Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Н. Белорусов, Эргодичность многоканальной системы обслуживания с возможностью неприсоединения к очереди, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 1, 145–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:00:10

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2011 г.

БЕЛОРУСОВ Т. Н.*

**ЭРГОДИЧНОСТЬ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ
С ВОЗМОЖНОСТЬЮ НЕПРИСОЕДИНЕНИЯ К ОЧЕРЕДИ**

Устанавливается условие эргодичности системы массового обслуживания типа $G|G|r$ с возможностью неприсоединения к очереди, на вход которой поступает регенерирующий поток. Доказательство основывается на построении мажорирующей системы, вероятности присоединения к которой принимают два значения.

Ключевые слова и фразы: многоканальная система обслуживания, возможность неприсоединения к очереди, регенерирующий поток, эргодичность, стохастическая неограниченность.

1. Введение. Системы массового обслуживания с ограничениями на время ожидания [1]–[3], время пребывания [4], возможность присоединения к очереди [5], [6] давно изучались в теории очередей, что связано с их практической значимостью и важностью возникающих задач. В работе рассматривается система с r одинаковыми приборами и возможностью неприсоединения к очереди. Заявка, поступающая в систему, в которой уже находятся j требований, присоединяется к очереди с вероятностью f_j и уходит с вероятностью $1 - f_j$. Новизна данного исследования состоит в общности предположений относительно вида входного потока. А именно, рассматриваются системы с регенерирующим входным потоком. Заметим, что потоки, обычно используемые в теории массового обслуживания, являются таковыми. Например, марковски модулированный поток [7], дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого представляет собой регенерирующий процесс [8].

Статья имеет следующую структуру. Во втором разделе дается определение регенерирующего потока и вводятся дополнительные обозначения. В третьем разделе приводится подробное описание системы с возможностью неприсоединения к очереди, а также доказывается лемма о мажорировании, которая имеет и самостоятельный интерес. Целью работы является доказательство эргодической теоремы, которое приводится в четвертом разделе. Пятый раздел посвящен следствию и примерам.

2. Определение регенерирующего входного потока. Случайный процесс $\{X(t), t \geq 0\}$, $X(0) = 0$, с неубывающими непрерывными слева траекториями будем называть *случайным потоком*.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991, Москва, Россия; e-mail: timophev.belorusev@gmail.com

Рассмотрим неубывающую последовательность случайных величин $\{\theta_k, k \geq 0\}$, $\theta_0 = 0$. Положим для $k \geq 0$

$$\begin{aligned}\tau_k &= \theta_{k+1} - \theta_k, & \delta_k(t) &= I_{[0, \tau_k]}(t), & x_k(t) &= [X(\theta_k + t) - X(\theta_k)]\delta_k(t), \\ \xi_k &= x_k(\tau_k), & \chi_k(\omega) &= \{x_k(t), \tau_k\}.\end{aligned}$$

О п р е д е л е н и е 1. Случайный поток $X(t)$ называется *регенерирующим*, если последовательность $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных элементов, не зависящих от χ_0 , и $\mathbf{E} \xi_1 < \infty$, $\mathbf{E} \tau_1 < \infty$, $\mathbf{P}(\xi_0 < \infty, \tau_0 < \infty) = 1$.

В силу закона больших чисел такой случайный поток обладает интенсивностью $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t)/t = \mathbf{E} \xi_1 / \mathbf{E} \tau_1$ п.н.

Имея в виду применение теоремы Смита [9], и во избежание чисто технических сложностей предположим, что распределение τ_n при $n \geq 1$ имеет абсолютно непрерывную компоненту.

