Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Муминов, О предельном распределении максимального отклонения эмпирической плотности распределения и функции регрессии. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 1, 176–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 05:31:57

3. Мищенко А. С. Дискретный процесс Бесселя и его свойства. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 4, с. 797–806.
4. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968, 394 с.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. М.: Книжный дом «Либроком», 2010, 528 с.
6. Ширяев А. Н. Вероятность-2. М.: МЦНМО, 2007, 416 с.
7. Ширяев А. Н. Задачи по теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2006, 416 с.
8. Cherny A., Shiryaev A., Yor M. Limit behaviour of the «horizontal-vertical» random walk and some extensions of the Donsker–Prokhorov invariance principle. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 3, с. 498–517.
9. Fujita T. A random walk analogue of Levy's theorem. — Studia Sci. Math. Hungar., 2008, v. 45, № 2, p. 223–233.
10. Harrison J. M., Shepp L. A. On skew Brownian motion. — Ann. Probab., 1981, v. 9, № 2, p. 309–313.
11. Walsh J. B. A diffusion with a discontinuous local time. — Astérisque, 1978, v. 52–53, p. 37–45.

Поступила в редакцию
26.XI.2009

Исправленный вариант
24.XII.2010

© 2011 г.

МУМИНОВ М. С.*

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО УКЛОНЕНИЯ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ФУНКЦИИ РЕГРЕССИИ П.

В работе для неизвестной плотности распределения $f(t)$, $t \in \mathbf{R}^{\nu}$, случайного вектора $X \in \mathbf{R}^{\nu}$ и функции регрессии $r(t) = \mathbf{E}(Y | X = t)$ случайного вектора (X, Y) , $X \in \mathbf{R}^{\nu}$, $Y \in \mathbf{R}^1$, построены непараметрические ядерные оценки $f_n(t)$ и $r_n(t)$ соответственно. Доказано, что распределение максимального отклонения этих оценок от истинных плотности распределения $f(t)$ и функции регрессии $r(t)$ стремится к двойному экспоненциальному закону при $n \rightarrow \infty$. С помощью построенных оценок найдена доверительная область для $f(t)$ и $r(t)$, отвечающая заданному коэффициенту доверия α ($0 < \alpha < 1$), и построен критерий для проверки гипотезы $H_0: f(t) = f_0(t)$ (соответственно $H'_0: r(t) = r_0(t)$), где $f_0(t)$ — заранее заданная плотность распределения вероятностей, $r_0(t)$ — некоторая заданная функция.

Ключевые слова и фразы: последовательность случайных векторов, плотность распределения вероятностей, функция регрессии, непараметрические ядерные оценки, винеровский процесс с многомерным параметром, локальная стационарность случайных полей, доверительная область, проверка статистических гипотез.

* Институт математики и информационных технологий АН РУз, отдел теории вероятностей и математической статистики, ул. Ф. Ходжаева, 29, 100125, Ташкент, Узбекистан; e-mail: m.muhammad@rambler.ru

4. Вспомогательные результаты. Здесь мы приведем некоторые вспомогательные утверждения, которые понадобятся при доказательстве теорем, сформулированных в ч. I.

Лемма 4.1 [22]. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность случайных величин с функциями распределения $\Phi_1, \Phi_2, \dots$. Предположим, что $\Phi_n(x)$ слабо сходится к функции распределения $\Phi_0(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots$ — другая последовательность случайных величин такая, что $\eta_n \xrightarrow{P} c = \text{const}$. Положим $X_n = \xi_n + \eta_n$, $Y_n = \xi_n \eta_n$, $Z_n = \xi_n / \eta_n$. Тогда функция распределения величины X_n стремится к $\Phi_0(x - c)$. Кроме того, если $c > 0$, то функция распределения величины Y_n стремится к $\Phi_0(x/c)$, а функция распределения величины Z_n — к $\Phi_0(xc)$.

Лемма 4.2 [21]. Пусть $X(t)$ — дифференцируемое в среднем квадратическом центрированное гауссовское поле, заданное на $\mathbf{R}^\nu$. Рассмотрим гладкий компакт $M^r \subset \mathbf{R}^\nu$, $\dim M^r = r$, где $0 \leq r \leq \nu$. Пусть ковариационная функция $r(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in M^r$, поля $X(t)$ удовлетворяет условию локальной стационарности. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(\max_{M^r} X(t) > x)}{x^r \psi(x) (\sqrt{2\pi})^{-r}} = \int_{M^r} |\det \tilde{D}_s|^{1/2} ds,$$

где $\tilde{D}_s$ — ковариационная матрица проекции градиента поля $X(t)$ на касательное многообразие для M^r в точке s и $\psi(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2}$.

Лемма 4.3 [23]. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — последовательность независимых случайных векторов, равномерно распределенных в ν -мерном кубе $[0, 1]^\nu$, и пусть $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения этих случайных векторов. Тогда можно построить последовательность броуновских мостов $B_n(t)$ такую, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{1 \leq j \leq \nu} \sup_{0 \leq t_j \leq 1} \left| \sqrt{n} \left(F_n(t) - \prod_{i=1}^{\nu} t_i \right) - B_n(t) \right| = O \left(n^{-1/2} \ln n \vee n^{-1/(2\nu)} \sqrt{\ln n} \right)$$

с вероятностью единица.

Введем величину

$$\xi_{n2}^{(1)}(t) = \mathbf{E} \xi_n^{(1)}(t) + \int_{\mathbf{R}^\nu} p_{n,t}(\tau) dw_n(M(\tau)), \quad t \in T, \quad (4.1)$$

где $\xi_n^{(1)}(t)$ определена соотношением (2.1), $\{w_n(t), t \in [0, 1]^\nu\}$ — последовательность винеровских полей с ν -мерным параметром, $M: \mathbf{R}^\nu \rightarrow [0, 1]^\nu$ — преобразование Розенблатта.

Лемма 4.4. Пусть выполнено условие 2.1) и $k_n^* = O(k_n(n^{-1/2} \sqrt{\ln n} \vee n^{-1/(2\nu)}))$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица

$$\sup_{t \in T} \left| \xi_{n2}^{(1)}(t) - \xi_n^{(1)}(t) \right| = O \left(k_n(n^{-1/2} \ln n \vee n^{-1/(2\nu)} \sqrt{\ln n}) \right).$$

Доказательство. Аналогично [20, доказательство леммы 1.1, соотношение (10)] имеем

$$\left| \xi_{n2}^{(1)}(t) - \xi_n^{(1)}(t) \right| \leq C_1 \left(k_n \sup_{\tau^* \in [0, 1]^\nu} \left| B_n(\tau^*) - Z_n(M^{-1}(\tau^*)) \right| + k_n^* |w_n(1, \dots, 1)| \right),$$

где $Z_n(\tau) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (I\{X_i < \tau\} - \mathbf{P}\{X_i < \tau\})$, а $B_n(\tau)$ — последовательность броуновских мостов в $[0, 1]^\nu$.

