Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, Теорема восстановления при отсутствии степенных моментов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 1, 188–197

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4335>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 18:04:14

24. Ламперти Дж. Вероятность. М.: Наука, 1973, 183 с.
25. Питербарг В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988, 175 с.
26. Slepian D. The one-sided barrier problem for Gaussian noise. — Bell System Tech. J., 1962, v. 41, № 2, p. 463–501.
27. Piterbarg V. I., Stamatovich S. On maximum of Gaussian non-centered fields indexed on smooth manifolds. — Asymptotic Methods in Probability and Statistics with Applications. Ed. by N. Balakrishnan, I. A. Ibragimov, and V. B. Nevzorov. Boston: Birkhäuser, 2001, p. 189–203.
28. Konakov V., Piterbarg V. High level excursions of Gaussian fields and the weakly optimal choice of the smoothing parameter. I. — Math. Methods Statist., 1995, v. 4, № 4, p. 421–434.

Поступила в редакцию
6.V.2009

Исправленный вариант
22.II.2010

© 2011 г.

НАГАЕВ С. В.*

ТЕОРЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ СТЕПЕННЫХ МОМЕНТОВ¹⁾

Доказывается теорема восстановления для случайного блуждания, порожденного последовательностью сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, распределения которых медленно убывают на бесконечности.

В теории восстановления этот случай ранее не рассматривался.

Ключевые слова и фразы: абелева теорема, вероятность восстановления, медленно меняющаяся функция, представление Караматы, разложение Тейлора, рекуррентный процесс, тауберова теорема.

1. Введение. Пусть X — случайная величина, принимающая целые неотрицательные значения с вероятностями $p_n = \mathbf{P}(X = n)$.

Рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимых одинаково распределенных случайных величин, совпадающих по распределению с X . Обозначим $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Вероятность восстановления h_n определяется равенством

$$h_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_k = n), \quad n \geq 0, \quad (1.1)$$

если положить $S_0 = 0$. На языке анализа

$$h_n = C_n \left(\frac{1}{1 - f(z)} \right), \quad (1.2)$$

где $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$. Символ C_n означает n -й коэффициент в разложении Тейлора.

* Институт математики им. С.Л.Соболева, пр-т Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev@math.nsc.ru, nagaevs@hotmail.com, nagaevs@academ.org

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00048-а).

Согласно классической теории восстановления имеет место альтернатива:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \begin{cases} (\mathbf{E} X)^{-1}, & \text{если } \mathbf{E} X < \infty, \\ 0, & \text{если } \mathbf{E} X = \infty \end{cases}$$

(см., например, [1]–[3]).

Естественно, в случае $\mathbf{E} X = \infty$ возникает задача связать скорость убывания h_n со скоростью убывания $\mathbf{P}(X > n)$. А. Гарсия и Дж. Ламперти [6] доказали, что если

$$\mathbf{P}(X > n) \sim \frac{L(n)}{n^\alpha}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1, \quad (1.3)$$

где $L(n)$ — медленно меняющаяся функция, то

$$h_n \sim \frac{c(\alpha)}{n^{1-\alpha} L(n)}, \quad (1.4)$$

где $c(\alpha) = \pi^{-1} \sin \pi \alpha$.

Отношение $a_n \sim b_n$ здесь и ниже означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$.

Пусть $\alpha = 1/2$. Тогда $n^{1-\alpha} = n^\alpha$. Следовательно,

$$\frac{c(\alpha)}{n^{1-\alpha} L(n)} = o(\mathbf{P}(X > n)),$$

если $\lim_{n \rightarrow \infty} L(n) = \infty$. В этом случае не исключено, что для некоторой последовательности $n_k \rightarrow \infty$

$$\frac{c(\alpha)}{n_k^{1-\alpha} L(n_k)} = o(\mathbf{P}(X = n_k)).$$

Действительно, пусть $F_1(x)$ — любая функция распределения, сосредоточенная на множестве целых неотрицательных чисел и удовлетворяющая условию

$$1 - F_1(x) \sim \frac{\ln x}{x^{1/2}}.$$

Далее, пусть $F_2(x)$ — ступенчатая функция распределения со скачками величины $x_k^{-1/2}$ в точках $x_k = 2^k$. Нетрудно видеть, что

$$1 - F_2(x_k) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} x_k^{-1/2}.$$