3. Описание модели и лемма о мажорировании. Рассмотрим систему обслуживания S с r приборами и возможностью неприсоединения к очереди. Вероятности присоединения к очереди задаются последовательностью $\{f_j\}$. Заявка, поступающая в систему, в которой уже находятся j требований, независимо от других заявок присоединяется к системе с вероятностью f_j , а покидает ее с вероятностью $1 - f_j$. Входной поток $X(t)$ является регенерирующим с интенсивностью λ . Времена обслуживания представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $B(x)$ и средним b . Целью настоящей статьи является получение условий эргодичности процессов, описывающих функционирование данной системы. Введем случайный процесс $Q(t)$, обозначающий количество требований в системе в момент t . Введем также процессы $W_i(t)$, $i = 1, \dots, r$, обозначающие время, через которое освободится i приборов от обслуживания требований, пришедших до момента t . Обозначим $W(t) = \sum_{i=1}^r W_i(t)$. Все траектории процессов считаем непрерывными слева.

Рассмотрим две системы массового обслуживания S и $\hat{S}$ типа $G|G|r$ с последовательностями вероятностей отказов $\{f_j\}$ и $\{\hat{f}_j\}$ соответственно, причем для некоторого $k \geq 0$

$$\hat{f}_j = \begin{cases} \alpha_1, & \text{если } j < k; \\ \alpha_2, & \text{если } j \geq k. \end{cases}$$

Случайный процесс $\hat{Q}(t)$ обозначает число требований в системе $\hat{S}$ в момент t .

Лемма 1. Пусть $Q(0) = \hat{Q}(0) = 0$ и $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Если $f_j \leq \hat{f}_j$ при всех $j \geq 0$, то стохастически

$$Q(t) \leq \hat{Q}(t) + r, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Если $f_j \geq \hat{f}_j$ при всех $j \geq 0$, то стохастически

$$\hat{Q}(t) \leq Q(t) + r, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства мы организуем функционирование систем таким образом, что неравенство (1) выполняется для всех траекторий, а стохастические свойства процессов $Q(t)$ и $\hat{Q}(t)$ (т.е. их конечномерных распределений) сохраняются. Подобный подход обычно называют методом одного вероятностного пространства (см., например, [10, с. 123]). Мы используем следующие правила организации работы систем S и $\hat{S}$.

(а) **Правило поступления.** Системы S и $\hat{S}$ работают с одной реализацией входного потока $X(t)$. В момент скачка $X(t)$ требование направляется в обе системы. Обозначим $\{u_n\}$ интервалы между скачками.

(б) **Правило присоединения.** Задана последовательность $\{e_k\}$ независимых случайных величин, равномерно распределенных в $[0, 1]$. Если $Q(u_1 + \dots + u_n) = i$

($\hat{Q}(u_1 + \dots + u_n) = j$) и $f_i \geq e_n$ ($\hat{f}_j \geq e_n$), то n -е требование присоединяется к очереди (или идет на обслуживание, если есть незанятые приборы) в S ($\hat{S}$). В противном случае оно получает отказ.

(с) Правило обслуживания. Заданы две независимые последовательности $\{v_n\}$ и $\{\hat{v}_n\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $B(x)$. Время обслуживания назначается в момент поступления требования на прибор (а не в систему) и выбирается *только* из $\{v_n\}$ для системы S . Два требования в системах S и $\hat{S}$, имеющих одно и то же время обслуживания, соответствующее некоторому элементу из $\{v_n\}$, назовем *дублерами*. Если в системе S есть требование с временем обслуживания, которое не назначалось ни одному клиенту в $\hat{S}$, то данное требование назовем *недублированным* или *недублером*. Осталось определить правило, в соответствии с которым назначается время обслуживания требованиям в $\hat{S}$. Допустим, в момент поступления новой заявки на прибор в $\hat{S}$ в системе S обрабатываются недублированные требования. Тогда этой заявке назначается время обслуживания старшего недублера в S (если заявки поступили в обе системы одновременно, то новое требование в S , естественно еще не дублированное, также принимается в расчет). В противном случае выбирается время из $\{\hat{v}_n\}$. Другими словами, пусть в момент прихода в $\hat{S}$ новой заявки в системе S обрабатываются требования с временами $v_{n_1}, \dots, v_{n_k}$, где $n_1 \leq \dots \leq n_k$, $k \leq r$. Если среди этих требований нет дублеров, то начавшему обслуживанию требованию в $\hat{S}$ назначается время v_{n_1} . Если требования с номерами $n_1, \dots, n_l$, $l < k$, являются дублерами, то новой заявке в $\hat{S}$ назначается время $v_{n_{l+1}}$. Если все требования в S на момент прихода нового клиента в $\hat{S}$ являются дублерами, то начавшему обслуживанию требованию в $\hat{S}$ назначается время из $\{\hat{v}_n\}$.