В силу [24, § 21, лемма 2) с вероятностью единица $|w_n(1, \dots, 1)| = O(\sqrt{\ln n})$. Следовательно, $k_n^* \sqrt{\ln n} = O(k_n(n^{-1/2} \ln n \vee n^{-1/(2\nu)} \sqrt{\ln n}))$. Теперь, применяя лемму 4.3 к величине $\sup_{[0, 1]^\nu} |B_n(\tau^*) - Z_n(M^{-1}(\tau^*))|$, получаем утверждение леммы 4.4.

5. Доказательство основных результатов. Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\xi_n^{(1)}(t)$, $\tilde{\xi}_n^{(1)}(t)$ и $\xi_{n2}^{(1)}(t)$ определены соотношениями (2.1), (2.2) и (4.1) соответственно. Далее, рассмотрим 2^ν независимые копии $W(\tau)$ винеровского процесса с ν -мерным параметром, каждая из которых определена в соответствующей координатной четверти, и пусть

$$\begin{aligned}\xi_{n3}^{(1)}(t) &= \mathbf{E} \xi_n^{(1)}(t) + \int_{\mathbf{R}^\nu} p_{n,t}(\tau) f^{1/2}(\tau) dW(\tau), \\ \xi_{n4}^{(1)}(t) &= \mathbf{E} \xi_n^{(1)}(t) + \int_{\mathbf{R}^\nu} p_{n,t}(\tau) f^{1/2}(t) dW(\tau).\end{aligned}$$

Тогда, учитывая, что $l_n \max_T |\mathbf{E} \xi_n^{(1)}(t)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\tilde{\xi}_n^{(1)}(t) = \mathbf{E} \xi_n^{(1)}(t) + \xi_n^*(t)$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_T(\tilde{\xi}_n^{(1)}, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_T(\xi_n^*, x) = G(x).$$

В свою очередь, поскольку $\xi_{n4}^{(1)}(t) \stackrel{D}{=} \tilde{\xi}_n^{(1)}(t)$ в $(C(T), \mathcal{B}(C(T)))$, то мы получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_T(\xi_{n4}^{(1)}, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_T(\tilde{\xi}_n^{(1)}, x) = G(x).$$

Здесь $C(T)$ — пространство непрерывных функций, определенных в T , с равномерной метрикой, $\mathcal{B}(\cdot)$ — борелевская σ -алгебра, а запись $\xi(t) \stackrel{D}{=} \eta(t)$ означает, что распределения, порожденные $\xi(t)$ и $\eta(t)$ в $(C(T), \mathcal{B}(C(T)))$, совпадают.

С другой стороны, если выполнены условия 2.1)–2.3), то в силу соотношения $\xi_{n3}^{(1)}(t) = \xi_{n4}^{(1)}(t) + (\xi_{n3}^{(1)}(t) - \xi_{n4}^{(1)}(t))$, из леммы 1.3 работы [20] и леммы 4.1 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_T(\xi_{n3}^{(1)}, x) = G(x),$$

если $\delta_n \downarrow 0$, $(l_n \alpha_n)^{-1} \delta_n = w_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Согласно лемме 4.4

$$l_n \max_{t \in T} \left| \xi_n^{(1)}(t) - \xi_{n2}^{(1)}(t) \right| \rightarrow 0,$$

если $(k_n(n^{-1/2} \sqrt{\ln n} \vee n^{-1/(2\nu)}) \vee k_n^*) \sqrt{\ln n} l_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Теперь, учитывая последнее соотношение и то, что $\xi_{n2}^{(1)}(t) \stackrel{D}{=} \xi_{n3}^{(1)}(t)$ в $(C(T), \mathcal{B}(C(T)))$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_T(\xi_n^{(1)}, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_T(\xi_{n2}^{(1)}, x) = G(x).$$

Теорема 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Доказательство теоремы проведем методом сравнения и двойных сумм [25]. Пусть $\rho_n(t, s) = \text{cov}(\xi_n^*(t), \xi_n^*(s))$, $t, s \in T$. Тогда локальная стационарность гауссовского поля $\xi_n^*(t)$ следует из условия 2.5) и соотношения

$$1 - \rho_n(t, s) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^\nu} (\tilde{K}_n(t, \tau) - \tilde{K}_n(s, \tau))^2 d\tau.$$

Далее, единичный ν -мерный куб $T = [0, 1]^\nu$ разобьем на N^ν конгруэнтных непересекающихся ν -мерных кубов с ребрами, параллельными координатным осям и длиной $h = 1/N$, где N определено равенством (2.4). Для этих кубов будем использовать обозначение $T_i = T_{i_1, \dots, i_\nu}$, $i_1, \dots, i_\nu = 1, \dots, N$, $i = (i_1, \dots, i_\nu)$, т.е.

$$T_i = \left[\frac{i_1 - 1}{N}, \frac{i_1}{N} \right] \times \dots \times \left[\frac{i_\nu - 1}{N}, \frac{i_\nu}{N} \right].$$

Введем также обозначения:

$$u_n = l_n + \frac{x}{l_n}, \quad \mathbf{N} = (N, \dots, N), \quad \mathbf{1} = (1, \dots, 1), \quad \tau_n = \frac{\sqrt{\nu \ln N}}{(\ln \ln N)^\gamma},$$

$$I_i = \left[\frac{i_1 - 1}{N} + \frac{1}{N\tau_n}, \frac{i_1}{N} - \frac{1}{N\tau_n} \right] \times \cdots \times \left[\frac{i_\nu - 1}{N} + \frac{1}{N\tau_n}, \frac{i_\nu}{N} - \frac{1}{N\tau_n} \right],$$

$$J_i = T_i \setminus I_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad I = \bigcup_{i=1}^N I_i, \quad J = \bigcup_{j=1}^N J_j,$$

где l_n определено равенством (2.4) и $\gamma > 1/2$. Здесь и в дальнейшем запись $i = 1, \dots, N$ понимается как $i_1, \dots, i_\nu = 1, \dots, N$.

