Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Борисов, Н. Н. Никитина, Распределение числа пересечений полосы траекториями простейших случайных блужданий и винеровского процесса со сносом, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 1, 152–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4330>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 03:14:03

Положим $\alpha_i = 1/(i+1)^s$, $s > 0$, тогда $\alpha_i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Применяя признак Раабе сходимости знакопостоянных рядов, получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} j \left(\frac{a_j}{a_{j+1}} - 1 \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} j \left(e^{\frac{1}{j^s}} - 1 \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} j \left(\frac{1}{j^s} + o\left(\frac{1}{j^s}\right) \right) = +\infty.$$

Ряд (10) сходится, если $s < 1$, и расходится, если $s > 1$. Следовательно, система эргодична при $s < 1$ и неэргодична при $s > 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cohen J. W.* Single server queue with uniformly bounded virtual waiting time. — J. Appl. Probab., 1968, v. 5, № 1, p. 93–122.
2. *Юркевич О. М.* К исследованию многолинейных систем массового обслуживания с ограниченным временем ожидания. — Изв. АН СССР техн. кибернетика, 1970, № 5, с. 50–58.
3. *Морозов Е. В.* Исследование некоторых систем обслуживания с ограниченным ожиданием. — Автоматизир. системы план. расчетов в республ. план. органах, 1977, в. 9, с. 48–57.
4. *Шваб Н. Д.* Виртуальное время ожидания для систем с τ -пребыванием. — Математические модели сложных систем, 1973, с. 206–211.
5. *Natvig B.* On the transient state probabilities for a queueing model where potential customers are discouraged by queue length. — J. Appl. Probab., 1974, v. 11, p. 345–354.
6. *Doorn V.* The transient state probabilities for a queueing model where potential customers are discouraged by queue length. — J. Appl. Probab., 1981, v. 18, p. 499–506.
7. *Asmussen S.* Ladder heights and the Markov-modulated $M|G|1$ queue. — Stochastic Process. Appl., 1991, v. 37, p. 313–326.
8. *Grandell J.* Doubly Stochastic Poisson Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1976, 234 p.
9. *Smith W. L.* Regenerative stochastic processes. — Proc. Roy. Soc., 1955, A 232, p. 6–31.
10. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986, 432 с.
11. *Afanas'eva L. G.* Stochastic boundedness of cyclic queueing systems. — IMS, 1992, v. 59, № 4, p. 869–875.
12. *Афанасьева Л. Г., Булинская Е. В.* Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. М.: изд-во МГУ, 1980, 110 с.

Поступила в редакцию
28.VI.2010

© 2011 г.

БОРИСОВ И. С.*, НИКИТИНА Н. Н.**

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ ТРАЕКТОРИЯМИ ПРОСТЕЙШИХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ И ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА СО СНОСОМ¹⁾

Вычисляется распределение числа пересечений прямолинейной полосы за конечный и бесконечный промежутки времени траекториями

* Институт математики им С. Л. Соболева СО РАН, пр-т Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: sibam@math.nsc.ru

** Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nada187@gorodok.net

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00962, 09-01-00224), а также Министерства образования и науки РФ (код проекта РНП.2.1.1.1379).

простейшего однородного случайного блуждания с произвольным трех-точечным распределением скачка. С помощью принципа инвариантности Донскера–Прохорова (для случайных блужданий в схеме серий) отсюда выводится аналогичная формула для винеровского процесса со сносом.

Ключевые слова и фразы: простейшие случайные блуждания, винеровский процесс со сносом, распределение числа пересечений полосы, принцип инвариантности Донскера–Прохорова.