Положим $F(x) = (F_1(x) + F_2(x))/2$. Нетрудно показать, что при $x \rightarrow \infty$

$$1 - F(x) \sim \frac{\ln x}{2x^{1/2}}.$$

Кроме того, $F(x_k+) - F(x_k) > (F_2(x_k+) - F_2(x_k))/2 \sim x_k^{-1/2}/2$. Если случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$, определенную выше, то

$$\frac{2c(1/2)}{x_k^{1/2} \ln x_k} = o(\mathbf{P}(X = x_k)).$$

Это означает, в силу (1.1), что асимптотическое равенство

$$h_n \sim \frac{2c(\alpha)}{n^{1/2} \ln n}$$

не может выполняться. Приведенный контрпример является модификацией примера 5-A из работы [7].

В случае $0 < \alpha < 1/2$ нетрудно построить аналогичные контрпримеры. В качестве $F_1(x)$ нужно взять функцию, удовлетворяющую условию $1 - F_1(n) \sim L(n)/n^\alpha$, а $F_2(x)$ можно оставить прежней.

Таким образом, условие (1.3) при $0 < \alpha \leq 1/2$ недостаточно для (1.4). Нужны еще какие-то ограничения на флуктуации вероятностей p_n . Одно из условий такого рода было предложено в [5], а именно,

$$p_{n+1}p_{n-1} > p_n^2, \quad (1.5)$$

т.е. последовательность $\ln p_n$ является выпуклой. Заметим прежде всего, что (1.5) можно записать в виде $p_{n-1}/p_n > p_n/p_{n+1}$. Таким образом, последовательность p_n/p_{n+1} не возрастает, и, следовательно, существует конечный предел $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n/p_{n+1}$. Если $p_{n_0}p_{n_0+1}^{-1} < \rho < 1$ при некотором n_0 , то $p_np_{n+1}^{-1} < \rho$ для всех $n > n_0$. Следовательно, $p_n > \rho^{n_0-n}$, что невозможно. Значит, $p_np_{n-1}^{-1} > 1$ для всех n . Отсюда, в частности, следует, что $\lambda \geq 1$.

Если $\lambda > 1$, то $p_n < \lambda^{-n}$, но это невозможно, если выполнено условие (1.3).

Таким образом, если одновременно выполнены условия (1.3) и (1.5), то $\lambda = 1$. Заметим также, что последовательность p_n убывает, поскольку, как мы показали выше, $p_n/p_{n+1} > 1$.

В [7] доказано (см. следствие 3-A), что (1.4) имеет место при $0 < \alpha < 1/2$, если выполняется (1.3) и $p_n \geq p_{n+1}$, начиная с некоторого значения n . Мы покажем ниже (см. п. 4), что при этом условии

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n n^{\alpha+1} L^{-1}(n) = \alpha. \quad (1.6)$$

Соотношение (1.4) выводится в [6] посредством прямого асимптотического анализа интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} (1 - f(t))^{-1} dt,$$

который по определению равен правой части формулы (1.2). В [7] рассматривается более общий случай блуждания в d -мерном пространстве, $d \geq 1$. При этом используется локальная теорема Рвачевой [8].

В настоящей работе исследуется крайний случай, когда $\mathbf{P}(X > n)$ медленно меняется. Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 1.1. Пусть

$$p_n \sim l(n)n^{-1}, \quad (1.7)$$

где $l(x)$ медленно меняется при $x \rightarrow \infty$. Тогда

$$h_n \sim \frac{\mathbf{P}(X = n)}{[\mathbf{P}(X \geq n)]^2}. \quad (1.8)$$

Согласно лемме 2.2, из условия (1.7) следует, что функция $\mathbf{P}(X > x)$ медленно меняется. Важно отметить, что (1.8) может не выполняться, если потребовать только, чтобы функция $\mathbf{P}(X > x)$ медленно менялась (см. ниже пример 4.1).

Формула (1.4) допускает простое эвристическое объяснение. Пусть $H(x)$ — функция восстановления, т.е. $H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{k*}(x)$. Согласно лемме 2.5,

$$H(k+) \sim \frac{1}{L(k)}.$$

Отсюда

$$h_k = H(k+) - H(k) \sim \frac{1}{L(k+1)} - \frac{1}{L(k)} \sim \frac{L(k) - L(k+1)}{L^2(k)} = \frac{\mathbf{P}(X = k)}{[\mathbf{P}(X \geq k)]^2}.$$

Правдоподобное допущение в этих рассуждениях заключается в том, что

$$H(k+) - H(k) \sim \frac{1}{L(k+1)} - \frac{1}{L(k)}.$$

Однако в конечном счете оно оказывается верным. Доказательство этого факта и составляет содержание теоремы 1.1.

