Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. А. Люлько, О распределении времени, проводимого марковской цепью на разных уровнях до момента достижения фиксированного состояния, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 1, 167–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4333>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:10:42

8. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 448 с.
9. Dozzi M. Two-parameter stochastic processes. — Math. Res., 1991, v. 61, p. 17–43.

Поступила в редакцию
29.VII.2008

© 2011 г.

ЛЮЛЬКО Я. А.*

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВРЕМЕНИ, ПРОВОДИМОГО МАРКОВСКОЙ ЦЕПЬЮ НА РАЗНЫХ УРОВНЯХ ДО МОМЕНТА ДОСТИЖЕНИЯ ФИКСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ¹⁾

Данная работа посвящена исследованию вопроса о нахождении распределения времени пребывания однородной марковской цепи $Z = (Z_k)_{k \geq 0}$ (со счетным множеством состояний E) на разных уровнях фазового пространства до момента первого достижения фиксированного состояния $b \in E$.

Работа состоит из двух частей. В первой части с помощью строго марковского свойства показано, что в общем случае распределение времени пребывания будет *геометрическим* (с массой в нуле). В качестве примера рассмотрено скошенное случайное блуждание $S^\alpha = (S_k^\alpha)_{k \geq 0}$ с параметром $\alpha \in [0, 1]$, для которого распределение времени пребывания найдено в явном виде.

Во второй части работы делается предельный переход от времени пребывания скошенного случайного блуждания к локальному времени скошенного броуновского движения $W^\alpha = (W_t^\alpha)_{t \geq 0}$. При этом основным инструментом для предельного перехода служит обобщенный принцип инвариантности Донскера–Прохорова.

Ключевые слова и фразы: марковская цепь, скошенное броуновское движение, локальное время, марковские моменты, принцип инвариантности Донскера–Прохорова.

1. Введение.

1.1. Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и однородная марковская цепь $Z = (Z_k)_{k \geq 0}$ с множеством фазовых состояний $E = \{i_0, i_1, i_2, \dots\}$, начальным распределением $p_0(i) = \mathbf{P}(Z_0 = i)$ и переходными вероятностями $p_{i,j} = \mathbf{P}(Z_n = j \mid Z_{n-1} = i)$, $i, j \in E$. В качестве фильтрации рассмотрим естественную фильтрацию $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \dots, Z_n)$. Для каждого $x \in E$ определим меру $\mathbf{P}_x$ следующим образом: $\mathbf{P}_x(A) = \mathbf{P}(A \mid Z_0 = x)$ для любого $A \in \mathcal{F}$. Положим

$$N_n(a) = \sum_{k=0}^n \mathbb{I}(Z_k = a),$$

где $a \in E$, и пусть $\tau_b = \inf\{k > 0 : Z_k = b\}$ для $b \in E$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: yaroslav.lyulko@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науки.

Рис. 1. Пересечение марковской цепью $(Z_k)_{k \geq 0}$ уровня a .

Мы будем интересоваться вопросом о распределении вероятностей случайной величины $N_{\tau_b}(a)$, которая есть число посещений состояния a марковской цепью Z до момента τ_b первого попадания цепи в состояние b . В теореме 1 п. 2.1 находится распределение $N_{\tau_b}(a)$ в общем виде. Фактически, эта теорема является следствием того, что отрезки марковской цепи между последовательными попаданиями в состояние $a \in E$ не зависят друг от друга.

В качестве примера применения теоремы 1 в п. 2.2 рассматривается скошенное случайное блуждание $S^\alpha = (S_k^\alpha)_{k \geq 0}$, $S_0^\alpha = 0$. Для него находятся все параметры распределения в явном виде. В частности, получаются обобщения ранее известных результатов. Так, в случае симметричного бернуллиевского случайного блуждания известно (см., например, [7, гл. I, § 10, задача 11]), что $\mathbf{E} N_{\tau_0}(a) = 1$ и не зависит от уровня $a > 0$. С помощью теоремы 1 и предложения 1 из п. 2.2 можно показать, что для скошенного случайного блуждания при любом $b < 0$ математическое ожидание $\mathbf{E} N_{\tau_b}(a)$ равно $2\alpha|b|/(1-\alpha)$, т.е. также не зависит от уровня $a > 0$. При этом распределение времени $N_{\tau_b}(a)$ в этом случае все же зависит от a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_{\tau_b}(a) = 0) &= \frac{(1-\alpha)a}{(1-\alpha)a + \alpha|b|}, \\ \mathbf{P}(N_{\tau_b}(a) = k) &= \frac{\alpha(1-\alpha)|b|}{2((1-\alpha)a + \alpha|b|)^2} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1-\alpha}{2((1-\alpha)a + \alpha|b|)}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Скошенное случайное блуждание замечательно тем, что оно аппроксимирует скошенное броуновское движение. В разделе 3 с помощью результатов работ [8], [10] делается предельный переход и устанавливается закон распределения локального времени $L_{\tau_b}^a(W^\alpha)$ скошенного броуновского движения $(W_t^\alpha)_{t \geq 0}$ в точке a до момента первого достижения уровня b . Оказывается, распределение $L_{\tau_b}^a(W^\alpha)$ будет *показательным* (с массой в нуле). В частности, при $b < 0 < a$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(L_{\tau_b}^a(W^\alpha) = 0) &= \mu a, \\ p(x) &= \frac{d\mathbf{P}(L_{\tau_b}^a(W^\alpha) \leq x)}{dx} = \frac{\alpha|b|\mu^2}{2(1-\alpha)} e^{-\mu x/2}, \quad x > 0, \end{aligned}$$

где $\mu = (a + \alpha(1-\alpha)^{-1}|b|)^{-1}$. Заметим, что как и в дискретном случае, $\mathbf{E} L_{\tau_b}^a(W^\alpha) = 2\alpha|b|/(1-\alpha)$.