1. Распределение числа пересечений полосы для простейших случайных блужданий. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины с одним и тем же распределением, сосредоточенным в точках ± 1 и 0 ; при этом $\mathbf{P}(\xi_1 = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_1 = -1) = q$, $\mathbf{P}(\xi_1 = 0) = h$, где $p + q + h = 1$, $p > 0$, $q > 0$, $h \geq 0$. Обозначим

$$S_0 = 0, \quad S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k, \quad k \geq 1. \quad (1)$$

Изучается распределение числа пересечений полосы

$$r(M, N, n) := \{(x, y): -M \leq y \leq N, 0 \leq x \leq n\},$$

где M , N и n — натуральные числа, на координатной плоскости точек (x, y) траекториями случайного блуждания $\{k, S_k\}_{k=0}^n$.

Введем в рассмотрение случайную величину η_n , равную числу пересечений указанной полосы «сверху вниз» траекторией случайного блуждания за n шагов. В [1] было найдено распределение η_n для случайного блуждания со скачками, принимающими значения ± 1 . Для доказательства применялся довольно громоздкий аналитический аппарат так называемых факторизационных тождеств, связанных с преобразованием Лапласа распределения ξ_1 .

При доказательстве нижеприведенной теоремы использовался метод перестановки фрагментов (приращений) траектории между марковскими моментами последовательного достижения верхнего и нижнего уровней для рассматриваемого случайного блуждания. Для данного простейшего случайного блуждания этот подход по существу является элементарным комбинаторным, что выгодно отличает его от упомянутого метода в [1].

Теорема 1. Для любого натурального k имеет место равенство

$$\mathbf{P}(\eta_n \geq k) = \mathbf{P}\{\exists n_1, n_2: n_1 < n_2 \leq n, S_{n_1} = k(M + N) - M, S_{n_2} = -M\}. \quad (2)$$

Доказательство. Положим $\tau_0 = 0$. Пусть $\tau_1 := \min\{j \leq n: S_j = N\}$ — момент первого достижения (если таковое произошло) верхнего уровня N траекторией случайного процесса $\{S_j; j \leq n\}$. Если пересечения не произошло, полагаем $\tau_1 = \infty$. Далее, пусть τ_2 — момент первого достижения (если оно имело место) уровня $-M$ указанным процессом при $j \in (\tau_1, n]$. Если указанный временной интервал пуст или пересечения нижнего уровня до момента n не произошло, то снова полагаем $\tau_2 = \infty$. Аналогично рекуррентным образом определяется m -я пара случайных величин τ_{2m-1} и τ_{2m} — моментов первого достижения верхнего и нижнего уровней соответственно после пересечения противоположного уровня траекторией процесса $\{S_j; j \leq n\}$. Пара (τ_{2m-1}, τ_{2m}) с собственными марковскими моментами задает координаты m -го пересечения полосы «сверху вниз» траекторией $\{S_j; j \leq n\}$.

Введем в рассмотрение два множества элементарных исходов из (2):

$$A := \{\eta_n \geq k\},$$

$$B := \{\exists n_1, n_2: n_1 < n_2 \leq n, S_{n_1} = (k-1)(M+N) + N, S_{n_2} = -M\}.$$

Мы покажем, что между этими двумя множествами существует взаимно однозначное соответствие, «сохраняющее меру».

В качестве элементарного исхода будем рассматривать вектор $\omega := (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Предположим, что множество A непусто. Зафиксируем произвольный элементарный исход $\omega \in A$. На этом ω все моменты $\{\tau_j; j \leq 2k\}$ не превосходят n . Теперь сопоставим вектору ω новый вектор $\tilde{\omega}$, осуществив следующую перестановку координат ω :

$$\tilde{\omega} = (\xi_1, \dots, \xi_{\tau_1}, \xi_{\tau_2+1}, \dots, \xi_{\tau_3}, \dots, \xi_{\tau_{2k-2}+1}, \dots, \xi_{\tau_{2k-1}}, \\ \xi_{\tau_1+1}, \dots, \xi_{\tau_2}, \xi_{\tau_3+1}, \dots, \xi_{\tau_4}, \dots, \xi_{\tau_{2k-1}+1}, \dots, \xi_{\tau_{2k}}, \xi_{\tau_{2k}+1}, \dots, n).$$

Прежде всего, отметим, что, во-первых, $\tilde{\omega}$ также является элементарным исходом для случайного блуждания (1) и, во-вторых, массы элементарных исходов ω и $\tilde{\omega}$ равны. Заметим также, что $\xi_{\tau_{2j-1}} = 1$ и $\xi_{\tau_{2j}} = -1$ для всех натуральных $j \leq k$.