Заметим, что

$$\lambda(J_i) \leq 2\nu\tau_n^{-1}N^{-\nu}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.1)$$

Обозначая $A_I = \{\max_{t \in I} \xi_n^*(t) < u_n\}$, имеем

$$0 \leq \mathbf{P}\left(\max_{t \in I} \xi_n^*(t) < u_n\right) - \mathbf{P}\left(\max_{t \in T} \xi_n^*(t) < u_n\right) \leq \min\{\mathbf{P}(A_I), \mathbf{P}(\bar{A}_J)\}. \quad (5.2)$$

С целью изучения вероятности $\mathbf{P}(A_I) = \mathbf{P}(\max_I \xi_n^*(t) < u_n)$ введем гауссовские поля $Y_n^+(t)$ и $Y_n^-(t)$ следующим образом:

$$\mathbf{E} Y_n^+(t) = \mathbf{E} Y_n^-(t) = 0 \quad \forall t \in T,$$

$$r_n^+(t, s) = \text{cov}(Y_n^+(t), Y_n^+(s)) = 1 - \frac{\|t - s\|^2 q_n^{(1)}}{2(\|i - j\|^2 + 1)},$$

$$r_n^-(t, s) = \text{cov}(Y_n^-(t), Y_n^-(s)) = 1 - \frac{\|t - s\|^2 \hat{q}_n^{(2)}}{2(\|i - j\|^2 + 1)}$$

для $t \in T_i, s \in T_j, i, j = 1, \dots, N$. Здесь $\hat{q}_n^{(2)} = \max_{1 \leq i \leq N} q_n^{(2)}(i, i)$, а $q_n^{(1)}$ и $q_n^{(2)}(i, j)$ определены в п. 2. Тогда для каждого n , не теряя общности, имеем

$$r_n^+(t, s) = 1 - \frac{\|t - s\|^2 q_n^{(1)}}{2}, \quad r_n^-(t, s) = 1 - \frac{\|t - s\|^2 \hat{q}_n^{(2)}}{2}$$

при $\|t - s\| \rightarrow 0$.

Заметим, что

$$\rho_n(t, s) \leq r_n^+(t, s) \quad \forall t \in T, \quad \forall s \in T,$$

$$\rho_n(t, s) \geq r_n^-(t, s) \quad \forall t \in T_i, \quad \forall s \in T_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Сначала докажем, что при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbf{R}^1$

$$\min\{\mathbf{P}(A_I), \mathbf{P}(\bar{A}_J)\} \rightarrow 0. \quad (5.3)$$

Введем следующие обозначения: $\varepsilon_n = \sqrt{2 \ln \ln N}$, $B_n^{(1)} = (-\infty, -l_n^2 - \varepsilon_n l_n]$, $B_n^{(2)} = [-l_n^2 - \varepsilon_n l_n, 0]$, $B_n^{(3)} = [0, \infty)$. Из полуаддитивности вероятностной меры следует, что

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in J} \xi_n^*(t) > u_n\right) \leq \sum_{i=1}^N \mathbf{P}\left(\max_{t \in J_i} \xi_n^*(t) > u_n\right). \quad (5.4)$$

В силу леммы 4.2 и соотношения (5.1), из определения u_n , а также из неравенств $\max_T |\Lambda_{i,i}^{(n)}(t)| h^2 \leq C < \infty$, $1 \leq i \leq \nu$, вытекает, что если $x \in B_n^{(3)}$, то

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in J_i} \xi_n^*(t) > u_n\right) \sim (\sqrt{2\pi})^{-(\nu+1)} u_n^{\nu-1} e^{-u_n^2/2} \Lambda_{J_i}^{(n)} \leq C \tau_n^{-1} N^{-\nu}$$

при $n \rightarrow \infty$, так как детерминант $\Lambda^{(n)}(t)$ ковариационной матрицы проекции градиента $\xi_n^*(t)$ в силу условия 2.4) и оценки $\sup_T \Lambda_{i,i}^{(n)}(t) h^2 \leq C < \infty$ равномерно ограничен, т.е. $\sup_{t \in T} |\Lambda^{(n)}(t)| \leq C N^{2\nu}$. Отсюда и из (4.4) находим, что равномерно по $x \in B_n^{(3)}$

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in J} \xi_n^*(t) > u_n\right) \leq \sum_{i=1}^N \mathbf{P}\left(\max_{t \in J_i} \xi_n^*(t) > u_n\right) \sim \tilde{G}_n, \quad (5.5)$$

где $\tilde{G}_n \leq C/\tau_n$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $x \in B_n^{(1)}$. В этом случае

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_n^{(1)}} \mathbf{P}(A_I) &\leq \sup_{x \in B_n^{(1)}} \mathbf{P}\left(\xi_n^*\left(\frac{1}{2N}\right) < l_n + \frac{x}{l_n}\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\xi_n^*\left(\frac{1}{2N}\right) < -\varepsilon_n\right) \leq \frac{C}{\ln N \sqrt{\ln \ln N}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Пусть $x \in B_n^{(2)}$. Поскольку функция $F_n(x; I) = \mathbf{P}(l_n \max_{t \in I} \xi_n^*(t) - l_n^2 < x)$ не убывает, а функция $1 - F_n(x; I)$ не возрастает и непрерывна слева, то функция $G_n(x) = \min\{F_n(x; I), 1 - F_n(x; J)\}$ достигает своего максимума на концах интервала $B_n^{(2)}$. Поэтому из (5.5) и (5.6) получим

$$\max_{x \in B_n^{(2)}} G_n(x) \leq G_n^*, \quad (5.7)$$

где $G_n^* \sim C/\tau_n$ при $n \rightarrow \infty$. Сравнивая (5.5)–(5.9), получаем соотношение (5.3).

Учитывая (5.2) и (5.5), имеем, что равномерно по $x \in \mathbf{R}^1$

$$\left| \mathbf{P}\left(\max_{t \in T} \xi_n^*(t) < u_n\right) - \mathbf{P}\left(\max_{t \in I} \xi_n^*(t) < u_n\right) \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5.8)$$

Сначала оценим сверху вероятность $\mathbf{P}(\max_{t \in I} \xi_n^*(t) < u_n)$. В силу неравенства Слепяна (см. [26], [27])

$$\mathbf{P}\left(\max_I Y_n^+(t) < u_n\right) \geq \mathbf{P}\left(\max_I \xi_n^*(t) < u_n\right). \quad (5.9)$$

Далее обозначим

$$\begin{aligned} c_\nu &= (\sqrt{2\pi})^{-(\nu+1)}, \quad m_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} h^2 q_n^{(1)}, \quad \alpha_2(t) = \sqrt{2\nu \ln t}, \\ b_2(t) &= \alpha_2(t) + \frac{\ln c_\nu + (\nu-1) \ln \alpha_2(t)}{\alpha_2(t)}, \quad \bar{u}_n = b_2(\sqrt{q_n^{(1)} m_0^{-1}}) + \frac{x}{\alpha_2(\sqrt{q_n^{(1)} m_0^{-1}})}, \\ I_n(\varepsilon) &= [-\varepsilon \ln l_n, l_n^2], \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Тогда из определения u_n и $\bar{u}_n$, а также из того, что $0 < m_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} h^2 q_n^{(1)} < \infty$ следует, что $|\bar{u}_n^2 - u_n^2| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $x \in I_n(\varepsilon)$. Поэтому, согласно лемме 4.2, равномерно по $x \in I_n(\varepsilon)$

$$\left| \mathbf{P}\left(\max_{t \in I} Y_n^+(t) < u_n\right) - \mathbf{P}\left(\max_{t \in I} Y_n^+(t) < \bar{u}_n\right) \right| \rightarrow 0. \quad (5.10)$$

Пусть $M_u^+(S)$ — число локальных максимумов $Y_n^+(t)$, $t \in S$, лежащих выше уровня u . Как и в лемме 2 [18], находим, что при $x \in I_n(\varepsilon)$

$$\mathbf{E} M_{\bar{u}_n}^+(I) = e^{-x} + O\left(\frac{1}{\ln q_n^{(1)}}\right).$$

