) dx = \int_{\mathbf{R}^d} f(v) \varrho(b, \nabla \psi) dx.$$

Выполнена следующая оценка:

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon) ((b\varrho)_\varepsilon, \nabla \psi) dx \right| \leq \mathbf{C}(\lambda) \sup_x |\nabla \psi(x)| \|b(\cdot, \tau) \varrho(\cdot, \tau)\|_{L^1(U')}.$$

Опять можем применить теорему о мажорируемой сходимости, что дает

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon)((b\rho)_\varepsilon, \nabla \psi) dx d\tau = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} f(v)\varrho(b, \nabla \psi) dx d\tau.$$

Полагая $\varepsilon \rightarrow 0$ в неравенстве (3.9), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} f(v(x, t))\varrho(x, t)\psi(x) dx &\leq f(1) \int_{\mathbf{R}^d} \psi(x) d\nu \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho f(v)[\mathcal{A}\psi + (b, \nabla \psi)] dx d\tau. \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (2.2) доказано.

Получим теперь оценку (2.3). Рассмотрим следующее выражение из (3.7): $\int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon f(v^\varepsilon)\mathcal{A}\psi dx d\tau$. Интегрируя по частям, находим:

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon f(v^\varepsilon)\mathcal{A}\psi dx d\tau &= - \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} [\varrho_\varepsilon f'(v^\varepsilon)(A\nabla \psi, \nabla v^\varepsilon) \\ &\quad + f(v^\varepsilon)((\beta_\mu \varrho)_\varepsilon, \nabla \psi) + f(v^\varepsilon)(R_{\varrho, \varepsilon}, \nabla \psi)] dx d\tau. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &- \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon (\mathbf{A}\nabla v^\varepsilon, \nabla \psi) f'(v^\varepsilon) dx d\tau \\ &\leq \frac{1}{2} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon (\mathbf{A}\nabla v^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon) f''(v^\varepsilon) \psi dx d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon (\mathbf{A}\nabla \psi, \nabla \psi) \psi^{-1} |f'(v^\varepsilon)|^2 f''(v^\varepsilon)^{-1} dx d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon(x, t))\varrho_\varepsilon(x, t)\psi(x) dx &\leq \int_{\mathbf{R}^d} f(v^\varepsilon(x, s))\varrho_\varepsilon(x, s)\psi(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon (\mathbf{A}\nabla \psi, \nabla \psi) \psi^{-1} |f'(v^\varepsilon)|^2 f''(v^\varepsilon)^{-1} dx d\tau \\ &\quad - \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} (((b - \beta_\mu)\varrho)_\varepsilon, \nabla \psi) f(v^\varepsilon) dx d\tau + \tilde{\Omega}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\tilde{\Omega}(\varepsilon) = \Omega(\varepsilon) + \lambda e^\lambda \sup_x |\nabla \psi(x)| \int_0^t \int_U |R_{\varrho, \varepsilon}| dx d\tau$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\Omega}(\varepsilon) = 0$. Переход при $s \rightarrow 0$, а затем и при $\varepsilon \rightarrow 0$ обосновывается точно также, как и при доказательстве оценки (2.2). Поэтому, устремляя s и ε к нулю в (3.10), приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} f(v(x, t))\varrho(x, t)\psi(x) dx &\leq f(1) \int_{\mathbf{R}^d} \psi(x) d\nu \\ &\quad \times \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(\mathbf{A}\nabla \psi, \nabla \psi) \psi^{-1} |f'(v)|^2 f''(v)^{-1} dx d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} (b - \beta_\mu, \nabla \psi) f(v) dx d\tau. \end{aligned}$$

Тем самым получена оценка (2.3). Основная лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3.2. Утверждение леммы 2.2 имеет место не только для функции $e^{\lambda(1-z)}$ или $e^{\lambda(1-z)} - e^\lambda$ с $\lambda > 0$, но и для всякой функции $f \in C^\infty([0, +\infty))$ такой, что $f'' > 0$ и $\sup_{z \in [0, +\infty)} (|f(z)| + |z||f'(z)| + |z|^2|f''(z)|) < \infty$.

Автор выражает глубокую благодарность В. И. Богачеву и А. В. Шапошникову за плодотворные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions. — Comm. Partial Diff. Equations, 2001, v. 26, № 11–12, p. 2037–2080.
2. Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M. Existence of solutions to weak parabolic equations for measures. — Proc. London Math. Soc., 2004, v. 88, № 3, p. 753–774.
3. Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M., Stannat W. Uniqueness of solutions to weak parabolic equations for measures. — Bull. London Math. Soc., 2007, v. 39, № 4, p. 631–640.
4. Röckner M., Zhang X. Weak uniqueness of Fokker–Planck equations with degenerate and bounded coefficients. — C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2010, v. 348, № 7–8, p. 435–438.
5. Le Bris C., Lions P. L. Existence and uniqueness of solutions to Fokker–Planck type equations with irregular coefficients. — Comm. Partial Differential Equations, 2008, v. 33 p. 1272–1317.
6. Wu L., Zhang Y. A new topological approach to the L^∞ -uniqueness of operators and L^1 -uniqueness of Fokker–Planck equations. — J. Funct. Anal., 2006, v. 241, p. 557–610.
7. Figalli A. Existence and uniqueness of martingale solutions for SDEs with rough or degenerate coefficients. — J. Funct. Anal., 2008, v. 254 (1), p. 109–153.
8. Albeverio S., Bogachev V., Röckner M. On uniqueness of invariant measures for finite- and infinite-dimensional diffusions. — Comm. Pure Appl. Math., 1999, v. 52, p. 325–362.
9. Богачев В. И., Рёкнер М., Штаннат В. Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий. — Матем. сб., 2002, т. 197, № 7, с. 3–36.
10. Богачев В. И., Рёкнер М., Шапошников С. В. Глобальная регулярность и оценки решений параболических уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 4, с. 652–674.
11. Богачев В. И., Рёкнер М., Шапошников С. В. Оценки плотностей стационарных распределений и переходных вероятностей диффузионных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 2, с. 240–270.
12. Богачев В. И., Рёкнер М., Шапошников С. В. Положительные плотности переходных вероятностей диффузионных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 2, с. 213–239.
13. Metafune G., Pallara D., Rhandi A. Global properties of transition probabilities of singular diffusions. — Theory Probab. Appl., 2009, v. 54, № 1, p. 116–148.
14. Spina C. Kernel estimates for a class of Kolmogorov semigroups. — Arch. Math., 2008, v. 91, № 3, p. 265–279.
15. Богачев В. И., Крылов Н. В., Рёкнер М. Эллиптические и параболические уравнения для мер. — Успехи матем. наук, 2009, т. 64, № 6, с. 5–116.

Поступила в редакцию
28.XI.2010