Если выполнено (1.6), то формулу (1.4) можно записать в виде (1.8) с дополнительным множителем, а именно,

$$h_n \sim c_1(\alpha) \frac{\mathbf{P}(X = n)}{[\mathbf{P}(X \geq n)]^2}, \quad (1.9)$$

где $c_1(\alpha) = (\pi\alpha)^{-1} \sin \pi\alpha$. Очевидно, что $c_1(\alpha) \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow 0$. Поэтому (1.8) можно рассматривать как предельный случай по отношению к (1.9). Далее, согласно (1.6), $np_n \sim \alpha \mathbf{P}(X \geq n)$. Следовательно, можно ожидать, что в условиях теоремы 1.1 $np_n = o(\mathbf{P}(X \geq n))$, что и подтверждается леммой 2.1.

Метод доказательства (1.8) кардинально отличается как от аналитического метода работы [6], так и от вероятностного подхода, используемого в [7]. Отметим, что последний не может быть применен в рассматриваемом случае из-за отсутствия локальной предельной теоремы. Что касается интегральной предельной теоремы, то она была доказана еще в 1952 г. в пионерской работе Д. Дарлингга [9]. Недавно эта теорема была передоказана в [10].

В оставшейся части работы будем мы использовать для $\mathbf{P}(X \geq x)$ обозначение $L(x)$.

2. Вспомогательные результаты. Мы начнем со следующего утверждения.

Лемма 2.1. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(x)}{L(x)} = 0. \quad (2.1)$$

Доказательство. Очевидно, что для любого $c > 1$

$$\mathbf{P}(X \geq x) = \sum_{k \geq x} l(k)k^{-1} > \min_{cx > k \geq x} l(k) \sum_{cx > k \geq x} \frac{1}{k}.$$

Далее, при $x > 1$, $c > 2$

$$\sum_{cx > k \geq x} \frac{1}{k} > \int_{x+1}^{cx} y^{-1} dy \geq \ln \frac{cx}{x+1} > \ln \frac{c}{2}.$$

С другой стороны, при любом фиксированном $c > 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} l^{-1}(x) \min_{x \leq k < cx} l(k) = 1.$$

Таким образом,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{L(x)}{l(x)} > \ln \frac{c}{2},$$

каково бы ни было $c > 2$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x)/l(x) = \infty$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если выполнено условие (1.7), то функция $L(x)$ медленно меняется при $x \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Очевидно, что для любого $c > 1$

$$\frac{L(cx)}{L(x)} = 1 + \frac{1}{L(x)} \sum_{x \leq k < cx} k^{-1}l(k). \quad (2.2)$$

Далее,

$$\sum_{x \leq k < cx} k^{-1}l(k) < \max_{x \leq k < cx} l(k) \sum_{x \leq k < cx} k^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что $\lim_{x \rightarrow \infty} l^{-1}(x) \max_{x \leq k < cx} l(k) = 1$. С другой стороны, $\sum_{x \leq k < cx} k^{-1} < \ln c$ при $c > 1$. Таким образом, для любого $c > 1$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{l(x)} \sum_{x \leq k < cx} k^{-1} l(k) < \ln c. \quad (2.3)$$

Из (2.1)–(2.3) следует утверждение леммы.

Лемма 2.3. *Справедливо тождество*

$$nh_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_{n-k} h_k^{(2)}, \quad (2.4)$$

где $h_n^{(2)} = \sum_{k=0}^n h_{n-k} h_k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $h(z) = 1/(1-f(z))$. Очевидно, что

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{(1-f(z))^2}. \quad (2.5)$$

Далее,

$$C_n \left(\frac{1}{(1-f(z))^2} \right) = h_n^{(2)}, \quad C_{n-1}(f'(z)) = np_n.$$

Отсюда

$$C_n \left(\frac{f'(z)}{(1-f(z))^2} \right) = \sum_{k=0}^n (n-k+1) p_{n-k+1} h_k^{(2)}. \quad (2.6)$$

С другой стороны,

$$C_{n-1}(h'(z)) = nh_n. \quad (2.7)$$

Из (2.5)–(2.7) следует (2.4). Лемма доказана.