Отсюда и из теоремы 1 [28] вытекает, что существует C , $0 < C < \infty$, такое, что

$$\sup_{x \in I_n(\varepsilon)} \left| \mathbf{P}\left(\max_{t \in I} Y_n^+(t) < \bar{u}_n\right) - e^{-e^{-x}} \right| \leq \frac{C}{\ln q_n^{(1)}}. \quad (5.11)$$

Собирая вместе (5.8)–(5.11), находим, что равномерно по $x \in I_n(\varepsilon)$

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in I} \xi_n^*(t) < u_n\right) \leq e^{-e^{-x}} + R_n^{(1)}, \quad (5.12)$$

где $R_n^{(1)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Установим оценку снизу для вероятности $\mathbf{P}(\max_I \xi_n^*(t) < u_n)$. Для этого введем следующие обозначения:

$$p_i = \mathbf{P}\left(\max_{t \in I_i} Y_n^-(t) > u_n\right), \quad p_{ij} = \mathbf{P}\left(\max_{t \in I_i} Y_n^-(t) > u_n, \max_{t \in I_j} Y_n^-(t) > u_n\right).$$

Тогда, согласно неравенству Бонферрони,

$$\sum_{i=1}^N p_i - \sum_{i < j} p_{ij} \leq \mathbf{P}\left(\max_{t \in I} Y_n^-(t) > u_n\right) \leq \sum_{i=1}^N p_i. \quad (5.13)$$

Легко видеть, что

$$p_{ij} \leq \mathbf{P}\left(\max_{(t,s) \in I_i \times I_j} (Y_n^-(t) + Y_n^-(s)) > 2u_n\right) = p_{ij}^*,$$

где

$$p_{ij}^* = \mathbf{P}\left\{\max_{(t,s) \in I_i \times I_j} \frac{Y_n^-(t) + Y_n^-(s)}{\sigma_n} > \frac{2u_n}{\sigma_n}\right\}, \quad (5.14)$$

$$\sigma_n^2(t, s) = 2(1 + r_n^-(t, s)),$$

$$\sigma_n^2 = \sigma_n^2(i, j) = \max_{(t,s) \in I_i \times I_j} \sigma_n^2(t, s), \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq \nu.$$

Так как $Y_n^-(t) + Y_n^-(s)$ — гауссовское поле со средним 0 и дисперсией $\sigma_n^2(t, s) = 2(1 + r_n^-(t, s))$, то, согласно лемме 4.2,

$$p_{ij}^* = (\sqrt{2\pi})^{-(2\nu+1)} \left(\frac{2u_n}{\sigma_n}\right)^{2\nu-1} \exp\left\{-\frac{2u_n^2}{\sigma_n^2}\right\} (\hat{q}_n^{(2)})^{\nu/2} \lambda^*(I_i \times I_j)(1 + o(1)). \quad (5.15)$$

Здесь λ^* — лебегова мера в $\mathbf{R}^\nu \times \mathbf{R}^\nu$.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} h^2 \hat{q}_n^{(2)} \geq m > 0$, при $t \in I_i, s \in I_j, i \neq j$, имеем

$$-1 + \frac{C_0(\ln \ln N)^{2\gamma}}{\ln N} \leq r_n^-(t, s) \leq 1 - \frac{2m(\ln \ln N)^{2\gamma}}{\ln N}. \quad (5.16)$$

Из равенства

$$\frac{1}{1 + r_n^-(t, s)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - r_n^-(t, s)}{1 + r_n^-(t, s)}\right)$$

и соотношений (5.14) и (5.16) следует, что

$$\frac{2u_n^2}{\sigma_n^2} \geq \frac{u_n^2}{2} + \frac{m(\ln \ln N)^{2\gamma}}{2(\ln N)} u_n^2.$$

Учитывая последнее соотношение, имеем

$$\exp\left\{-\frac{2u_n^2}{\sigma_n^2}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{u_n^2}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{mu_n^2(\ln \ln N)^{2\gamma}}{2 \ln N}\right\}. \quad (5.17)$$

Из (5.15) и (5.17) получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i < j} p_{ij}^* \leq C_1 \left(\frac{2u_n}{\sigma_n}\right)^{2\nu-1} \sum_{i < j} \lambda^*(I_i \times I_j) \times \exp\left\{-\frac{u_n^2}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{mu_n^2(\ln \ln N)^{2\gamma}}{2 \ln N}\right\}. \quad (5.18)$$

Из оценки (5.18) и определения u_n в силу неравенств $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} h^2 \hat{q}_n^{(2)} \leq 4$ вытекает, что $\sum_{i < j} p_{ij} \leq \sum_{i < j} p_{ij}^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in I_n(\varepsilon)$. Отсюда, учитывая (5.13), получаем, что

$$0 \leq \sum_{i=1}^N p_i - \mathbf{P} \left(\max_{t \in I} Y_n^-(t) > u_n \right) \leq \sum_{i < j} p_{ij} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (5.19)$$

равномерно по $x \in I_n(\varepsilon)$. Снова применяя неравенство Слепяна, находим, что

$$\mathbf{P} \left(\max_{t \in I} \xi_n^*(t) < u_n \right) \geq 1 - \sum_{i=1}^N p_i, \quad (5.20)$$

или

$$\mathbf{P} \left(\max_{t \in I} \xi_n^*(t) < u_n \right) \geq \mathbf{P} \left(\max_{t \in I} Y_n^-(t) < u_n \right) - R_n(x), \quad (5.21)$$

где $|R_n(x)| \leq \sum_{i < j} p_{ij}$ и $|R_n(x)| \rightarrow 0$ для любого $x \in I_n(\varepsilon)$.

Далее, для удобства введем также следующие обозначения:

$$m_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} h^2 \hat{q}_n^{(2)}, \quad \hat{u}_n = b_2(\sqrt{\hat{q}_n^{(2)} m_1^{-1}}) + \frac{x}{\alpha_2(\sqrt{\hat{q}_n^{(2)} m_1^{-1}})}.$$

Аналогично (5.10) устанавливаем, что равномерно по $x \in I_n(\varepsilon)$

$$\left| \mathbf{P} \left(\max_{t \in I} Y_n^-(t) < u_n \right) - \mathbf{P} \left(\max_{t \in I} Y_n^-(t) < \hat{u}_n \right) \right| \rightarrow 0. \quad (5.22)$$

По аналогии с (5.11) находим, что

$$\sup_{x \in I_n(\varepsilon)} \left| \mathbf{P} \left(\max_{t \in I} Y_n^-(t) < \hat{u}_n \right) - e^{-e^{-x}} \right| \leq \frac{C}{\ln \hat{q}_n^{(2)}}. \quad (5.23)$$

Наконец, собирая вместе (5.20)–(5.23), приходим к оценке

$$\mathbf{P} \left(\max_{t \in I} \xi_n^*(t) < \hat{u}_n \right) \geq e^{-e^{-x}} - R_n^{(2)}(x), \quad (5.24)$$

где $R_n^{(2)}(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in I_n(\varepsilon)$.