1.2. Известная теорема Леви утверждает, что броуновское движение $B = (B_t)_{t \geq 0}$ обладает следующим свойством: $(\sup B - B, \sup B) \stackrel{\text{law}}{=} (|B|, L(B))$, где $L(B) = (L_t(B))_{t \geq 0}$ — локальное время в нуле. В работах [3] и [9] устанавливается дискретный аналог теоремы Леви для случайного блуждания $S = (S_k)_{k \geq 0}$ (в [9] основным инструментом доказательства является дискретная версия формулы Ито, а доказательство

в работе [3] основывается на совпадении переходных функций фигурирующих в теореме марковских процессов). А именно, $(\max S - S, \max S) \stackrel{\text{law}}{=} (|S - 1/2| - 1/2, L(S))$, где $L_n(S) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{(S_{i-1} - 1/2)(S_i - 1/2) < 0\}$ – количество пересечений случайным блужданием уровня $1/2$. Процесс $(L_n(S))_{n \geq 0}$ играет для случайного блуждания ту же роль, что и локальное время в нуле для броуновского движения. Поэтому авторы работ [3], [9] называют процесс $L(S)$ аналогом локального времени в дискретном случае.

Однако локальное время $(L_t^a(X))_{t \geq 0}$ непрерывного семимартингала $X = (X_s)_{s \geq 0}$ в точке $a \in \mathbf{R}$ определяется из формулы Танака:

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \text{sign}(X_s - a) dX_s + L_t^a(X), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Если переписать (2) для симметричного случайного блуждания (см., например, [7, гл. I, § 9, задача 3]), то получим

$$|S_k - a| = |S_0 - a| + \sum_{i=1}^k \text{sign}(S_{i-1} - a)(S_i - S_{i-1}) + N_{k-1}(a). \quad (3)$$

Поэтому с этой точки зрения можно считать, что число пересечений $N_k(0)$ уровня 0 служит дискретным аналогом локального времени броуновского движения в нуле. Как будет показано в разделе 3 на примере скошенного броуновского движения, этот подход является более естественным при предельном переходе к локальному времени диффузионных процессов.

Стоит отметить, что существует общая теория локального времени диффузионных процессов со временем жизни ζ , основанная на теоремах Рэя–Найта. С ее помощью, например, в [2, гл. V] найдено распределение локального времени стандартного броуновского движения с линейным сносом до момента первого достижения уровня b . В настоящей работе демонстрируется другой подход, основанный на аппроксимации диффузионных процессов марковскими цепями с дальнейшим предельным переходом, основанным на обобщенном принципе инвариантности.

2. Распределение времени пребывания $N_{\tau_b}(a)$.

2.1. Основная теорема. Распределение времени пребывания $N_{\tau_b}(a)$ произвольной марковской цепи $Z = (Z_k)_{k \geq 0}$ со счетным множеством состояний E устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1. Если $a \in E$ и $b \in E$ ($b \neq a$) таковы, что $\mathbf{P}_a(\tau_a < \tau_b) < 1$, то распределение времени $N_{\tau_b}(a)$ относительно меры $\mathbf{P}_x$ задается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x(N_{\tau_b}(a) = 0) &= 1 - \beta_x, \\ \mathbf{P}_x(N_{\tau_b}(a) = k) &= \beta_x(1 - \beta_a)\beta_a^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\beta_x = \mathbf{P}_x(\tau_a < \tau_b)$ для $x \in E \setminus \{a\}$. В частности, $\mathbf{E}_x N_{\tau_b}(a) = \beta_x / (1 - \beta_a)$.

Доказательство. Заметим, что каждый из моментов τ_b будет марковским относительно естественной фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, но он может не быть конечным $\mathbf{P}_x$ -п.н. Поэтому нужно определить $N_{\tau_b}(a)$ на множестве $\{\omega: \tau_b(\omega) = \infty\}$. Так как последовательность $\{N_n(a)\}_{n \geq 1}$ неубывающая, то положим $N_{\tau_b}(a)(\omega) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}(Z_k(\omega) = a)$ на множестве $\{\omega: \tau_b(\omega) = \infty\}$. Однако в этом случае случайная величина $N_{\tau_b}(a)$ может принимать значение $+\infty$. Покажем, что при выполнении условия $\mathbf{P}_a(\tau_a < \tau_b) < 1$ вероятность события $\{N_{\tau_b}(a) = +\infty\}$ равна нулю относительно меры $\mathbf{P}_x$ для каждого x .