Обозначим $\zeta(t)$ и $\hat{\zeta}(t)$ число занятых приборов в S и $\hat{S}$ в момент t соответственно, и $\eta(t)$ — количество дублеров в момент t . Траектории процессов полагаем непрерывными слева. Введем процесс

$$Y(t) = (Q(t), \hat{Q}(t), \delta(t)),$$

где

$$\delta(t) = [\zeta(t) - \hat{\zeta}(t)]^+ + \eta(t).$$

Очевидно, что $\delta(t) \leq r$. Введем множество состояний

$$\mathcal{L} = \{(0, j, 0), j \geq 0; (i, j, \delta), i \geq 1, j \geq 0, 0 \leq \delta \leq r \text{ и } i \leq j + \delta\}.$$

Если $Y(t) \in \mathcal{L}$, то в момент t неравенство (1) выполняется. Покажем, что процесс $Y(t)$, попав в множество $\mathcal{L}$, навсегда в нем останется. Пусть $\{t_n, n \geq 1\}$, $t_0 = 0$, — последовательность моментов изменения состояния $Y(t)$. Достаточно установить, что если $Y(t_n) \in \mathcal{L}$, то $Y(t_{n+1}) \in \mathcal{L}$. Ниже представлена таблица, в которой в одной строке с типом события, влекущим перемену состояния $Y(t)$, показаны состояния, в которых может находиться данный процесс с положительной вероятностью, а также возможные переходы из этого состояния. В таблице упоминаются лишь те события, которые могут произойти с положительной вероятностью в непрерывном случае, когда либо интервалы между поступлениями требований $\{u_n\}$, либо времена обслуживания $\{v_n\}$ имеют абсолютно непрерывное распределение. В дискретном случае (распределения $\{u_n\}$ или $\{v_n\}$ содержат дискретную компоненту) события, не вошедшие в приведенную ниже таблицу, можно трактовать как последовательность произошедших последовательно событий. При этом для определенности подразумевается, что все события, которые влекут выход требований из систем, происходят раньше тех, которые описывают присоединение требований.