Теперь из (5.12) и (5.24), а также из (5.10) следует, что

$$e^{-e^{-x}} - R_n^{(3)}(x) \leq \mathbf{P} \left(\max_{t \in I} \xi_n^*(t) < \hat{u}_n \right) \leq e^{-e^{-x}} + R_n^{(3)}(x), \quad (5.25)$$

где $\sup_{x \in I_n(\varepsilon)} |R_n^{(3)}(x)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in I_n(\varepsilon)$.

Далее, рассуждая так же, как в [15, с. 293], находим, что из (5.25), (5.2) и (5.3) следует выполнение равномерно по $x \in \mathbf{R}^1$ соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\max_{t \in T} \xi_n^*(t) < u_n \right) = e^{-e^{-x}}. \quad (5.26)$$

Теорема 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Обозначая

$$A_I^* = \left\{ \max_{t \in I} |\xi_n^*(t)| < u_n \right\},$$

легко устанавливаем неравенство

$$\left| \mathbf{P} \left(\max_{t \in T} |\xi_n^*(t)| < u_n \right) - \mathbf{P} \left(\max_{t \in I} |\xi_n^*(t)| < u_n \right) \right| \leq \min\{\mathbf{P}(A_I^*), \mathbf{P}(\bar{A}_I^*)\}. \quad (5.27)$$

Учитывая, что $\mathbf{P}(\max_{t \in J_i} |\xi_n^*(t)| > u_n) \leq 2\mathbf{P}(\max_{t \in J_i} \xi_n^*(t) > u_n)$, и применяя лемму 4.2 к вероятностям $\mathbf{P}(\max_{t \in J_i} \xi_n^*(t) > u_n)$, аналогично соотношению (5.8) получаем, что при $n \rightarrow \infty$ и $x \in B_n^{(3)}$

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in T} |\xi_n^*(t)| < u_n\right) - \mathbf{P}\left(\max_{t \in I} |\xi_n^*(t)| < u_n\right) \rightarrow 0. \quad (5.28)$$

Напомним, что множества $B_n^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, введены ранее при доказательстве теоремы 2.2. Далее, для $x \in B_n^{(i)}$ соотношение (5.28) устанавливается с помощью (5.27) по аналогии с (5.6) для $i = 1$ и (5.7) для $i = 2$. Теперь, обозначая

$$\tilde{p}_i = \mathbf{P}\left(\max_{t \in I_i} |\xi_n^*(t)| > u_n\right), \quad \tilde{p}_{ij} = \mathbf{P}\left(\max_{t \in I_i} |\xi_n^*(t)| > u_n, \max_{t \in I_j} |\xi_n^*(t)| > u_n\right),$$

а затем применяя неравенство Бонферрони, находим, что

$$\sum_{i=1}^N \tilde{p}_i - \sum_{i < j} \tilde{p}_{ij} \leq \mathbf{P}\left(\max_{t \in I} |\xi_n^*(t)| > u_n\right) \leq \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i. \quad (5.29)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{ij} &= \mathbf{P}\left(\left(\left\{\max_{t \in I_i} \xi_n^*(t) > u_n\right\} \cup \left\{\max_{t \in I_i} (-\xi_n^*(t)) > u_n\right\}\right) \cap \left(\left\{\max_{t \in I_j} \xi_n^*(t) > u_n\right\} \cup \left\{\max_{t \in I_j} (-\xi_n^*(t)) > u_n\right\}\right)\right) \\ &\leq 2\mathbf{P}\left(\max_{(t,s) \in I_i \times I_j} \Delta \xi_n^{(1)}(t,s) > 2u_n\right) + 2\mathbf{P}\left(\max_{(t,s) \in I_i \times I_j} \Delta \xi_n^{(2)}(t,s) > 2u_n\right). \end{aligned}$$

Здесь $\Delta \xi_n^{(1)}(t,s) = \xi_n^*(t) + \xi_n^*(s)$ и $\Delta \xi_n^{(2)}(t,s) = \xi_n^*(t) - \xi_n^*(s)$ — гауссовские поля со средним 0 и дисперсией

$$\mathbf{D}\Delta \xi_n^{(1)}(t,s) = 2(1 + \rho_n(t,s)), \quad \mathbf{D}\Delta \xi_n^{(2)}(t,s) = 2(1 - \rho_n(t,s))$$

соответственно. Используя лемму 4.2, имеем

$$\tilde{p}_{ij} \leq 2\tilde{p}_{ij}^* \sim C \left(\frac{2u_n}{\sigma_n^*}\right)^{2\nu-2} \left(\Lambda_{I_i \times I_j}^{(n)} \exp\left\{-\frac{2u_n^2}{\tilde{\sigma}_n^2}\right\} + \bar{\Lambda}_{I_i \times I_j}^{(n)} \exp\left\{-\frac{2u_n^2}{\tilde{\sigma}_n^2}\right\}\right),$$

где $\tilde{\sigma}_n^2 = \hat{\sigma}_n^2(i,j) = 2 \max_{I_i \times I_j} (1 + \rho_n(t,s))$,

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \tilde{\sigma}_n^2(i,j) = 2 \max_{I_i \times I_j} (1 - \rho_n(t,s)), \quad \sigma_n^* = \min(\sigma_n, \tilde{\sigma}_n),$$

$$\tilde{p}_{ij}^* = \mathbf{P}\left(\max_{I_i \times I_j} \frac{\Delta \xi_n^{(1)}(t,s)}{\sigma_n} > \frac{2u_n}{\sigma_n}\right) + \mathbf{P}\left(\max_{I_i \times I_j} \frac{\Delta \xi_n^{(2)}(t,s)}{\tilde{\sigma}_n} > \frac{2u_n}{\tilde{\sigma}_n}\right),$$

$$\Lambda_{I_i \times I_j}^{(n)} = \int_{I_i \times I_j} \sqrt{|\Lambda^{(n)}(t,s)|} dt ds, \quad \bar{\Lambda}_{I_i \times I_j}^{(n)} = \int_{I_i \times I_j} \sqrt{|\bar{\Lambda}^{(n)}(t,s)|} dt ds,$$

$\Lambda^{(n)}(t,s)$, $\bar{\Lambda}^{(n)}(t,s)$ — детерминанты ковариационных матриц проекций градиентов полей $(\sigma_n)^{-1} \Delta \xi_n^{(k)}(t,s)$, $t \in I_i$, $s \in I_j$, $k = 1, 2$. Если учесть условие 2.7), то легко получаем, что при $t \in I_i$, $s \in I_j$, $i \neq j$, выполнены неравенства

$$-1 + \frac{C_0(\ln \ln N)^{2\gamma}}{\ln N} \leq \rho_n(t,s) \leq 1 - \frac{2m(\ln \ln N)^{2\gamma}}{\ln N}.$$

Отсюда, а также из равенств

$$\frac{1}{1 + \rho_n(t,s)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - \rho_n(t,s)}{1 + \rho_n(t,s)}\right), \quad \frac{1}{1 - \rho_n(t,s)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 + \rho_n(t,s)}{1 - \rho_n(t,s)}\right),$$

следует, что

$$\sum_{i < j} \tilde{p}_{ij}^* \sim C_1 \left(\frac{2u_n}{\sigma_n^*} \right)^{2\nu-2} \left(\sum_{i < j} \left(\Lambda_{I_i \times I_j}^{(n)} + \bar{\Lambda}_{I_i \times I_j}^{(n)} \right) \right) \times \exp \left\{ -\frac{u_n^2}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\tilde{m} u_n^2 (\ln \ln N)^{2\gamma}}{4 \ln N} \right\},$$

где $\tilde{m} = \min(m, C_0/2)$, а C_0 определено в условии 2.7).