Лемма 2.4. *При $n \rightarrow \infty$*

$$\sum_{k=0}^n L(k) \sim nL(n). \quad (2.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $L(x)$ имеет место представление Караматы

$$L(x) = a(x) \exp \left\{ \int_1^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\}, \quad x > 1,$$

где $\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = a$, $0 < a < \infty$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n L(k) = \infty$, то

$$\sum_{k=0}^n L(k) \sim \sum_{x=0}^n \tilde{L}(k), \quad (2.9)$$

где $\tilde{L}(x) = a \exp \left\{ \int_1^x u^{-1} \varepsilon(u) du \right\}$. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=0}^n \tilde{L}(k) = \tilde{L}(n)(n+1) + \sum_{k=1}^n (\tilde{L}(k-1) - \tilde{L}(k))k. \quad (2.10)$$

Далее, при $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{L}(k) - \tilde{L}(k-1) = O \left(\tilde{L}(k) \left| \int_{k-1}^k \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right| \right) = o \left(\frac{\tilde{L}(k)}{k} \right).$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^n (\tilde{L}(k) - \tilde{L}(k-1))k = o \left(\sum_{k=0}^n \tilde{L}(k) \right). \quad (2.11)$$

Из (2.9)–(2.11) следует утверждение леммы.

Лемма 2.5. При $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n h_k \sim \frac{1}{L(n)}. \quad (2.12)$$

Доказательство. Прежде всего,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > k) z^k = \frac{1 - f(z)}{1 - z}.$$

Поскольку $\mathbf{P}(X > k) \sim L(k)$, то, используя лемму 2.4 и абелеву теорему (см. [4, гл. XIII, § 5, теорема 5]), имеем

$$\frac{1 - f(z)}{1 - z} \sim (1 - z)^{-1} L((1 - z)^{-1}), \quad z \rightarrow 1 -.$$

Отсюда $(1 - z)(1 - f(z))^{-1} \sim (1 - z)L^{-1}((1 - z)^{-1})$, $z \rightarrow 1 -$, т.е.

$$(1 - f(z))^{-1} \sim L^{-1}((1 - z)^{-1}). \quad (2.13)$$

Применяя тауберову теорему (она содержится в упомянутой выше теореме 5), мы получаем желаемый результат.

Лемма 2.6. При $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n h_k^{(2)} \sim \frac{1}{L^2(n)}. \quad (2.14)$$

Доказательство. В силу (2.13)

$$\frac{1}{(1 - f(z))^2} \sim L^{-2}((1 - z)^{-1}), \quad z \rightarrow 1 -.$$

С другой стороны, как уже отмечалось в доказательстве леммы 2.3,

$$h_n^{(2)} = C_n \left(\frac{1}{(1 - f(z))^2} \right).$$

Применяя теперь тауберову теорему (см. ссылку в доказательстве леммы 2.5), мы получаем желаемый результат.

Лемма 2.7. При $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n l(k) \sim nl(n).$$

Доказательство. Поскольку при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n l(k) = \sum_{k=1}^n kp_k \rightarrow \infty,$$

то в данном случае проходят те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 2.4.

Лемма 2.8. Существует последовательность θ_n такая, что $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \theta_n \leq 2$ и

$$h_n^{(2)} \leq \theta_n L^{-1}(n) \max_{n/2 \leq k \leq n} h_k.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$h_n^{(2)} \leq 2 \sum_{0 \leq k \leq n/2} h_k h_{n-k} \leq 2 \max_{n/2 \leq k \leq n} h_k \sum_{0 \leq k \leq n/2} h_k.$$

Чтобы завершить доказательство, остается применить лемму 2.5.