Событие		Исходное состояние	Новое состояние
Требование приходит только в S	1	(i, j, δ) $0 \leq i < j, 0 \leq \delta \leq r$	$(i + 1, j, \delta)$
Требование приходит только в $\widehat{S}$	2	(i, j, δ) $0 \leq i \leq j, 0 \leq \delta \leq r$	$(i, j + 1, \delta)$ $(i, j + 1, \delta + 1)$
	3	$(i, i - \varepsilon, \delta)$ $0 < \varepsilon \leq \delta \leq \min(i, r)$	$(i, i - \varepsilon + 1, \delta)$
Требование приходит в S и $\widehat{S}$	4	(i, j, δ) $0 \leq i \leq j, 0 \leq \delta \leq r$	$(i + 1, j + 1, \delta)$ $(i + 1, j + 1, \delta + 1)$
	5	$(i, i - \varepsilon, \delta)$ $0 < \varepsilon \leq \delta \leq \min(i, r)$	$(i + 1, i - \varepsilon + 1, \delta)$ $(i + 1, i - \varepsilon + 1, \delta + 1)$
Систему S покидает требование	6	(i, j, δ) $0 < i \leq j, 0 \leq \delta \leq r$	$(i - 1, j, \delta - 1)$ $(i - 1, j, \delta)$
	7	$(i, i - \varepsilon, \delta)$ $0 < \varepsilon < \delta \leq \min(i, r)$	$(i - 1, i - \varepsilon, \delta - 2)$ $(i - 1, i - \varepsilon, \delta - 1)$ $(i - 1, i - \varepsilon, \delta)$
	8	$(i, i - \delta, \delta)$ $0 < \delta \leq r$	$(i - 1, i - \delta, \delta - 1)$ $(i - 1, i - \delta, \delta)$
Систему $\widehat{S}$ покидает требование	9	(i, j, δ) $0 \leq i < j, 0 \leq \delta \leq r$	$(i, j - 1, \delta)$ $(i, j - 1, \delta + 1)$
	10	$(i, i - \varepsilon, \delta)$ $0 \leq \varepsilon \leq \delta \leq \min(i, r)$	$(i, i - \varepsilon - 1, \delta + 1)$
Требования уходят из S и $\widehat{S}$	11	(i, j, δ) $0 < i \leq j, 0 \leq \delta \leq r$	$(i - 1, j - 1, \delta - 1)$ $(i - 1, j - 1, \delta)$
	12	$(i, i - \varepsilon, \delta)$ $0 < \varepsilon < \delta \leq \min(i, r)$	$(i - 1, i - \varepsilon - 1, \delta - 1)$ $(i - 1, i - \varepsilon - 1, \delta)$
	13	$(i, i - \delta, \delta)$ $0 < \delta \leq \min(i - 1, r)$	$(i - 1, i - \delta - 1, \delta)$

Комментарии к строкам таблицы.

1. В силу правила присоединения b данное событие произойдет с положительной вероятностью, только если в момент поступления нового требования t_n процесс $Y(t_n)$ находится в состоянии (i, j, δ) , где $0 \leq i < j, 0 \leq \delta \leq r$. Так как при поступлении требований на обслуживание в S количество дублеров не изменяется, то третья координата процесса $Y(t)$ тоже не изменится после момента t_n . Следовательно, переход будет в $(i + 1, j, \delta) \in \mathcal{L}$.

2. В силу правила обслуживания c в этом случае третья координата процесса $Y(t)$ будет ненулевой только за счет наличия дублеров в системах. Следовательно, если $0 \leq \delta < i \leq j < r$, то в систему $\widehat{S}$ поступит дублер, и $\delta(t)$ увеличится на 1. Однако, если $i = \delta$ или $j \geq r$, то переход будет в $(i, j + 1, \delta)$.

3. При таком положении после присоединения требования в $\widehat{S}$ увеличится лишь вторая координата процесса $Y(t)$. Рассмотрим подробнее следующие варианты. Случай $i - \varepsilon \geq r$ тривиален. Если $i - \varepsilon < r \leq i$ и $i < r$, то, с одной стороны, уменьшится на единицу величина $[\zeta(t) - \widehat{\zeta}(t)]^+$, а с другой стороны — увеличится на единицу количество дублеров, так как в S обязательно будут недублированные требования.

4. По правилу c третья координата процесса $Y(t)$ будет ненулевой только за счет наличия дублеров в системах. Следовательно, если $0 \leq \delta \leq i \leq j < r$, то в систему $\widehat{S}$ поступит дублер, и $\delta(t)$ увеличится на 1. Если $j \geq r$, то переход будет в $(i, j + 1, \delta)$.

5. Рассмотрим несколько случаев. Если $i - \varepsilon \geq r$, то, очевидно, $\delta(t)$ не изменится. Если $i - \varepsilon < r \leq i$, то $\delta(t)$ опять же не изменится, так как, с одной стороны, увеличится

$\hat{\zeta}(t)$ при неизменном $\zeta(t)$, а с другой стороны — увеличится $\eta(t)$ в силу того, что в S обязательно будут недублиры. В случае $i < r$ процесс окажется в состоянии $(i + 1, i - \varepsilon + 1, \delta + 1)$.