Утверждение 1. 1) Если $\mathbf{P}_a(\tau_a < \tau_b) < 1$, то $\mathbf{P}_x(N_{\tau_b}(a) = +\infty) = 0$ для любого $x \in E$.

2) Если $\mathbf{P}_a(\tau_a < \tau_b) = 1$, то $\mathbf{P}_x(N_{\tau_b}(a) = +\infty) = \mathbf{P}_x(\tau_a < \tau_b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующие моменты: $\tau_a^1 = \tau_a$, $\tau_a^k = \inf\{m > \tau_a^{k-1} : Z_m = a\}$, $k \geq 2$. Тогда $\mathbf{P}_x(N_{\tau_b}(a) = +\infty) = \mathbf{P}_x(\tau_a^k < \tau_b \text{ для всех } k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x(\tau_a^k < \tau_b)$.

Обозначим $r_k(x) = \mathbf{P}_x(\tau_a^k < \tau_b)$. Тогда $r_1(x) = \mathbf{P}_x(\tau_a < \tau_b) = \beta_x$. Докажем по индукции, что

$$r_k(x) = \mathbf{P}_x(\tau_a < \tau_b) [\mathbf{P}_a(\tau_a < \tau_b)]^{k-1} = \beta_x \beta_a^{k-1}. \quad (5)$$

Пусть формула (5) верна для $r_{k-1}(x)$. По определению, $r_k(x) = \mathbf{P}_x(\tau_a^k < \tau_b) = \mathbf{P}_x(\tau_a < \tau_b, \dots, \tau_a^k < \tau_b)$. Если выполнено событие $\{\tau_a < \tau_b\}$, то выполнено и событие $\{\tau_a < \infty\}$. Значит, на множестве $\{\tau_a < \tau_b\}$ определены процесс $\tilde{Z}_n = Z_{n+\tau_a}$ и моменты $\tilde{\tau}_b = \tau_b(\tilde{Z}) = \inf\{k > 0 : \tilde{Z}_k = b\}$, $\tilde{\tau}_a^k = \tau_a^k(\tilde{Z})$. Тогда $\mathbf{P}_x(\tau_a^k < \tau_b) = \mathbf{P}_x(\tau_a < \tau_b, \tilde{\tau}_a < \tilde{\tau}_b, \dots, \tilde{\tau}_a^{k-1} < \tilde{\tau}_b)$. Пользуясь обобщенным строго марковским свойством (см., например, [6, гл. VIII, § 2, теорема 2], [7, с. 328, гл. VIII, § 2, задача 13]), получим $r_k(x) = \mathbf{P}_x(\tau_a < \tau_b, \tilde{\tau}_a < \tilde{\tau}_b, \dots, \tilde{\tau}_a^{k-1} < \tilde{\tau}_b) = \mathbf{P}_x(\tau_a < \tau_b) \mathbf{P}_a(\tau_a < \tau_b, \dots, \tau_a^{k-1} < \tau_b) = \beta_x r_{k-1}(a) = \beta_x \beta_a^{k-1}$.

Отсюда видно, что если $\beta_a < 1$, то $\mathbf{P}_x(N_{\tau_b}(a) = +\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = 0$. Если же $\beta_a = 1$, то $\mathbf{P}_x(N_{\tau_b}(a) = +\infty) = \mathbf{P}_x(\tau_a < \tau_b) = \beta_x$. Утверждение 1 доказано.

Далее будем считать, что $\mathbf{P}_a(\tau_a < \tau_b) < 1$. Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно заметить, что определенная в доказательстве утверждения 1 вероятность $r_k(x)$ равна $\beta_x \beta_a^{k-1} = \mathbf{P}_x(\tau_a^k < \tau_b) = \mathbf{P}_x(N_{\tau_b}(a) \geq k)$, откуда для $k \geq 1$ имеем $\mathbf{P}_x(N_{\tau_b}(a) = k) = \beta_x \beta_a^{k-1} - \beta_x \beta_a^k = \beta_x \beta_a^{k-1} (1 - \beta_a)$. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если $\mathbf{P}_a(\tau_a < \tau_b) = 1$, то в силу утверждения 1 и того, что $\mathbf{P}_x(N_{\tau_b}(a) = 0) = \mathbf{P}_x(\tau_b \leq \tau_a) = 1 - \beta_x$, распределение $N_{\tau_b}(a)$ для любого $x \neq a$ является двуточечным:

$$\mathbf{P}_x(N_{\tau_b}(a) = 0) = 1 - \beta_x, \quad \mathbf{P}_x(N_{\tau_b}(a) = +\infty) = \beta_x.$$

З а м е ч а н и е 2. Случай $x = a$ отличается от рассмотренных в теореме 1 случаев тем, что начальным значением $N_{\tau_b}(a)$ будет 1, а не 0. Вид распределения (4) не изменится.

2.2. Случай скошенного случайного блуждания. Скошенным случайным блужданием с параметром $\alpha \in [0, 1]$ будем называть однородную марковскую цепь $S^\alpha = (S_k^\alpha)_{k \geq 0}$, $S_0^\alpha = 0$, с множеством состояний $\mathbf{Z}$ и переходной функцией

$$p_{i,j} = \mathbf{P}(S_n = j | S_{n-1} = i) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } i = 0, j = 1, \\ 1 - \alpha, & \text{если } i = 0, j = -1, \\ 1/2, & \text{если } i \neq 0, |i - j| = 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рис. 2. Траектория скошенного случайного блуждания $(S_k^\alpha)_{k \geq 0}$.