Из определения детерминанта порядка $\nu \times \nu$ и неравенства $h^2 \sup_T |\Lambda_{i,i}^{(n)}(t)| \leq C$, $i = 1, \dots, \nu$, следует, что

$$\max \left(\Lambda_{I_i \times I_j}^{(n)}, \bar{\Lambda}_{I_i \times I_j}^{(n)} \right) \leq C N^{-\nu} \left(\frac{\ln N}{(\ln \ln N)^{2\gamma}} \right)^{\nu/2}, \quad i \neq j.$$

Из последних соотношений получаем, что $\sum_{i < j} \tilde{p}_{ij}^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $x \in I_n(\varepsilon)$. Следовательно, в силу (5.28) и $\sum_{i < j} \tilde{p}_{ij} \leq \sum_{i < j} \tilde{p}_{ij}^* \rightarrow 0$,

$$0 \leq \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i - \mathbf{P} \left(\max_{t \in I} |\xi_n^*(t)| > u_n \right) \leq \sum_{i < j} \tilde{p}_{ij} \rightarrow 0 \quad (5.30)$$

равномерно по $x \in I_n(\varepsilon)$ при $n \rightarrow \infty$. Теперь изучим величину $\sum_{i=1}^N \tilde{p}_i$.

Из элементарного равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\max_{t \in I_i} |\xi_n^*(t)| > u_n \right) &= 2\mathbf{P} \left(\max_{t \in I_i} \xi_n^*(t) > u_n \right) \\ &\quad - \mathbf{P} \left(\max_{t \in I_i} \xi_n^*(t) > u_n, \max_{t \in I_i} (-\xi_n^*(t)) > u_n \right) \end{aligned}$$

и соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\max_{t \in I_i} \xi_n^*(t) > u_n, \max_{t \in I_i} (-\xi_n^*(t)) > u_n \right) &\leq \mathbf{P} \left(\max_{(t,s) \in I_i \times I_i} (\xi_n^*(t) - \xi_n^*(s)) > 2u_n \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\max_{(t,s) \in I_i \times I_i} \frac{\Delta \xi_n^{(2)}(t,s)}{\tilde{\sigma}_n} > \frac{2u_n}{\tilde{\sigma}_n} \right) \sim C \bar{\Lambda}_{I_i \times I_i}^{(n)} \left(\frac{2u_n}{\tilde{\sigma}_n} \right)^{2\nu-1} \exp \left\{ -\frac{2u_n^2}{\tilde{\sigma}_n^2} \right\} \end{aligned}$$

и $e^{-x} \leq k!/x^k$, $x > 0$, $k = 1, 2, \dots$, вытекает, что для всех $x \in I_n(\varepsilon)$

$$\sum_{i=1}^N \tilde{p}_i - 2 \sum_{i=1}^N p_i^* \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5.31)$$

Здесь $\tilde{\sigma}_n = 2 \max_{(t,s) \in I_i \times I_i} (1 - \rho_n(t,s))$, $p_i^* = \mathbf{P}(\max_{t \in I_i} \xi_n^*(t) > u_n)$, $i = 1, \dots, N$.

Применяя неравенство Слэпана к величинам $\mathbf{P}(\max_{t \in I_i} \xi_n^*(t) > u_n)$, по аналогии с доказательством предыдущей теоремы имеем

$$P_I(Y_n^-, x) - \bar{R}_n^{(1)}(x) \leq 1 - 2 \sum_{i=1}^N p_i^* \leq P_I(Y_n^+, x) + \bar{R}_n^{(1)}(x), \quad (5.32)$$

где $\sup_{x \in I_n(\varepsilon)} |\bar{R}_n^{(1)}(x)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

По аналогии с (5.11) и (5.23) находим соответственно

$$\sup_{x \in I_n(\varepsilon)} |P_I(Y_n^+, x) - e^{-2e^{-x}}| \leq \frac{C}{\ln \hat{q}_n^{(1)}}, \quad (5.33)$$

$$\sup_{x \in I_n(\varepsilon)} |P_I(Y_n^-, x) - e^{-2e^{-x}}| \leq \frac{C}{\ln \hat{q}_n^{(2)}}. \quad (5.34)$$

Сравнивая (5.27)–(5.34), имеем, что

$$e^{-2e^{-x}} - \overline{R}_n^{(3)}(x) \leq P_T(\xi_n^*, x) \leq e^{-2e^{-x}} + \overline{R}_n^{(3)}(x), \quad (5.35)$$

где $\sup_{x \in I_n(\varepsilon)} |\overline{R}_n^{(3)}(x)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Наконец, поступая так же, как при доказательстве соотношения (5.26), находим, что равномерно по $x \in \mathbf{R}^1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_T(\xi_n^*, x) = e^{-2e^{-x}}.$$

Теорема 2.3 доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Согласно теореме 2.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_T(\xi_n^{(1)}, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_T(\xi_n^*, x).$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 2.3.

Доказательство теоремы 2.1. Доказательство теоремы проведем методом работы [15]. Пусть $\xi_n^{(2)}(t)$, $\xi_{n1}^{(2)}(t)$ и $\xi_n^{(2)}(t)$ определены формулами (2.7)–(2.9) соответственно. Далее, пусть $(X_1, \mathcal{E}_1), \dots, (X_n, \mathcal{E}_n)$ и $(\tilde{X}_1, \tilde{\mathcal{E}}_1), \dots, (\tilde{X}_n, \tilde{\mathcal{E}}_n)$ — последовательности независимых выборок из генеральных совокупностей $(X, \mathcal{E})$ и $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{E}})$ соответственно. Предположим, что случайные векторы $(X, \mathcal{E})$ и $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{E}})$ имеют плотности распределения $g(\tau, \theta)$ и $\tilde{g}(\tau, \theta)$, $\tau \in \mathbf{R}^\nu$, $\theta \in \mathbf{R}^1$ (см. предположение 2.2)). Введем случайные величины (см. [20])