6. При таких исходных состояниях процесс $Y(t)$ перейдет в $(i - 1, j, \delta - 1)$, если систему покинул дублер, и в $(i - 1, j, \delta)$ в противном случае.

7. В зависимости от количества требований в S данное событие по-разному влияет на состояние процесса $Y(t)$. Если $i > r$, и систему покинул дублер, то новым состоянием процесса будет $(i - 1, i - \varepsilon, \delta - 1)$. Если $i > r$, однако систему покинул недублер, то переход будет в состояние $(i - 1, i - \varepsilon, \delta)$. Предположим, что $i \leq r$, тогда уход требования из S означает, что $\delta(t)$ уменьшится как минимум на единицу из-за того, что уменьшится $\zeta(t)$ при неизменном $\hat{\zeta}(t)$. Еще на единицу уменьшится $\delta(t)$, если из S вышел дублер. В итоге при $i \leq r$ имеем переходы в $(i - 1, i - \varepsilon, \delta - 2)$ и $(i - 1, i - \varepsilon, \delta - 1)$.

8. Этот случай похож на предыдущий с той лишь разницей, что при $i \leq r$ в системе S не может быть в соответствии с правилом обслуживания c . Следовательно, процесс перейдет при данном условии в состояние $(i - 1, i - \delta, \delta - 1)$.

9. Данное событие с положительной вероятностью произойдет, только если $\delta < r$. Действительно, остаточное время обслуживания дублера в системе S не превосходит остаточного времени обслуживания соответствующего ему требования в $\hat{S}$. Следовательно, если в системе S все заявки продублированы, то требование из $\hat{S}$ не выйдет раньше требования из S . Пусть $j > r$, тогда после освобождения одного из приборов в $\hat{S}$ на обслуживание сразу поступит заявка из очереди. В зависимости от того, является она дублером или нет, будут переходы в состояния $(i, j - 1, \delta)$ и $(i, j - 1, \delta + 1)$ соответственно. Если $j \leq r$, то третья координата процесса не изменится, так как количество дублеров останется прежним.

10. Рассмотрим два варианта. Пусть $i - \varepsilon > r$, тогда после освобождения одного из приборов в $\hat{S}$ на обслуживание сразу поступит требование из очереди. Это требование становится дублером, так как в S обязательно есть недублированные требования. Действительно, если на обслуживании в системе S находятся лишь дублиры, то требование из $\hat{S}$ не покинет систему раньше соответствующего требования из S согласно правилу c . Таким образом, в данном случае будет переход в $(i, i - \varepsilon - 1, \delta + 1)$. Предположим, что $i - \varepsilon \leq r$. Так как после ухода требования из $\hat{S}$ процесс $\hat{\zeta}(t)$ уменьшится на единицу, а $\zeta(t)$ останется неизменным, то переход будет опять же в $(i, i - \varepsilon - 1, \delta + 1)$.

11. В силу соглашения в этом случае системы покидает дублер. Если $i > r$, то сразу после освобождения в обе системы одновременно поступает новое требование, которое обязательно будет дублером. Таким образом, третья координата процесса $Y(t)$ не изменится. Допустим, $i \leq r < j$, тогда в зависимости от того, есть в S недублированные требования или нет, процесс перейдет в $(i - 1, j - 1, \delta - 1)$ или $(i - 1, j - 1, \delta)$ соответственно. Предположим, $j \leq r$, тогда возможен единственный переход в состояние $(i - 1, j - 1, \delta - 1)$.