Применив теорему 1 к данному процессу, получим распределение времени пребывания $N_{\tau_b}(a)$ на уровне a вида (4). Без ограничения общности будем считать, что

$a \geq 0, b \in \mathbf{Z}, b \neq a$. Чтобы получить явный вид распределения, необходимо вычислить параметры β_x и β_a . При этом нужно учесть, что в рассматриваемом случае $x = 0$ и $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$.

Предложение 1. Для скошенного случайного блуждания $(S_k^\alpha)_{k \geq 0}$ параметры $\beta = \beta_0 = \mathbf{P}(\tau_a < \tau_b)$ и $\beta_a = \mathbf{P}_a(\tau_a < \tau_b)$ при $a \geq 0, b \in \mathbf{Z} \setminus \{a\}$ определяются из табл. 1.

Таблица 1

	$b < 0 < a$	$b = 0$	$b > a > 0$	$a = 0 < b$	$a = 0 > b$
β	$\frac{\alpha b }{(1-\alpha)a + \alpha b }$	$\frac{\alpha}{a}$	1	$1 - \frac{\alpha}{b}$	$1 - \frac{1-\alpha}{ b }$
β_a	$1 - \frac{1-\beta}{2a}$	$1 - \frac{1}{2a}$	$1 - \frac{1}{2(b-a)}$	$1 - \frac{\alpha}{b}$	$1 - \frac{1-\alpha}{ b }$

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала самый содержательный случай $b < 0 < a$. Предположим на время, что скошенное случайное блуждание может выходить из любой точки $S_0^\alpha = n$. Введем моменты $\gamma_a = \inf\{k \geq 0: S_k^\alpha = a\}$, $\gamma_b = \inf\{k \geq 0: S_k^\alpha = b\}$ и, пользуясь марковским свойством процесса S^α , составим разностные уравнения для последовательности $f_n = \mathbf{P}_n(\gamma_a < \gamma_b)$, $b \leq n \leq a$. При этом ясно, что полученные уравнения только в точке $n = 0$ будут отличаться от соответствующих уравнений для симметричного случайного блуждания (которые известны, например, из [5, гл. 14, § 2]). Действительно, имеем

$$\begin{cases} f_a = 1, \\ f_n = \frac{1}{2}f_{n-1} + \frac{1}{2}f_{n+1}, & b < n < a, \quad n \neq 0, \\ f_0 = \alpha f_1 + (1-\alpha)f_{-1}, \\ f_b = 0. \end{cases}$$

Решая полученную однородную систему, приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{cases} f_n = 1 + (1-f_0)(n-a)a^{-1}, & 0 < n < a, \\ f_n = -f_0(n-b)b^{-1}, & b < n < 0, \\ f_0 = \alpha f_1 + (1-\alpha)f_{-1}, \end{cases}$$

из которых находим $f_0 = \mathbf{P}(\gamma_a < \gamma_b) = \mathbf{P}(\tau_a < \tau_b)$ и $\beta_a = 1/2 + f_{a-1}/2$.

2) Остальные случаи либо доказываются аналогично предыдущему, либо следуют из уже известных (например, из [5]) результатов для симметричного случайного блуждания. Так, если $b = 0$, то $\beta = \alpha \mathbf{P}_1(\tau_a < \tau_0) = \alpha/a$, так как вероятность $\mathbf{P}_1(\tau_a < \tau_0)$ одна и та же как для симметричного, так и для скошенного случайного блуждания. Из тех же соображений $\beta_a = 1 - 1/(2a)$ при $b = 0$ и $\beta_a = 1 - 1/(2b - 2a)$ при $b > a > 0$. Случай $a = 0, b > 0$ сводится к случаю $b = 0$, а при $a = 0, b < 0$ имеем $\mathbf{P}(\tau_0 < \tau_b) = \mathbf{P}(\tau_0 < \tau_{-b})|_{\alpha \leftrightarrow (1-\alpha)} = 1 - (1-\alpha)/|b|$.

Предложение 1 доказано.

Подставляя значения параметров β и β_a в (4), найдем распределение времени посещения $N_{\tau_b}(a)$ в явном виде. В частности, при $b < 0 < a$ получим (1).

3. Предельный переход к локальному времени $L_{\tau_b}^a(W^\alpha)$ скошенного броуновского движения. Процесс скошенного броуновского движения был впервые введен в книге К. Ито и Г. Маккина [4], а затем подробнее изучен в работах [10] и [11]. Так, в работе [10] показано, что скошенное броуновское движение $W^\alpha = (W_t^\alpha)_{t \geq 0}$ с

параметром $\alpha \in [0, 1]$ является непрерывным семимартингалом, удовлетворяющим стохастическому уравнению

$$X_t = X_0 + B_t + (2\alpha - 1)L_t^0(X),$$

где $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение, $L_t^0(X)$ — локальное время в нуле процесса X . Скошенное броуновское движение с параметром $\alpha = 1/2$ совпадает со стандартным броуновским движением $(B_t)_{t \geq 0}$, а с параметром $\alpha = 1$ — с модулем броуновского движения $(|B_t|)_{t \geq 0}$.