Далее, стоит отметить, что фрагменты вида $\{\xi_{\tau_{2j}+1}, \dots, \xi_{\tau_{2j+1}}\}$, $j \geq 0$, исходного вектора ω , которые составляют первую «половину» вектора $\tilde{\omega}$, соответствуют частям траектории исходного случайного блуждания при движении «вверх» от уровня $-M$ (сразу после его касания траекторией при движении «вниз») до уровня N . Исключение составляет лишь первый фрагмент траектории (при движении от нулевого уровня до момента первого касания уровня N) — он остается неподвижным после преобразования. Аналогично, фрагменты вида $\{\xi_{\tau_{2j}+1}, \dots, \xi_{\tau_{2j+1}}\}$ из второй «половины» вектора $\tilde{\omega}$ соответствуют частям траектории исходного блуждания, когда траектория идет «вниз» от уровня N до уровня $-M$. Последний фрагмент $\{\xi_{\tau_{2k}+1}, \dots, n\}$, как и упомянутый первый, является неподвижным относительно указанной перестановки, при этом если $\xi_{\tau_{2k}} = n$, то этот фрагмент по определению полагаем пустым множеством.

Иначе говоря, если по элементарному исходу $\tilde{\omega}$ мы построим траекторию блуждания (1), то она, очевидно, будет удовлетворять требованиям события B , что и означает $\tilde{\omega} \in B$. Обратное включение $B \subseteq A$ доказывается аналогично. Сначала мы рассекаем фиксированную траекторию из B в моменты первых касаний уровней $(j-1)(M+N) + N$, $j = 1, \dots, k$, при движении траектории «вверх», а после достижения последнего уровня — при движении «вниз», включая дополнительно еще и момент касания самого низкого уровня $-M$. Затем используем обратную к вышеуказанной перестановку полученных фрагментов траектории, чередуя их по принципу направления движения исходной траектории «вверх-вниз».

Таким образом, установлено, что события A и B находятся во взаимно однозначном соответствии и имеют одинаковые массы. При этом из вышесказанного следует, что эти события могут быть пустыми лишь одновременно. Теорема доказана.

Следствие 1. Обозначим $\gamma = 2k(N+M) - M$. Тогда для всех $k \geq 1$ и $n \geq \gamma$

$$\mathbf{P}(\eta_n \geq k) = \frac{q^M}{(pq)^{k(N+M)}} \sum_{j=\gamma}^{[(n+\gamma)/2]} \sum_{d=0}^{2j-2\gamma} \frac{\gamma(pq)^j h^d}{2j-\gamma} \binom{2j-\gamma}{j} \binom{2j-\gamma+d-1}{d}. \quad (3)$$

Доказательство. Итак, на основании теоремы 1 нам надо вычислить вероятность события B , которую мы представим следующим образом:

$$\mathbf{P}(B) = P_\gamma + \dots + P_n, \quad (4)$$

где P_i — вероятность того, что траектория за i шагов один раз пересечет указанную выше расширенную полосу с верхним уровнем $k(M+N) - M$ и нижним $-M$ (напомним, что всюду в тексте пересечение понимается как пересечение «сверху вниз») и при этом $S_i = -M$, где i — момент первого выхода блуждания на указанный нижний уровень после пересечения верхнего. Пусть r — число положительных скачков, s — число отрицательных скачков и d — число нулевых скачков рассматриваемого случайного блуждания до момента времени i в траектории с описанными выше свойствами. Тогда имеем