12. В силу соглашения в этом случае системы покидает дублер. Начнем со случая $i - \varepsilon > r$. Процесс $\delta(t)$ может измениться лишь за счет изменения количества дублеров. Следовательно, $\delta(t)$ не поменяет своего состояния в силу того, что сразу появится новый дублер. Предположим, что $i - \varepsilon \leq r < i$. Тогда в $\hat{S}$ останется незанятым один прибор и $\hat{\zeta}(t)$ уменьшится на единицу при неизменном $\zeta(t)$. Переход будет в состояние с третьей координатой δ . Если $i \leq r$, то переход осуществится в $(i - 1, i - \varepsilon - 1, \delta - 1)$.

13. Данный случай похож на предыдущий с той лишь разницей, что при $i \leq r$ рассматриваемое событие произойдет с нулевой вероятностью, так как в системе не будет дублеров.

Нами были рассмотрены всевозможные переходы процесса $Y(t)$. Из таблицы видно, что они не выводят нас из класса $\mathcal{L}$. Таким образом, неравенство (1) доказано. Доказательство неравенства (2) проводится аналогично, так как фактически

мы пользовались лишь тем, что $f_i \leq \widehat{f}_j$ для любого i при $j < k$, и $f_i \leq \widehat{f}_j$ для $i \geq k$ при $j \geq k$. Лемма доказана.

4. Эргодическая теорема. Мы считаем, что процесс $Q(t)$ эргодичен, если он имеет собственное предельное распределение. Другими словами, для любого $x \in \mathbf{R}$ существует предел:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Q(t) \leq x\} = F_Q(x),$$

и $F_Q(x)$ является функцией распределения. В этом и только в этом случае процессы $W_1(t), \dots, W_r(t), W(t)$ также эргодичны (имеют собственное предельное распределение). Система обслуживания называется эргодичной, если эргодичны процессы $Q(t), W_1(t), \dots, W_r(t), W(t)$.

Теорема. Пусть $f_j > 0, j \geq 0$, тогда система S эргодична, если

$$\lambda b \bar{f} < r, \quad (3)$$

где $\bar{f} = \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j$. Система S не является эргодичной (неэргодична), если

$$\lambda b \underline{f} > r, \quad (4)$$

где $\underline{f} = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j$.

Лемма 2. Предположим, что для некоторого $k \geq 0$ последовательность вероятностей присоединения имеет вид:

$$f_j = \begin{cases} \alpha_1, & \text{если } j < k; \\ \alpha_2, & \text{если } j \geq k, \end{cases}$$

где $\alpha_1 > 0$. Тогда система S эргодична, если

$$\lambda b \alpha_2 < r, \quad (5)$$

и неэргодична, если

$$\lambda b \alpha_2 > r. \quad (6)$$

Доказательство леммы 2. Рассмотрим процессы $W_n = W(\theta_n)$ и $Q_n = Q(\theta_n)$, вложенные в $W(t)$ и $Q(t)$. Вложенные процессы будут регенерирующими с такими моментами регенерации $\{n_k\}$, что $W_{n_k} = 0, Q_{n_k} = 0$. Допустим верно (5), но процессы W_n и Q_n неэргодичны. В силу предположения о наличии у распределения τ_n абсолютно непрерывной компоненты из теоремы Смита следует, что процессы W_n и Q_n стохастически неограничены.

Если $\alpha_1 \leq \alpha_2$, рассмотрим систему $\widehat{S}$, у которой $\widehat{f}_j = \alpha_2$ для любого j . Она будет эргодичной при условии (5), откуда следует, как показано в [11], эргодичность S .

Перейдем к случаю $\alpha_1 > \alpha_2$. Пусть $\{\beta_j^n\}_{j=1}^\infty, n \geq 1$, семейство независимых последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $B(x)$. Обозначим $\{e_j^n\}_{j=1}^\infty, n \geq 1$, семейство независимых последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения 0 или 1 с вероятностями $1 - \alpha_2$ и α_2 соответственно.