Лемма 2.9. *Существуют положительные последовательности a_n и b_n такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq 2$ и*

$$h_n = a_n \frac{l(n)}{nL^2(n)} + b_n \frac{l(n)}{L(n)} \max_{n/2 < k \leq n} h_k. \quad (2.15)$$

Доказательство. Согласно лемме 2.3,

$$nh_n = \sum_{0 \leq k \leq n/2} (n-k)p_{n-k}h_k^{(2)} + \sum_{n/2 < k \leq n-1} (n-k)p_{n-k}h_k^{(2)} \equiv \sum_1 + \sum_2.$$

Используя леммы 2.6 и 2.7, имеем

$$\sum_1 = \sum_{0 \leq k \leq n/2} l(n-k)h_k^{(2)} \sim l(n) \sum_{0 \leq k \leq n/2} h_k^{(2)} \sim \frac{l(n)}{L^2(n)}.$$

С другой стороны, в силу лемм 2.7 и 2.8,

$$\begin{aligned} \sum_2 &= \sum_{n/2 < k \leq n-1} l(n-k)h_k^{(2)} \leq \theta_n \max_{n/2 < k \leq n} h_k L^{-1}(n) \\ &\times \sum_{0 \leq k \leq n-1} l(n-k) \sim \theta_n n \max_{n/2 < k \leq n} h_k l(n) L^{-1}(n). \end{aligned}$$

Комбинируя полученные соотношения, мы приходим к утверждению леммы.

3. Доказательство основного результата. Отправной точкой является равенство (2.15). Полагая для краткости

$$\varphi(n) = a_n \frac{l(n)}{nL^2(n)}, \quad \psi(n) = b_n \frac{l(n)}{L(n)},$$

запишем (2.15) в виде

$$h_n = \varphi(n) + \psi(n) \max_{n/2 < k \leq n} h_k. \quad (3.1)$$

Зафиксируем $0 < \varepsilon < 1/2$ и выберем N так, чтобы выполнялось неравенство $\psi(n) < \varepsilon$ для $n > N$. Пусть n_1 — значение k , при котором достигается $\max_{n/2 < k \leq n} h_k$. В частности, может случиться, что $n_1 = n$. В этом случае $h_n < \varphi(n)/(1 - \varepsilon)$. Если $N < n_1 < n$, то

$$h_{n_1} < \varphi(n_1) + \varepsilon \max_{n_1/2 \leq j \leq n_1} h_j$$

и, следовательно,

$$h_n < \varphi(n) + \varepsilon \varphi(n_1) + \varepsilon^2 \max_{n_1/2 < j \leq n_1} h_j. \quad (3.2)$$

Если $\max_{n_1/2 < j \leq n_1} h_j = h_{n_1}$, то $h_{n_1} < \varphi(n_1)/(1 - \varepsilon)$. Подставляя эту оценку в (3.2), имеем

$$h_n < \varphi(n) + \varepsilon \varphi(n_1) + \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} \varphi(n_1).$$

Если $\max_{n_1/2 < j \leq n_1} h_j$ достигается для $N < j < n_1$, то точно так же получим неравенство

$$h_n < \varphi(n) + \varepsilon \varphi(n_1) + \varepsilon^2 \varphi(n_2) + \frac{\varepsilon^3}{1 - \varepsilon} \max_{n_2/2 < j \leq n_2} h_j$$

и т.д.

Существуют две возможности: либо для некоторого $n_k > N$

$$\max_{n_k/2 < j \leq n_k} h_j = h_{n_k};$$

либо для некоторого $k = k_0$ выполняется неравенство $n_k < N$. Рассмотрим первую возможность.

Заметим, прежде всего, что $n_k > n/2^k$. Используя представление Караматы для $l(n)/L^2(n)$, находим

$$\frac{\varphi(n_j)}{\varphi(n)} = n \frac{a_{n_j}}{n_j a_n} \exp \left\{ - \int_{n_j}^n \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\}.$$

Очевидно, что

$$\left| \int_{n_j}^n \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right| < \max_{n_j < u < n} |\varepsilon(u)| \ln \frac{n}{n_j} < j\eta \ln 2, \quad \eta = \max_{u > N} |\varepsilon(u)|.$$

Следовательно, существует ε_0 такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\varepsilon^j \varphi(n_j) < \varepsilon^j \varphi(n) \exp\{j\eta \ln 2\} < \varepsilon^{j/2} \varphi(n).$$

В результате получаем, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$h_n < \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon^j \varphi(n_j) + \frac{\varepsilon^k}{1-\varepsilon} \varphi(n_k) < \left(\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon^{j/2} + \frac{\varepsilon^{k/2}}{1-\varepsilon} \right) \varphi(n) < \frac{\varphi(n)}{1-\varepsilon^{1/2}}. \quad (3.3)$$