$$r + s + d = i, \quad r - s = -M.$$

Задачу с нулевыми скачками можно свести к задаче без нулевых скачков, считая просто, что число шагов блуждания на d меньше. Фиксируя d , получаем

$$r + s = l, \quad r - s = -M, \quad (5)$$

где $l = i - d$. Отсюда, в частности, следует, что траектории, которые за одно и то же число шагов (при фиксированном d) приходят в одну и ту же точку, равновероятны, поскольку по числу шагов случайного блуждания с двучечными скачками ± 1 и его значению на последнем шаге можно однозначно определить количество положительных и отрицательных скачков. За четное (нечетное) число шагов траектория может прийти только в точку с четной (соответственно нечетной) ординатой. Поэтому можно считать, что $l = 2j - \gamma$, $j = \gamma, \dots, [(n + \gamma)/2]$. Тогда $r = j - k(N + M)$, $s = j - k(N + M) + M$; при этом вероятность отдельной такой траектории равна

$$p^r q^s = (pq)^j q^{-k(N+M)-M} p^{-k(N+M)} = \frac{(pq)^j q^M}{(pq)^{k(N+M)}}.$$

Число всех траекторий со скачками ± 1 , приходящих за l шагов впервые в точку $-M$ после пересечения уровня $k(M + N) - M$, вычисляется с помощью классического метода отражения траекторий в момент пересечения ими верхнего уровня. Так что требуемое число совпадает с числом всех траекторий со скачками ± 1 , которые на последнем l -м шаге впервые попадают на уровень $\gamma = 2k(M + N) - 2M + M$. Это число равно (см., например, лемму из [4, гл. VIII, § 30.2])

$$\frac{\gamma}{l} \binom{l}{(l + \gamma)/2} = \frac{\gamma}{2j - \gamma} \binom{2j - \gamma}{j}; \quad (6)$$

здесь $(l + \gamma)/2$ — число отрицательных скачков отраженной траектории, которое вычисляется как решение s системы (5) при замене параметра $-M$ на γ .

Теперь для вычисления вероятности P_i мы должны учесть и нулевые скачки. Отметим, что число таких скачков может меняться от 0 до $l - \gamma = 2j - 2\gamma$, и их мы должны распределить на $l + d - 1$ местах (для нулевых скачков мы исключаем крайнюю правую точку, иначе эта точка не будет моментом первого достижения уровня $-M$ рассматриваемым блужданием). Учитывая это, из (4) окончательно получаем

$$\mathbf{P}(\eta_n \geq k) = \sum_{j=\gamma}^{[(n+\gamma)/2]} \sum_{d=0}^{2j-2\gamma} \frac{\gamma(pq)^j q^M h^d}{(2j - \gamma)(pq)^{k(N+M)}} \binom{2j - \gamma}{j} \binom{2j - \gamma + d - 1}{d},$$

что и требовалось показать.

Следствие 2 (см. [1]). Если $h = 0$, то

$$\mathbf{P}(\eta_n \geq k) = \frac{q^M}{(pq)^{k(N+M)}} \sum_{j=\gamma}^{[(n+\gamma)/2]} \frac{\gamma(pq)^j}{2j - \gamma} \binom{2j - \gamma}{j}.$$

Следствие 3. В обозначениях следствия 1 справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{P}(\eta_n \geq k) = \mathbf{P}\left(\max_{m \leq n} S_m \geq \gamma\right) \left(\frac{q}{p}\right)^{k(N+M)}, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}(\eta_n \geq k) = \mathbf{P}\left(\min_{m \leq n} S_m \leq -\gamma\right) \left(\frac{p}{q}\right)^{k(N+M)-M}. \quad (8)$$

Доказательство. Сначала мы, по существу повторяя аргументацию доказательства следствия 1, выведем формулу (в общем-то хорошо известную) для хвоста распределения максимума рассматриваемых частичных сумм, фигурирующую в (7). В самом деле, аналогично (4) можем представить искомую вероятность как

$$\mathbf{P}\left(\max_{m \leq n} S_m \geq \gamma\right) = \bar{P}_\gamma + \dots + \bar{P}_n, \quad (9)$$