Полагаем

$$\gamma_n = \sum_{j=1}^{\xi_n} \beta_j^n, \quad \widehat{\gamma}_n = \sum_{j=1}^{\xi_n} \beta_j^n e_j^n.$$

Введем событие A_n , состоящее в том, что в течение n -го периода регенерации $[\theta_n, \theta_{n+1})$ процесса $X(t)$ число требований в системе не было ниже уровня k . Так как Q_n стохастически неограничен, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_ε , что при $n > N_\varepsilon$ верно

$$\mathbf{P}(\overline{A}_n) < \varepsilon. \quad (7)$$

Справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} W_{n+1} &\leq (W_n - r\tau_n + \hat{\gamma}_n)I(A_n) + ([W_n - r\tau_n]^+ + \gamma_n)I(\bar{A}_n) \\ &\leq (W_n - r\tau_n + \hat{\gamma}_n)I(A_n) + ((W_n - r\tau_n)(1 - I(r\tau_n > W_n)) + \gamma_n)I(\bar{A}_n) \\ &\leq W_n - r\tau_n + \hat{\gamma}_n + r\tau_n I(r\tau_n > W_n)I(\bar{A}_n) + \gamma_n I(\bar{A}_n). \end{aligned}$$

Интегрируя правую и левую части неравенства, получаем

$$\mathbf{E} W_{n+1} \leq \mathbf{E} W_n - r\mathbf{E} \tau_n + \mathbf{E} \hat{\gamma}_n + r\mathbf{E} \tau_n I(r\tau_n > W_n)I(\bar{A}_n) + \mathbf{E} \gamma_n I(\bar{A}_n). \quad (8)$$

Так как математическое ожидание величин γ_n и τ_n конечно и справедливо условие (7) то, каждое из двух последних слагаемых в (8) меньше εC при достаточно больших n , где C — константа, не зависящая от n . Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} W_{n+1} &\leq \mathbf{E} W_n + \mathbf{E} \tau_n \left(\frac{\mathbf{E} \xi_n}{\mathbf{E} \tau_n} b\alpha_2 - r \right) + \varepsilon C \\ &= \mathbf{E} W_n + \mathbf{E} \tau_n (\lambda b\alpha_2 - r) + \varepsilon C < \mathbf{E} W_n, \end{aligned}$$

что противоречит стохастической неограниченности W_n . Следовательно, $W(t)$ и $Q(t)$ стохастически ограничены, а, стало быть, эргодичны.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть выполнено (6). Введем две области $D_1 = [0, k)$, $D_2 = [k, \infty)$. Если $Q_n \in D_2$, то W_n представляет собой случайное блуждание с положительным сносом и с положительной вероятностью δ уходит в $+\infty$. Если $Q_n \in D_1$, то процесс Q_n с положительной вероятностью попадает в область D_2 , откуда с вероятностью δ уходит в $+\infty$. Это означает, что процесс W_n стохастически неограничен, а система S неэргодична. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. Допустим верно (3). Тогда существует такое $\alpha_2 \leq 1$, что $\bar{f} \leq \alpha_2$ и $\lambda b\alpha_2 < r$. Найдём такое k , что $f_j < \alpha_2$ при $j \geq k$. Рассмотрим систему $\hat{S}$, у которой $\hat{f}_j = \alpha_1 = \max_{0 \leq j < k} f_j$ если $j < k$, и $\hat{f}_j = \alpha_2$, если $j \geq k$. Так как $\lambda b\alpha_2 < r$, то $\hat{S}$ эргодична по лемме 2. Следовательно, процессы $\hat{W}$ и $\hat{Q}$ стохастически ограничены. Системы S и $\hat{S}$ удовлетворяют условиям леммы 1. В таком случае верны стохастические неравенства (1), а, следовательно, процессы $W(t)$ и $Q(t)$ также стохастически ограничены. Из теоремы Смита вытекает эргодичность S .

Доказательство условия (4) проводится аналогично. Теорема доказана.

5. Следствие и примеры.

Следствие. Пусть существует предел $f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$. Если $\lambda b f < r$, то система S эргодична. Если $\lambda b f > r$, то система S неэргодична.