Во втором случае рекуррентный процесс останавливается при $k = k_0 = \min\{k: n_k < N\}$. В результате мы приходим к оценке

$$h_n < \frac{\varphi(n)}{1-\varepsilon^{1/2}} + \frac{\varepsilon^{k_0-1}}{1-\varepsilon} \max_k h_k. \quad (3.4)$$

Поскольку $n_k > n/2^k$, то $k_0 > \log_2(n/N)$. Это означает, что $\varepsilon^{k_0} < \exp\{2^{-1} \ln \varepsilon \log_2 n\}$ при $n > N^2$. Следовательно, при достаточно малом ε

$$\varepsilon^{k_0} = o(n^{-2}) = o(\varphi(n)). \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) следует, что $h_n < 2\varphi(n)$ при $n > N^2$, если ε достаточно мало. Возвращаясь теперь к (3.1) и учитывая лемму 2.1, находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$h_n = \frac{l(n)}{nL^2(n)}(1 + o(1)) + O\left(\frac{l^2(n)}{nL^3(n)}\right) = \frac{l(n)}{nL^2(n)}(1 + o(1)),$$

что эквивалентно утверждению теоремы.

4. Дополнение. В настоящем пункте выводится соотношение (1.6) и строится пример, показывающий, что условие $\mathbf{P}(X \geq n) = L(n)$, где $L(n)$ — медленно меняющаяся функция, не является достаточным для (1.8).

Лемма 4.1. Пусть выполнено условие (1.3) и, кроме того, существует n_0 такое, что $p_{n+1} \leq p_n$ для $n \geq n_0$. Тогда

$$p_n \sim \frac{L(n)}{\alpha n^{1+\alpha}}.$$

Доказательство. Очевидно, что $\sum_{n \leq k \leq n(1+\varepsilon)} p_k \leq n\varepsilon p_n$, если $n \geq n_0$. С другой стороны, ввиду (1.3) для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n \leq k \leq n(1+\varepsilon)} p_k > (1-\varepsilon) \frac{L(n)}{n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^\alpha}\right),$$

если $n \geq n(\varepsilon) > 0$.

Таким образом, при $n \geq n(\varepsilon)$

$$p_n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{L(n)}{n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^\alpha}\right).$$

Отсюда, поскольку $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\alpha} (1 - (1 + \varepsilon)^{-\alpha}) = \alpha$, следует, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{1+\alpha} L^{-1}(n) p_n \geq \alpha. \quad (4.1)$$

Далее, если $(1 - \varepsilon)n \geq n_0$, то

$$\sum_{n(1-\varepsilon) \leq k \leq n} p_k \geq n\varepsilon p_n.$$

С другой стороны, вследствие (1.3) для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n(1-\varepsilon) \leq k \leq n} p_k < (1 + \varepsilon) \frac{L(n)}{n^\alpha} \left(\frac{1}{(1 - \varepsilon)^\alpha} - 1 \right),$$

если $n \geq n(\varepsilon)$. В результате имеем для достаточно больших n

$$p_n < \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \frac{L(n)}{n^{1+\alpha}} \left(\frac{1}{(1 - \varepsilon)^\alpha} - 1 \right).$$

Так как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - (1 - \varepsilon)^\alpha) = \alpha$, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{1+\alpha} L^{-1}(n) p_n \leq \alpha. \quad (4.2)$$

Из (4.1) и (4.2) следует утверждение леммы.

Пример 4.1. Пусть $F_1(x)$ — любая функция распределения, сосредоточенная на множестве целых неотрицательных чисел, такая, что $1 - F_1(x) = L(x)$, где $L(x)$ медленно меняется. Положим $y_k = L^{-1}(2^{-k})$, где $L^{-1}(x)$ — обратная к $L(x)$ функция. Обозначим $x_k = [y_k]$. Пусть $F_2(\cdot)$ — дискретная функция распределения, сосредоточенная на множестве $\{x_k\}_1^\infty$, со скачками величины $L^2(y_k)$. Очевидно, что $L^2(y_k) = 4^{-k}$. Поэтому

$$1 - F_2(x_k) = \sum_{j=k}^{\infty} 4^{-j} = 3^{-1} \cdot 4^{1-k} = \frac{4}{3} L^2(y_k) \sim \frac{4}{3} L^2(x_k).$$