Нас же будет интересовать приближение скошенного броуновского движения и его локального времени процессами с дискретным временем. Так, в работе [10] установлена сходимость по распределению скошенного случайного блуждания $S^\alpha = (S_k^\alpha)_{k \geq 0}$ к скошенному броуновскому движению $W^\alpha = (W_t^\alpha)_{t \geq 0}$, а именно,

$$(n^{-1/2}S_{[nt]}^\alpha, t \geq 0) \xrightarrow{\text{Law}} (W_t^\alpha, t \geq 0) \quad (6)$$

в пространстве Скорохода $D[0, \infty)$. Однако для того, чтобы получить распределение локального времени $L_{\tau_b}(a) = L_{\tau_b}^a(W^\alpha)$ в точке a до момента $\tau_b = \tau_b(W^\alpha)$, сходимости одномерных процессов нам недостаточно. Понадобится обобщение результата (6), полученное в работе [8].

На протяжении всего раздела договоримся использовать одно и то же обозначение τ_b для момента первого выхода на границу как для дискретных, так и для непрерывных процессов. Так, при рассмотрении $N_{\tau_b}(a)$ мы считаем, что $\tau_b = \tau_b(S^\alpha) = \inf\{k > 0: S_k^\alpha = b\}$, а в случае $L_{\tau_b}(a)$ считаем, что $\tau_b = \tau_b(W^\alpha) = \inf\{t \geq 0: W_t^\alpha = b\}$.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 2. *Локальное время $L_{\tau_b}(a) = L_{\tau_b}^a(W^\alpha)$ скошенного броуновского движения $W^\alpha = (W_t^\alpha)_{t \geq 0}$ на уровне $a \geq 0$ до момента первого достижения состояния $b \neq a$ имеет показательное распределение (с массой в нуле), плотность $p(x) = d\mathbf{P}(L_{\tau_b}(a) \leq x)/dx$ которого определяется из табл. 2.*

Таблица 2

	$\mathbf{P}(L_{\tau_b}(a) = 0)$	$p(x), x > 0$	$\mathbf{E} L_{\tau_b}(a)$	μ
$a = 0, b > 0$	0	$\mu e^{-\mu x}$	$b\alpha^{-1}$	αb^{-1}
$a = 0, b < 0$	0	$\mu e^{-\mu x}$	$ b (1 - \alpha)^{-1}$	$(1 - \alpha) b ^{-1}$
$b < 0 < a$	μa	$\frac{\alpha b \mu^2}{2(1 - \alpha)} e^{-\mu x/2}$	$\frac{2\alpha b }{1 - \alpha}$	$\frac{1}{a + \alpha(1 - \alpha)^{-1} b }$
$b > a > 0$	0	$\mu e^{-\mu x}$	$2(b - a)$	$1/(2b - 2a)$

Доказательство. Рассмотрим процессы $X^n = (X_t^n)_{t \geq 0}$ и $Y^n = (Y_t^n)_{t \geq 0}$, определенные следующим образом: в рациональных точках $X_{k/n}^n = n^{-1/2}S_k^\alpha$, $Y_{k/n}^n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^k \text{sign}(X_{(i-1)/n}^n)(S_i^\alpha - S_{i-1}^\alpha)$, $k \in \mathbf{Z}_+$, а траектории $(X_t^n)_{t \geq 0}$ и $(Y_t^n)_{t \geq 0}$ являются ломаными с узлами $(k/n, X_{k/n}^n)$, $(k/n, Y_{k/n}^n)$, $k \geq 0$. В итоге для каждого $n \in \mathbf{N}$ имеем $X_t^n = n^{-1/2}S_{[nt]} + n^{-1/2}(S_{[nt]+1}^\alpha - S_{[nt]}^\alpha)$. Аналогичное выражение можно написать и для Y_t^n .

В работе [8] доказан обобщенный принцип инвариантности, согласно которому

$$(X_t^n, Y_t^n, t \geq 0) \xrightarrow{\text{Law}} \left(W_t^\alpha, \int_0^t \text{sign}(W_s^\alpha) dW_s^\alpha, t \geq 0 \right) \quad (7)$$

при $n \rightarrow \infty$ в пространстве непрерывных функций $C[0, \infty)$. Используя этот результат, установим сходимость числа посещений состояния a к локальному времени скошенного броуновского движения до момента τ_b . Для этого применим дискретную версию

формулы Танака (3) к скошенному случайному блужданию $S^\alpha = (S_k^\alpha)_{k \geq 0}$. Для каждого $a \in \mathbf{Z}_+$ имеем

$$|S_k^\alpha - a| = |S_0^\alpha - a| + \sum_{i=1}^k \text{sign}(S_{i-1}^\alpha - a)(S_i^\alpha - S_{i-1}^\alpha) + \tilde{N}_k(a), \quad (8)$$