В случае $\lambda b f = r$ система S может оказаться как эргодичной, так и неэргодичной, в зависимости от последовательности $\{f_j\}$. Для иллюстрации данного факта рассмотрим одноканальную систему с пуассоновским входным потоком с интенсивностью λ и независимыми показательными временами обслуживания с интенсивностью ν . Как известно [12, с. 36], в этом случае S эргодична тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\nu} \right)^j \prod_{i=0}^{j-1} f_{r-1+i} < \infty. \quad (9)$$

Построим пример эргодичной системы. В описанном случае критерий эргодичности (9) выглядит следующим образом: $\sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} f_j / f < \infty$. Подбирая последовательность следующего вида $f_j = f e^{-\alpha_j}$, $\alpha_j > 0$, $j \geq 0$, приходим к выражению

$$\sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{f_j}{f} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i}. \quad (10)$$

Положим $\alpha_i = 1/(i+1)^s$, $s > 0$, тогда $\alpha_i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Применяя признак Раабе сходимости знакопостоянных рядов, получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} j \left(\frac{a_j}{a_{j+1}} - 1 \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} j \left(e^{\frac{1}{j^s}} - 1 \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} j \left(\frac{1}{j^s} + o\left(\frac{1}{j^s}\right) \right) = +\infty.$$

Ряд (10) сходится, если $s < 1$, и расходится, если $s > 1$. Следовательно, система эргодична при $s < 1$ и неэргодична при $s > 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cohen J. W.* Single server queue with uniformly bounded virtual waiting time. — J. Appl. Probab., 1968, v. 5, № 1, p. 93–122.
2. *Юркевич О. М.* К исследованию многолинейных систем массового обслуживания с ограниченным временем ожидания. — Изв. АН СССР техн. кибернетика, 1970, № 5, с. 50–58.
3. *Морозов Е. В.* Исследование некоторых систем обслуживания с ограниченным ожиданием. — Автоматизир. системы план. расчетов в республ. план. органах, 1977, в. 9, с. 48–57.
4. *Шваб Н. Д.* Виртуальное время ожидания для систем с τ -пребыванием. — Математические модели сложных систем, 1973, с. 206–211.
5. *Natvig B.* On the transient state probabilities for a queueing model where potential customers are discouraged by queue length. — J. Appl. Probab., 1974, v. 11, p. 345–354.
6. *Doorn V.* The transient state probabilities for a queueing model where potential customers are discouraged by queue length. — J. Appl. Probab., 1981, v. 18, p. 499–506.
7. *Asmussen S.* Ladder heights and the Markov-modulated $M|G|1$ queue. — Stochastic Process. Appl., 1991, v. 37, p. 313–326.
8. *Grandell J.* Doubly Stochastic Poisson Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1976, 234 p.
9. *Smith W. L.* Regenerative stochastic processes. — Proc. Roy. Soc., 1955, A 232, p. 6–31.
10. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986, 432 с.
11. *Afanas'eva L. G.* Stochastic boundedness of cyclic queueing systems. — IMS, 1992, v. 59, № 4, p. 869–875.
12. *Афанасьева Л. Г., Булинская Е. В.* Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. М.: изд-во МГУ, 1980, 110 с.

Поступила в редакцию
28.VI.2010

© 2011 г.

БОРИСОВ И. С.*, НИКИТИНА Н. Н.**

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ ТРАЕКТОРИЯМИ ПРОСТЕЙШИХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ И ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА СО СНОСОМ¹⁾

Вычисляется распределение числа пересечений прямолинейной полосы за конечный и бесконечный промежутки времени траекториями

* Институт математики им С. Л. Соболева СО РАН, пр-т Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: sibam@math.nsc.ru

** Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nada187@gorodok.net

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00962, 09-01-00224), а также Министерства образования и науки РФ (код проекта РНП.2.1.1.1379).