где $\bar{P}_i$ — вероятность достижения уровня γ за i шагов траекторией рассматриваемого простейшего случайного блуждания. Далее, дословно повторяя рассуждения при доказательстве следствия 1, получаем простую систему линейных уравнений для нахождения числа r положительных и числа s отрицательных скачков блуждания за $l = 2j - \gamma$ шагов: $r + s = 2j - \gamma$, $r - s = \gamma$, т.е. $r = j$ и $s = j - \gamma$. Вновь применим формулу (6) (здесь нам не нужно делать никаких зеркальных отражений!). Тогда из (9) получаем

$$\mathbf{P}\left(\max_{m \leq n} S_m \geq \gamma\right) = \sum_{j=\gamma}^{[(n+\gamma)/2]} \sum_{d=0}^{2j-2\gamma} \frac{\gamma p^j q^{j-\gamma} h^d}{2j-\gamma} \binom{2j-\gamma}{j} \binom{2j-\gamma+d-1}{d}.$$

Остается только сравнить последнюю формулу с (3), заметив, что

$$\frac{q^{M+\gamma}}{(pq)^{k(N+M)}} = \left(\frac{q}{p}\right)^{k(N+M)}.$$

Доказательство соотношения (8) совершенно аналогично. Следствие 3 доказано.

Ясно, что если мы будем рассматривать ту же задачу для описанного выше случайного блуждания с *неограниченным временем* (в этом случае можно существенно расширить класс случайных блужданий, см. [1]–[3]), то мы можем воспользоваться известным свойством непрерывности вероятностной меры по классам расширяющихся потоков событий и получить интересующую нас вероятность, просто перейдя к пределу в (7) и (8). При этом надо иметь в виду, что в зависимости от соотношений между p и q рассматриваемое блуждание будет иметь либо положительный, либо отрицательный снос. Соответственно одна из вероятностей в правых частях (7) и (8) при $n \rightarrow \infty$ будет стремиться к единице.

Следствие 4. При $n \rightarrow \infty$ справедливы следующие предельные соотношения:

$$\mathbf{P}(\eta_n \geq k) \rightarrow \mathbf{P}(\eta_\infty \geq k) = \begin{cases} \left(\frac{p}{q}\right)^{k(N+M)-M}, & \text{если } p < q, \\ \left(\frac{q}{p}\right)^{k(N+M)}, & \text{если } p > q. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 1. Хорошо известно, что при $p = q = 1/2$ случайная величина η_∞ будет несобственной.

2. Распределение числа пересечений полосы винеровским процессом со сносом. Пусть $w(t)$, $t \in [0, T]$, — стандартный винеровский процесс, заданный на отрезке $[0, T]$. Рассмотрим так называемый винеровский процесс с линейным сносом $\tilde{w}(t) := w(t) - \beta t$, где $\beta \in \mathbf{R}$. В этом пункте изучается распределение числа пересечений полосы $\{(t, y): t \in [0, T], -a \leq y \leq b\}$, где $-a < 0 < b$, траекториями $\tilde{w}(t)$. Пусть $\eta(T)$ — число пересечений указанной полосы «сверху вниз» (т.е. от уровня $y = b$ до уровня $y = -a$) траекторией $\tilde{w}(t)$ на отрезке $[0, T]$.