$$\begin{aligned} \xi_{n2}^{(2)}(t) &= m_n(t) \left(1 - \frac{f_n(t)}{f(t)} \right) + \frac{f_n(t)}{f(t)} \xi_{n1}^{(2)}(t) = m_n(t) + \int_{\mathbf{R}^{\nu+1}} p_{n,t}(\tau, \theta) dZ_n(\tau, \theta), \\ \xi_{n3}^{(2)}(t) &= m_n(t) + \int_{\mathbf{R}^{\nu+1}} p_{n,t}(\tau, \theta) d\tilde{Z}_n(\tau, \theta), \\ \xi_{n4}^{(2)}(t) &= m_n(t) + \int_{\mathbf{R}^{\nu+1}} p_{n,t}(\tau, \theta) dw_n(M(\tau, \theta)), \\ \xi_{n5}^{(2)}(t) &= m_n(t) + \int_{\mathbf{R}^{\nu+1}} p_{n,t}(\tau, \theta) g^{1/2}(\tau, \theta) dW(\tau, \theta), \\ \xi_{n6}^{(2)}(t) &= m_n(t) + \int_{\mathbf{R}^{\nu+1}} \left(\frac{f(\tau)V(\tau)}{f(t)V(t)} \right)^{1/2} p_{n,t}(\tau, \theta) g^{1/2}(\tau, \theta) dW(\tau, \theta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Z_n(\tau, \theta) &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (I(X_i < \tau, \mathcal{E}_i < \theta) - \mathbf{P}(X_i < \tau, \mathcal{E}_i < \theta)), \\ \tilde{Z}_n(\tau, \theta) &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (I(\tilde{X}_i < \tau, \tilde{\mathcal{E}}_i < \theta) - \mathbf{P}(\tilde{X}_i < \tau, \tilde{\mathcal{E}}_i < \theta)) \end{aligned}$$

и $W(\tau, \theta)$ суть $2^{\nu+1}$ независимые копии винеровских процессов с многомерным параметром, каждая из которых определена в соответствующей координатной четверти.

Заметим, что по определению

$$\xi_{n2}^{(2)}(t) \stackrel{D}{=} \xi_{n3}^{(2)}(t), \quad \xi_{n4}^{(2)}(t) \stackrel{D}{=} \xi_{n5}^{(2)}(t), \quad \xi_{n6}^{(2)}(t) \stackrel{D}{=} \tilde{\xi}_n^{(2)}(t), \quad (5.36)$$

в $(C(T), \mathcal{B}(C(T)))$.

Из определения величин $\xi_n^{(2)}(t)$, $\xi_{n1}^{(2)}(t)$, $\xi_{n2}^{(2)}(t)$, леммы Бореля–Кантелли и предположения 2.4), а также из леммы 4.1 вытекает, что

$$l_n \xi_n^{(2)}(t) \xrightarrow{D} l_n \xi_{n1}^{(2)}(t), \quad l_n \xi_{n1}^{(2)}(t) \xrightarrow{D} l_n \xi_{n2}^{(2)}(t), \quad (5.37)$$

если $l_n |m_n(t)| n^{-\delta_1/2} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь и в дальнейшем запись $l_n \xi_n(t) \xrightarrow{D} l \eta_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$, означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} P_T(\xi_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_T(\eta_n, x)$.

Аналогично соотношению (10) из [19] получаем

$$l_n \max_{t \in T} \left| \xi_{n3}^{(2)}(t) - \xi_{n4}^{(2)}(t) \right| \leq C \left(\tilde{k}_n l_n \max_{(\tau^*, \theta^*) \in [0,1]^{\nu+1}} |Z_n(M^{-1}(\tau^*, \theta^*)) - B_n(\tau^*, \theta^*)| + \tilde{k}_n^* l_n |w_n(1, \dots, 1)| \right).$$

Применяя лемму 4.3, с учетом соотношения $|w_n(1, \dots, 1)| = O(\sqrt{\ln n})$ (см. [24, § 21]) находим, что

$$l_n \max_{t \in T} \left| \xi_{n3}^{(2)}(t) - \xi_{n4}^{(2)}(t) \right| = O \left(\tilde{k}_n \left(n^{-1/(2\nu+2)} \sqrt{\ln n} \vee \tilde{k}_n^* \right) \sqrt{\ln n} l_n \right).$$

Следовательно,

$$l_n \xi_{n3}^{(2)}(t) \rightarrow l_n \xi_{n4}^{(2)}(t), \quad (5.38)$$

если $\tilde{k}_n(n^{-1/(2\nu+2)} \sqrt{\ln n} \vee \tilde{k}_n^*) \sqrt{\ln n} l_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначая $\Delta\eta(t) = \xi_{n6}^{(2)}(t) - \xi_{n5}^{(2)}(t)$, аналогично лемме 1.3 [20] находим, что

$$\mathbf{P} \left(l_n \sup_{t \in T} |\Delta\eta(t)| > \delta_n \right) \leq 8.2 \sqrt{w_n^{-1} \psi(w_n^{-1/2})} \exp \left\{ -\frac{w_n^2}{2} + 13\sqrt{2} w_n \psi(w_n^{-1/2}) \right\}, \quad (5.39)$$

где $\delta_n \downarrow 0$, $\delta_n(l_n \tilde{\alpha}_n)^{-1} = w_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\psi(w_n^{-1/2}) \leq C w_n^{-1/2} \sqrt{\ln(\alpha_n^{-1} n^{\alpha+\beta} w_n^{1/2})}, \quad 0 < C < \infty,$$

α и β определены в условии 2.3). Из элементарного равенства $\xi_{n5}^{(2)}(t) = \xi_{n6}^{(2)}(t) + (\xi_{n5}^{(2)}(t) - \xi_{n6}^{(2)}(t))$, оценки (5.39) и леммы 4.1 следует, что

$$l_n \xi_{n5}^{(2)}(t) \xrightarrow{D} l_n \xi_{n6}^{(2)}(t), \quad (5.40)$$

когда $\delta_n \downarrow 0$, $w_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Наконец, учитывая соотношения (5.36)–(5.39) и (5.40), получаем, что

$$l_n \xi_n^{(2)}(t) \stackrel{D}{=} l_n \xi_{n1}^{(2)}(t) \rightarrow l_n \xi_{n2}^{(2)}(t) \stackrel{D}{=} l_n \xi_{n3}^{(2)}(t) \rightarrow l_n \xi_{n4}^{(2)}(t) \stackrel{D}{=} l_n \xi_{n5}^{(2)}(t) \xrightarrow{D} l_n \xi_{n6}^{(2)}(t) \stackrel{D}{=} l_n \tilde{\xi}_n^{(2)}(t).$$

Поскольку $l_n \max_{t \in T} |m_n(t)| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ при $n \rightarrow \infty$, то из леммы 4.1 вытекает, что $l_n \tilde{\xi}_n^{(2)}(t) \xrightarrow{D} l_n \xi_n^*(t)$. Теорема 3.1 доказана.

Доказательство теоремы 3.2 вытекает из теоремы 3.1 и теоремы 2.3.