Это означает, что

$$1 - F_2(x) = o(1 - F_1(x)). \quad (4.3)$$

Далее, пусть $F(x) = 2^{-1}(F_1(x) + F_2(x))$. Ввиду (4.3) при $x \rightarrow \infty$

$$1 - F(x) \sim \frac{1}{2} L(x). \quad (4.4)$$

Далее,

$$F(x_{k+}) - F(x_k) \geq \frac{1}{2} (F_2(x_{k+}) - F_2(x_k)) = \frac{1}{2} L^2(y_k). \quad (4.5)$$

Пусть случайная величина X имеет распределение F . В силу (4.4) и (4.5)

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(X = x_k)}{[\mathbf{P}(X \geq x_k)]^2} \geq 1.$$

С другой стороны, в данном случае $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$, и, следовательно, соотношение (1.8) не может выполняться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний. — Бюлл. МГУ, секц. А, матем. мех., 1937, т. 1, в. 3, с. 1–16.

2. Erdős P., Feller W., Pollard H. A property of power series with positive coefficients. — Bull. Amer. Math. Soc., 1949, v. 55, p. 201–204.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. М.: Мир, 1964, 498 с.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1967, 752 с.
5. de Bruijn N. G., Erdős P. On a recursion formula and some Tauberian theorems. — J. Res. Nat. Bur. Stand., 1953, v. 50, p. 161–164.
6. Garsia A., Lamperti J. A discrete renewal theorem with infinite mean. — Comment. Math. Helv., 1963, v. 37, p. 221–234.
7. Williamson J. A. Random walks and Riesz kernels. — Pacific J. Math., 1968, v. 25, № 2, p. 393–415.
8. Рвачева Е. Л. Об области притяжения многомерных распределений. — Ученые записки Львовского гос. ун-та, 1954, сер. мех.-матем., т. 6, № 29, p. 5–44.
9. Darling D. A. The influence of the maximal term in the addition of independent random variables. — Trans. Amer. Math. Soc., 1952, v. 73, № 1, p. 95–107.
10. Нагаев С. В., Вахтель В. И. О суммах независимых случайных величин без степенных моментов. — Сиб. матем. журн., 2008, т. 49, № 6, с. 1369–1380.

Поступила в редакцию
12.VII.2010

© 2011 г.

MAZURKIEWICZ G.*

ON $\mathbf{R}^+$ -WEAKLY STABLE DISTRIBUTION

Случайный вектор $\mathbf{X}$ называется $(\mathbf{R}^+)$ -слабо устойчивым, если для любых (неотрицательных) случайных величин Θ_1 и Θ_2 , независимых от $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$ существует (неотрицательная) случайная величина Θ , независимая от $\mathbf{X}$, такая, что

$$\Theta_1 \mathbf{X} + \Theta_2 \mathbf{X}' \stackrel{d}{=} \Theta \mathbf{X}.$$

В настоящей статье, отвечая на открытый вопрос, поставленный в (Studia Math., 2005, v. 167, № 3, p. 195–213), мы показываем, что $\mathbf{R}^+$ -слабо устойчивые распределения имеют те же свойства и ту же стохастическую структуру, что и слабо устойчивые распределения.

Ключевые слова и фразы: слабо устойчивое распределение, устойчивое распределение, ℓ_α -симметричное распределение, масштабная смесь, сократимые случайные векторы.

1. Introduction. Throughout the paper we denote by $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ the distribution of the random vector $\mathbf{X}$. If random vectors $\mathbf{X}$ and $\mathbf{Y}$ have the same distribution, then we write $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{Y}$.

Let $\mathbb{E}$ be a separable Banach space. By $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ we denote the set of all probability measures on $\mathbb{E}$. We use the simplified notation $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$, $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}([0, \infty))$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{R})$.

For every $a \in \mathbf{R}$ and every probability measure μ we define the rescaling operator $T_a: \mathcal{P}(\mathbb{E}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{E})$ by the formula

$$T_a \mu(A) = \begin{cases} \mu(A/a) & \text{for } a \neq 0, \\ \delta_0(A) & \text{for } a = 0, \end{cases}$$

* Faculty of Mathematics, Computer Science and Econometrics, University of Zielona Góra, ul. prof. Z. Szafrana 4a, 65-516 Zielona Góra, Poland; e-mail: G.Mazurkiewicz@wmie.uz.zgora.pl