где $\tilde{N}_k(a) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{I}(S_i^\alpha = a) = N_{k-1}(a)$. Пусть теперь $a \in \mathbf{R}_+$ — любое неотрицательное число. Сделав замену $a \mapsto \lceil a\sqrt{n} \rceil$, разделив обе части (8) на $\sqrt{n}$ и обозначив $a_n = n^{-1/2} \lceil a\sqrt{n} \rceil$, получим:

$$\begin{aligned} |n^{-1/2} S_k^\alpha - a_n| &= |n^{-1/2} S_0^\alpha - a_n| \\ &+ n^{-1/2} \sum_{i=1}^k \text{sign}(n^{-1/2} S_{i-1}^\alpha - a_n)(S_i^\alpha - S_{i-1}^\alpha) + n^{-1/2} \tilde{N}_k(\lceil a\sqrt{n} \rceil). \end{aligned} \quad (9)$$

Введем новый процесс $(\tilde{N}_t^n(a_n))_{t \geq 0}$ по аналогии с процессами $(X_t^n)_{t \geq 0}$ и $(Y_t^n)_{t \geq 0}$: $\tilde{N}_{k/n}^n(a_n) = n^{-1/2} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{I}(X_{i/n}^n = a_n) = n^{-1/2} N_{k-1}(\lceil a\sqrt{n} \rceil)$, а $\tilde{N}_t^n(a_n)$ является ломаной с узлами $(k/n, \tilde{N}_{k/n}^n(a_n))_{k \geq 0}$. Так как $X_{k/n}^n = n^{-1/2} S_k^\alpha$, то

$$|X_{k/n}^n - a_n| = |X_0^n - a_n| + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^k \text{sign}(X_{(i-1)/n}^n - a_n)(S_i^\alpha - S_{i-1}^\alpha) + \tilde{N}_{k/n}^n(a_n). \quad (10)$$

Обозначим $\hat{X}_t^n = X_t^n - a_n$ и введем кусочно-линейный процесс $(\hat{Y}_t^n)_{t \geq 0}$, значения которого в рациональных точках равны $\hat{Y}_{k/n}^n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^k \text{sign}(\hat{X}_{(i-1)/n}^n)(S_i^\alpha - S_{i-1}^\alpha)$. Тогда (10) можно переписать в следующем виде:

$$|\hat{X}_{k/n}^n| = |\hat{X}_0^n| + \hat{Y}_{k/n}^n + \tilde{N}_{k/n}^n(a_n).$$

Так как процессы $(\hat{X}_t^n)_{t \geq 0}$, $(\hat{Y}_t^n)_{t \geq 0}$, $(\tilde{N}_t^n(a_n))_{t \geq 0}$ определяются значениями в рациональных точках вида $(k/n)_{k \geq 0}$, то для всех $t \geq 0$ имеем

$$\tilde{N}_t^n = |\hat{X}_t^n| - |\hat{X}_0^n| - \hat{Y}_t^n. \quad (11)$$

Из обобщенного принципа инвариантности (7) следует, что

$$(\hat{X}_t^n, \hat{Y}_t^n, t \geq 0) \xrightarrow{\text{Law}} \left(W_t^\alpha - a, \int_0^t \text{sign}(W_s^\alpha - a) dW_s^\alpha, t \geq 0 \right),$$

а это вместе с (11) и формулой Танака (2) влечет слабую сходимость следующих двумерных процессов:

$$(X_t^n, \tilde{N}_t^n(a_n), t \geq 0) \xrightarrow{\text{Law}} (W_t^\alpha, L_t^a(W^\alpha), t \geq 0) \quad (12)$$

при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $C[0, \infty)$. Оказывается, отсюда следует, что

$$\tilde{N}_{\tau_b}^n(a_n) \xrightarrow{d} L_{\tau_b}^a(W^\alpha) \quad (13)$$

для любого $b \in \mathbf{R}$, $b \neq a$.

Действительно, рассмотрим отображение $h: C[0, \infty) \times C[0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, определенное следующим образом: $h(x, y) = y(\tau_b(x))$, где $\tau_b(x) = \inf\{t \geq 0: x(t) = b\}$. Согласно [1, гл. I, § 5, теорема 5.1], достаточно показать, что $\mathbf{P}\{(W^\alpha, L^a(W^\alpha)) \in D_h\} = 0$, где D_h — множество точек разрыва функции h . В нашем случае $D_h = \{(x, y) \in C[0, \infty) \times C[0, \infty): \text{существует } \varepsilon > 0 \text{ такое, что } \max_{0 \leq t \leq \tau_b + \varepsilon} W_t^\alpha = b\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{(W^\alpha, L^a(W^\alpha)) \in D_h\} &= \mathbf{P}\left(\exists \varepsilon > 0: \max_{0 \leq s \leq \tau_b + \varepsilon} W_s^\alpha = b\right) \\ &\leq \mathbf{P}(\exists n: \max_{0 \leq s \leq \tau_b + 1/n} W_s^\alpha = b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P} \left(\max_{0 \leq s \leq \tau_b + 1/n} W_s^\alpha = b, k < \tau_b + \frac{1}{n} \leq k+1 \right) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P} \left(\max_{0 \leq s \leq k} W_s^\alpha = b, k < \tau_b + \frac{1}{n} \leq k+1 \right) = 0,
\end{aligned}$$

так как событие $\{\omega \in \Omega: \max_{0 \leq s \leq k} W_s^\alpha(\omega) = b\}$ имеет нулевую вероятность. Таким образом, условия теоремы для функции $h(x, y)$ выполнены, и мы получаем (13).