З а м е ч а н и е 5.1. Утверждение леммы 1.1 из [19] справедливо при выполнении дополнительного условия. Этот недостаток исправлен в лемме 4.4 настоящей работы.

З а м е ч а н и е 5.2. В работе автора [6] имеется опечатка: на с. 459 в равенстве

$$-F'_{N,i}(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \sqrt{H_{N,i}(t)} dt$$

двойку справа необходимо заменить единицей с соответствующей коррекцией последующих соотношений на с. 460. В частности, величины ψ_N и u_N будут теперь выглядеть так:

$$\psi_N = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \sqrt{H_{N,i}(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{W_N(t, \tau)}{\sqrt{h}\sigma_n(t)} \right)^2 d\tau} dt,$$

$$u_N = \sqrt{2 \ln \frac{\psi_N}{2\sqrt{\pi}}} + \frac{x}{\sqrt{2 \ln(\psi_N/2\sqrt{\pi})}}.$$

Автор выражает благодарность профессору В. И. Питербаргу за неоднократные полезные обсуждения результатов работы, способствовавшие улучшению ее содержания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов Н. В.* О построении доверительной области для плотности распределения случайной величины. — Докл. АН СССР, 1950, т. 74, № 2, с. 189–191.
2. *Смирнов Н. В.* О приближении плотностей распределения случайных величин. — Уч. зап. МГПИ им. В. П. Потемкина, 1951, т. 16, № 3, с. 69–96.
3. *Смирнов Н. В.* О приближении плотностей распределения случайных величин. — Теория вероятностей и математическая статистика. Избранные труды. М.: Наука, 1970, с. 205–223.
4. *Bickel P. J., Rosenblatt M.* On some global measures of the deviations of density function estimates. — Ann. Statist., 1973, v. 1, № 6, p. 1071–1095.
5. *Rosenblatt M.* On the maximal deviation of k -dimensional density estimates. — Ann. Probab., 1976, v. 4, № 6, p. 1009–1015.
6. *Хашимов Ш. А., Муминов М. С.* О предельном распределении максимального отклонения сплайн-оценок плотности вероятности. — Вероятностные распределения и математическая статистика. Ташкент: Фан, 1986, с. 447–467.
7. *Надарая Э. А.* Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии. Тбилиси, 1983, 195 с.
8. *Johnston G. J.* Probabilities of maximal deviations for nonparametric regression function estimates. — J. Multivariate Anal., 1982, v. 12, № 3, p. 402–414.
9. *Révész P.* On the nonparametric estimation of the regression function. — Problems of Control and Information Theory, 1979, v. 8, № 4, p. 297–302.
10. *Wandl H.* On kernel estimation of regression functions. Wissenschaftliche Sitzungen zur Stochastik, WSS-03, Berlin, 1980.
11. *Liero H.* On the maximal deviation of the kernel regression functions estimate. — Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Statist., 1982, v. 13, № 2, p. 171–182.
12. *Hall P.* On convergence rates of suprema. — Probab. Theory Related Fields, 1991, v. 89, № 4, p. 447–445.
13. *Конаков В. Д., Питербарг В. И.* Скорость сходимости распределений максимальных отклонений гауссовских процессов и эмпирических плотностей. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 4, с. 707–724.
14. *Конаков В. Д., Питербарг В. И.* Скорость сходимости распределений максимальных отклонений гауссовских процессов и эмпирических плотностей. II. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 1, с. 164–169.
15. *Konakov V. D., Piterbarg V. I.* On the convergence rate of maximal deviation distribution for kernel regression estimates. — J. Multivariate Anal., 1984, v. 15, № 3, p. 279–294.
16. *Конаков В. Д.* Уточнение предельных теорем для максимума отклонения непараметрической оценки регрессии. — 3-я Международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов, т. 1, 1981, с. 241–242.
17. *Конаков В. Д.* О максимальных отклонениях эмпирической плотности и регрессии. Некоторые общие методы исследования. — Seminarber. (Humboldt Univ., Berlin), 1983, v. 51, p. 106–125.
18. *Konakov V. D.* On convergence rate of suprema in the presence of nonnegligible trends. Preprint № 103. Berlin: Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, 1994.
19. *Rosenblatt M.* Remarks on a multivariate transformation. — Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, p. 470–472.
20. *Konakov V. D.* Approximations of deviations fields of some nonparametric statistical estimates by Gaussian fields, invariance principles. — Lecture Notes in Math., 1983, v. 1021, p. 302–314.
21. *Михалева Т. Л., Питербарг В. И.* О распределении максимума гауссовского поля с постоянной дисперсией на гладком многообразии. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 2, с. 438–451.
22. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: ИЛ, 1948, 631 с.
23. *Rio E.* Local invariance principles and their application to density estimation. — Probab. Theory Related Fields, 1994, v. 98, № 1, p. 21–45.

24. Ламперти Дж. Вероятность. М.: Наука, 1973, 183 с.
25. Питербарг В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988, 175 с.
26. Slepian D. The one-sided barrier problem for Gaussian noise. — Bell System Tech. J., 1962, v. 41, № 2, p. 463–501.
27. Piterbarg V. I., Stamatovich S. On maximum of Gaussian non-centered fields indexed on smooth manifolds. — Asymptotic Methods in Probability and Statistics with Applications. Ed. by N. Balakrishnan, I. A. Ibragimov, and V. B. Nevzorov. Boston: Birkhäuser, 2001, p. 189–203.
28. Konakov V., Piterbarg V. High level excursions of Gaussian fields and the weakly optimal choice of the smoothing parameter. I. — Math. Methods Statist., 1995, v. 4, № 4, p. 421–434.

Поступила в редакцию
6.V.2009

Исправленный вариант
22.II.2010

© 2011 г.

НАГАЕВ С. В.*

ТЕОРЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ СТЕПЕННЫХ МОМЕНТОВ¹⁾

Доказывается теорема восстановления для случайного блуждания, порожденного последовательностью сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, распределения которых медленно убывают на бесконечности.

В теории восстановления этот случай ранее не рассматривался.

Ключевые слова и фразы: абелева теорема, вероятность восстановления, медленно меняющаяся функция, представление Караматы, разложение Тейлора, рекуррентный процесс, тауберова теорема.

1. Введение. Пусть X — случайная величина, принимающая целые неотрицательные значения с вероятностями $p_n = \mathbf{P}(X = n)$.

Рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимых одинаково распределенных случайных величин, совпадающих по распределению с X . Обозначим $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Вероятность восстановления h_n определяется равенством

$$h_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_k = n), \quad n \geq 0, \quad (1.1)$$

если положить $S_0 = 0$. На языке анализа

$$h_n = C_n \left(\frac{1}{1 - f(z)} \right), \quad (1.2)$$

где $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$. Символ C_n означает n -й коэффициент в разложении Тейлора.

* Институт математики им. С.Л.Соболева, пр-т Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev@math.nsc.ru, nagaevs@hotmail.com, nagaevs@academ.org

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00048-а).