В [1] было найдено распределение случайной величины η для стандартного винеровского процесса ($\beta = 0$). При доказательстве применялся метод многократного отражения траектории стандартного винеровского процесса после марковских моментов первого достижения соответствующих уровней (преобразование, сохраняющее меру — распределение стандартного винеровского процесса), который в случае $\beta \neq 0$ перестает работать, поскольку зеркально отраженная относительно горизонтального уровня достижения траектория меняет направление сноса, т.е. происходит искажение первоначального распределения винеровского процесса со сносом.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Для любого натурального k

$$\mathbf{P}(\eta(T) \geq k) = e^{\beta(v_k+a)} \overline{\Phi}\left(\frac{v_k}{\sqrt{T}} + \beta\sqrt{T}\right) + e^{-\beta(v_k-a)} \overline{\Phi}\left(\frac{v_k}{\sqrt{T}} - \beta\sqrt{T}\right), \quad (10)$$

где $\overline{\Phi}(z) := (2\pi)^{-1/2} \int_z^\infty e^{-t^2/2} dt$, $v_k := 2k(a+b) - a$.

Доказательство. Мы докажем формулу (10) в качестве, по существу, еще одного следствия теоремы 1. Рассмотрим схему серий независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_i^{(n)}; i \leq [nT]\}$, принимающих только два значения 1 и -1 с соответствующими вероятностями

$$p := \frac{1 - \beta/\sqrt{n}}{2} \quad \text{и} \quad q := \frac{1 + \beta/\sqrt{n}}{2}; \quad (11)$$

при этом предполагается, что $n > \beta^2$, где β по-прежнему обозначает коэффициент сноса винеровского процесса $\tilde{w}(t)$. Нетрудно проверить, что $\mathbf{E} \xi_1^{(n)} = -\beta/\sqrt{n}$, $\mathbf{D} \xi_1^{(n)} = 1 - \beta^2/n$. Отсюда, в частности, следует, что для любого фиксированного $t \in (0, T]$ при $n \rightarrow \infty$ сумма независимых случайных величин $\{\xi_i^{(n)}; i \leq tn\}$ с классической нормировкой $1/\sqrt{n}$ сходится по распределению к гауссовской случайной величине со средним $-\beta t$ и дисперсией t . Стало быть, и конечномерные распределения процессов частичных сумм на $[0, T]$ (с независимыми приращениями)

$$S_n^{(n)}(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq nt} \xi_i^{(n)} \quad (12)$$

при $n \rightarrow \infty$ будут сходиться к соответствующим конечномерным распределениям винеровского процесса $\tilde{w}(t)$ со сносом. Более того, при $n \rightarrow \infty$ имеет место C -сходимость в пространстве $\mathbf{D}(0, T)$ (см. [5]) распределений случайных процессов $S_n^{(n)}(t)$ к распределению винеровского процесса $\tilde{w}(t)$, поскольку критерий Колмогорова для проверки плотности семейства распределений процессов (12) легко проверяется, скажем, для четвертого момента приращений процесса $S_n^{(n)}(t)$ (здесь удобнее перейти к центрированным величинам), если принять во внимание вид среднего $\mathbf{E} \xi_1^{(n)}$ и дисперсии $\mathbf{D} \xi_1^{(n)}$, а также соотношение

$$\mathbf{E} \left(\xi_1^{(n)} - \mathbf{E} \xi_1^{(n)} \right)^4 = \left(1 - \frac{\beta^2}{n} \right) \left(1 + \frac{3\beta^2}{n} \right).$$

Это означает, что распределение любого измеримого функционала от процесса $S_n^{(n)}(\cdot)$, непрерывного почти всюду на $\mathbf{D}(0, T)$ относительно распределения $\tilde{w}(t)$, с ростом n слабо сходится к распределению этого функционала от винеровского процесса $\tilde{w}(t)$ со сносом. В частности, к таким относится функционал, равный числу пересечений «сверху вниз» на временном отрезке полосы с параллельными прямолинейными границами, а также классические экстремальные функционалы.

Итак, пусть $\eta_{[nT]}$ обозначает число пересечений «сверху вниз» полосы $r(M, N, [nT])$ траекторией случайного блуждания (1) со скачками $\xi_i \equiv \xi_i^{(n)}$, определенными в (11). Далее, для доказательства (10), принимая во внимание свойство непрерывности вероятностной меры в (10) относительно параметров a и b , нам достаточно ограничиться рациональными точками $a = r_1/m$ и $b = r_2/m$, где r_1, r_2 и m — натуральные.