Выразим теперь левую часть (13) через время пребывания $N_{\tau_b}(\hat{a})$ скошенного случайного блуждания S^α на некотором уровне $\hat{a}$ до момента первого достижения некоторого уровня $\hat{b}$ (уровни $\hat{a}$ и $\hat{b}$ могут зависеть от n). А именно, покажем, что

$$\frac{1}{\sqrt{n}} N_{\tau_{\lceil b\sqrt{n} \rceil}}(\lceil a\sqrt{n} \rceil) \xrightarrow{d} L_{\tau_b}^a(W^\alpha). \quad (14)$$

В самом деле, в силу того, что процесс $\tilde{N}_t^n$ является кусочно-линейным с $\tilde{N}_{k/n}^n = n^{-1/2} N_{k-1}(\lceil a\sqrt{n} \rceil)$, для него справедливо представление $\tilde{N}_t^n(a_n) = \tilde{N}_{[nt]/n}^n(a_n) + (\tilde{N}_{([nt]+1)/n}^n(a_n) - \tilde{N}_{[nt]/n}^n(a_n))(nt - [nt])$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_t^n(a_n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \mathbb{I}(X_{(i-1)/n}^n = a_n) + \frac{nt - [nt]}{\sqrt{n}} \mathbb{I}(X_{[nt]/n}^n = a_n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[n(t+1/n)]} \mathbb{I}(X_{(i-1)/n}^n = a_n) + \frac{nt - [nt] - 1}{\sqrt{n}} \mathbb{I}(X_{[nt]/n}^n = a_n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} N_{[nt]}(\lceil a\sqrt{n} \rceil) + \gamma_t^n.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\tilde{N}_t^n(a_n) = n^{-1/2} N_{[nt]}(\lceil a\sqrt{n} \rceil) + \gamma_t^n$, где $\sup_{t \geq 0} |\gamma_t^n| \leq 3/\sqrt{n}$. Тогда из теоремы Слуцкого и соотношения (13) получим

$$\frac{1}{\sqrt{n}} N_{[nt]}(\lceil a\sqrt{n} \rceil) \xrightarrow{d} L_{\tau_b}^a(W^\alpha). \quad (15)$$

Из (12) следует, что момент τ_b есть момент первого выхода на уровень b процесса X^n , т.е. $\tau_b = \tau_b(X^n)$. Тогда

$$[n\tau_b(X^n)] = \inf\{k > 0: X_{k/n}^n \geq b\} = \inf\{k > 0: S_k^\alpha = \lceil b\sqrt{n} \rceil\} = \tau_{\lceil b\sqrt{n} \rceil}(S^\alpha),$$

и поэтому (15) есть в точности (14). Тем самым искомая сходимость (14) времени пребывания $n^{-1/2} N_{[nt]}(\lceil a\sqrt{n} \rceil)$ скошенного случайного блуждания $(S_k^\alpha)_{k \geq 0}$ к локальному времени $L_{\tau_b}(a) = L_{\tau_b}^a(W^\alpha)$ скошенного броуновского движения $(W_t^\alpha)_{t \geq 0}$ установлена.

Перейдем теперь к конкретным вычислениям. Так как функция $f(x) = e^{-\lambda x}$ при каждом $\lambda \geq 0$ непрерывна и ограничена на $[0, \infty)$, то из слабой сходимости (14) следует, что

$$F_n(\lambda) = \mathbf{E} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\sqrt{n}} N_{\tau_{\lceil b\sqrt{n} \rceil}}(\lceil a\sqrt{n} \rceil) \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} e^{-\lambda L_{\tau_b}(a)} = F(\lambda) \quad (16)$$

для каждого $a \geq 0$, $b \neq a$.

Из теоремы 1 мы можем найти производящую функцию времени пребывания $N_{\tau_b}(a)$. Она имеет следующий вид:

$$\mathbf{E} s^{N_{\tau_b}(a)} = 1 - \frac{\beta_0(1-s)}{1-s\beta_a}, \quad s \in (0, 1). \quad (17)$$

Делая в (17) замену $s \mapsto \exp\{-\lambda/\sqrt{n}\}$, $a \mapsto \lceil a\sqrt{n} \rceil$, $b \mapsto \lceil b\sqrt{n} \rceil$ и подставляя в производящую функцию найденные в п. 2.2 параметры β_0 и β_a , получим левую

часть (16), а из нее предельным переходом преобразование Лапласа для $L_{\tau_b}(a)$. Результаты, получающиеся при различных значениях параметров a и b , представлены в табл. 3.

Таблица 3

	$F(\lambda)$
$a = 0, b > 0$	$(1 + \lambda b/\alpha)^{-1}$
$a = 0, b < 0$	$(1 + \lambda b /(1 - \alpha))^{-1}$
$b < 0 < a$	$\frac{(1 - \alpha)a}{(1 - \alpha)a + \alpha b } + \frac{\alpha b (1 + 2(a + \alpha(1 - \alpha)^{-1} b)\lambda)^{-1}}{(1 - \alpha)a + \alpha b }$
$b > a > 0$	$(1 + 2\lambda(b - a))^{-1}$

Отсюда следует, что распределение $L_{\tau_b}(a)$ во всех случаях будет показательным (с массой в нуле), плотность которого задается табл. 2.

Проведем подробные вычисления в случае $b < 0 < a$. При других соотношениях на a и b преобразование Лапласа $F(\lambda)$ находится аналогично. Из табл. 1 параметры $\beta_0, \beta_{a\sqrt{n}}$ определяются следующим образом:

$$\beta_0 = \frac{\alpha|b|}{(1 - \alpha)a + \alpha|b|} + o(1), \quad \beta_{a\sqrt{n}} = 1 - \frac{1 - \beta_0}{2a\sqrt{n}} + o(1).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} F_n(\lambda) &= 1 - \left(\frac{\alpha|b|}{(1 - \alpha)a + \alpha|b|} + o(1) \right) \left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \\ &\quad \times \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \left(1 - \frac{1 - \beta_0}{2a\sqrt{n}} + o(1) \right) \right\}^{-1} \\ &= 1 - \left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \frac{\alpha|b|}{(1 - \alpha)a + \alpha|b|} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\lambda + \frac{1 - \beta_0}{2a} + o(1) \right) \right\}^{-1} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{\alpha|b|}{(1 - \alpha)a + \alpha|b|} \lambda \left\{ \lambda + \frac{1}{2(a + \alpha(1 - \alpha)^{-1}|b|)} \right\}^{-1} \\ &= \frac{(1 - \alpha)a}{(1 - \alpha)a + \alpha|b|} + \frac{\alpha|b|}{(1 - \alpha)a + \alpha|b|} \frac{1}{1 + 2(a + \alpha(1 - \alpha)^{-1}|b|)\lambda} \\ &= \mathbf{E} e^{-\lambda L_{\tau_b}(a)} = F(\lambda). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Заметим, что при $\alpha = 1/2$ мы получаем локальное время стандартного броуновского движения $W^{1/2} = B$, для которого распределение $L_{\tau_b}(a)$ известно (см., например, [2]).

Автор выражает признательность своему научному руководителю А. Н. Ширяеву за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
2. Бородин А. Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. СПб.: Лань, 2000, 639 с.

3. Мищенко А. С. Дискретный процесс Бесселя и его свойства. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 4, с. 797–806.
4. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968, 394 с.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. М.: Книжный дом «Либроком», 2010, 528 с.
6. Ширяев А. Н. Вероятность-2. М.: МЦНМО, 2007, 416 с.
7. Ширяев А. Н. Задачи по теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2006, 416 с.
8. Cherny A., Shiryaev A., Yor M. Limit behaviour of the «horizontal-vertical» random walk and some extensions of the Donsker–Prokhorov invariance principle. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 3, с. 498–517.
9. Fujita T. A random walk analogue of Levy's theorem. — Studia Sci. Math. Hungar., 2008, v. 45, № 2, p. 223–233.
10. Harrison J. M., Shepp L. A. On skew Brownian motion. — Ann. Probab., 1981, v. 9, № 2, p. 309–313.
11. Walsh J. B. A diffusion with a discontinuous local time. — Astérisque, 1978, v. 52–53, p. 37–45.

Поступила в редакцию
26.XI.2009

Исправленный вариант
24.XII.2010

© 2011 г.

МУМИНОВ М. С.*

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО УКЛОНЕНИЯ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ФУНКЦИИ РЕГРЕССИИ П.

В работе для неизвестной плотности распределения $f(t)$, $t \in \mathbf{R}^{\nu}$, случайного вектора $X \in \mathbf{R}^{\nu}$ и функции регрессии $r(t) = \mathbf{E}(Y | X = t)$ случайного вектора (X, Y) , $X \in \mathbf{R}^{\nu}$, $Y \in \mathbf{R}^1$, построены непараметрические ядерные оценки $f_n(t)$ и $r_n(t)$ соответственно. Доказано, что распределение максимального отклонения этих оценок от истинных плотности распределения $f(t)$ и функции регрессии $r(t)$ стремится к двойному экспоненциальному закону при $n \rightarrow \infty$. С помощью построенных оценок найдена доверительная область для $f(t)$ и $r(t)$, отвечающая заданному коэффициенту доверия α ($0 < \alpha < 1$), и построен критерий для проверки гипотезы $H_0: f(t) = f_0(t)$ (соответственно $H'_0: r(t) = r_0(t)$), где $f_0(t)$ — заранее заданная плотность распределения вероятностей, $r_0(t)$ — некоторая заданная функция.

Ключевые слова и фразы: последовательность случайных векторов, плотность распределения вероятностей, функция регрессии, непараметрические ядерные оценки, винеровский процесс с многомерным параметром, локальная стационарность случайных полей, доверительная область, проверка статистических гипотез.

* Институт математики и информационных технологий АН РУз, отдел теории вероятностей и математической статистики, ул. Ф. Ходжаева, 29, 100125, Ташкент, Узбекистан; e-mail: m.muhammad@rambler.ru