Выберем подпоследовательность натуральных чисел $n \equiv n_j := (mj)^2$, а также зададим целочисленные уровни введенной полосы как $M := amj \equiv a\sqrt{n}$ и $N := bmj \equiv b\sqrt{n}$. Тогда в силу определения (12) формула (7) для исходного случайного блуждания (1) переписется в виде

$$\mathbf{P}(\eta_{[nT]} \geq k) = \mathbf{P}\left(\max_{t \leq T} S_n^{(n)}(t) \geq (2k(a+b) - a)\sqrt{n}\right) \left(\frac{1 + \beta/\sqrt{n}}{1 - \beta/\sqrt{n}}\right)^{k(a+b)\sqrt{n}}. \quad (13)$$

Остается только перейти к пределу в (13) при $n \rightarrow \infty$ (или, точнее, при $j \rightarrow \infty$). Так что из (13) мы получаем представление, аналогичное (7):

$$\mathbf{P}(\eta(T) \geq k) = \mathbf{P}\left(\max_{t \leq T} \tilde{w}(t) \geq v_k\right) e^{\beta(v_k+a)}, \quad (14)$$

где величина $v_k = 2k(a+b) - a$ определена в формулировке теоремы 2. Далее воспользуемся известной формулой для распределений максимума винеровского процесса со сносом, заданного на конечном отрезке (см. [6]):

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} \tilde{w}(t) > y\right) = \bar{\Phi}\left(\frac{y}{\sqrt{T}} + \beta\sqrt{T}\right) + e^{-2\beta y} \bar{\Phi}\left(\frac{y}{\sqrt{T}} - \beta\sqrt{T}\right)$$

при всех $y \geq 0$. Подставляя это выражение при $y = v_k$ в (14), получаем утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 2. Рассмотрим задачу о числе пересечений для винеровского процесса $\tilde{w}(t)$, заданного на положительной полуоси (см. также [1]–[3]). Пусть $\eta(\infty)$ — число пересечений «сверху вниз» определенной выше полосы траекторией процесса $\tilde{w}(t)$ при $t \in [0, \infty)$. С помощью свойства непрерывности вероятностной меры относительно потоков расширяющихся событий получаем из (10) (объединяя два результата при различных знаках β), что

$$\mathbf{P}(\eta(\infty) > k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\eta(T) > k) = e^{a\beta - |\beta|v_k}.$$

З а м е ч а н и е 3. В [1] приведены формулы для числа пересечений $\eta_0(T)$ полосы стандартным винеровским процессом, откуда, в частности, следует, что

$$\mathbf{P}(\eta_0(T) \geq k) = 2 \int_{v_k}^{\infty} \frac{e^{-y^2/(2T)}}{\sqrt{2\pi T}} dy = 2\bar{\Phi}\left(\frac{v_k}{\sqrt{T}}\right),$$

что совпадает с (10) при $\beta = 0$.

Авторы благодарят рецензента, привлечшего их внимание к монографии [6] и сделавшего ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лотов В. И., Орлова Н. Г. О числе пересечений полосы траекториями случайного блуждания. — Матем. сб., 2003, т. 194, № 6, с. 135–146.
2. Androshchuk T. O. Distribution of the number of intersections of a segment by a random walk and the Brownian motion. — Theory Stoch. Process., 2001, v. 7, № 3–4, p. 3–7.
3. Борисов И. С. Замечание о распределении числа пересечений полосы случайным блужданием. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 2, с. 345–349.
4. Хеннекен П. Л., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1974, 472 с.
5. Боровков А. А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980, 381 с.
6. Бородин А. Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. СПб.: Лань, 2000, 639 с.

Поступила в редакцию
30.XII.2008

Исправленный вариант
10.XI.2010