Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Бояринов, Вероятностные методы в теории аргумента дзета-функции Римана, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 2, 209–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4372>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 02:44:23

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука

Том 56
Выпуск 2, 2011 год
апрель, май, июнь

© 2011 г.

БОЯРИНОВ Р. Н.*

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ АРГУМЕНТА ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

В работе дан обзор последних результатов в теории аргумента дзета-функции Римана.

Ключевые слова и фразы: аргумент дзета-функции Римана, мера множества, асимптотические формулы, дробные моменты, случайные величины, скорость сходимости, предельное распределение.

Настоящая работа посвящена обзору вероятностных результатов в теории аргумента дзета-функции Римана. Дадим необходимые определения и опишем простейшие свойства $S(t)$ — аргумента дзета-функции Римана.

О п р е д е л е н и е 1. Для вещественного t , отличного от ординаты нуля дзета-функции Римана $\zeta(s)$, положим

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

где $\arg \zeta(1/2 + it)$ получается непрерывным продолжением $\arg \zeta(s)$ вдоль ломаной линии, начинающейся в точке $s = 2$ ($\arg \zeta(2) = 0$), идущей к точке $s = 2 + it$ и затем к точке $s = 1/2 + it$. Если же t — мнимая часть нуля $\zeta(s)$, то

$$S(t) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{2} (S(t + \delta) + S(t - \delta)).$$

О п р е д е л е н и е 2. Для положительного T , отличного от мнимой части нуля $\zeta(s)$, символом $N(T)$ будем обозначать число нулей

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: roma.boyarin@yahoo.com

дзета-функции в прямоугольнике $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$. Если T совпадает с мнимой частью нуля $\zeta(s)$, то положим

$$N(T) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{2} (N(T + \delta) + N(T - \delta)).$$

Нижеследующая теорема [1, теорема 2, с. 45] описывает простейшие свойства $S(t)$.

Теорема (А. А. Карацуба, М. А. Королев). *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $S(t)$ — кусочно-гладкая функция с разрывами в точках, совпадающих с ординатами комплексных нулей $\zeta(s)$;
- 2) при переходе через точку разрыва функция $S(t)$ совершает скачок, равный сумме кратностей нулей $\zeta(s)$, имеющих эту точку своей ординатой;
- 3) на всяком промежутке непрерывности (γ, γ') , где γ, γ' — соседние ординаты нулей $\zeta(s)$, функция $S(t)$ является монотонно убывающей с производными

$$S'(t) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} + O(t^{-2}) \quad \text{и} \quad S''(t) = -\frac{1}{2\pi t} + O(t^{-3}).$$

Одной из задач теории аргумента дзета-функции Римана является проблема определения порядка роста величины $M(T)$ — числа перемен знака $S(t)$ на промежутке $0 < t \leq T$. Первый результат здесь принадлежит Г. Бору и Э. Ландау [2], которые в 1913 г. доказали существование положительной постоянной α такой, что

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{(\ln t)^\alpha} = -\infty, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{(\ln t)^\alpha} = +\infty.$$

Отсюда следует, что функция $S(t)$ на интервале $(0, +\infty)$ меняет свой знак бесконечно много раз. В 1946 г. А. Сельберг [3] разработал новый метод, с помощью которого получил следующую нижнюю оценку числа точек перемены знака $S(t)$ на промежутке $(T, T + H]$:

$$M(T + H) - M(T) \geq H(\ln T)^{1/3} e^{-c_1 \sqrt{\ln \ln T}}. \quad (1)$$

Длина H рассматриваемого промежутка имела вид $T^{0.5+\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon \leq 0.5$ — произвольное фиксированное число.

Дальнейшее уточнение этого результата происходило по двум направлениям. Первое связано с нахождением нижних оценок разности $M(T + H) - M(T)$ при $H = T^a$, $0 < a < 1/2$, а второе — с заменой правой части неравенства Сельберга функцией, растущей быстрее, чем $H(\ln T)^{1/3} e^{-c_1 \sqrt{\ln \ln T}}$.

В 1981 г. А. Гош [4] доказал, что при $H = T^{a+\varepsilon}$

$$M(T+H) - M(T) > H(\ln T) \exp\left(-\frac{c_2 \ln \ln T}{(\ln \ln \ln T)^{0.5-\delta}}\right), \quad (2)$$

где $0 < \delta < 1/2$. При этом величину a можно брать равной нулю, если гипотеза Римана верна, и равной 0.5 в противном случае.

Наконец, в 1996 г. А. А. Карацуба [5] доказал неравенство Сельберга (1) при $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Далее, в 2002 г. М. А. Королев [6], [7] доказал результат Гоша (2) при $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Отметим, что вопрос об истинном порядке роста $M(T)$ при $T \rightarrow +\infty$ в настоящее время остается открытым.

В 1998 г. Р. Вон и Т. Вули [8] при исследовании распределения значений некоторых тригонометрических сумм получили асимптотические формулы для дробных моментов этих сумм. Изучая распределение нулей дзета-функции Римана, в 2008 г. М. А. Королев [9] получил асимптотические формулы для дробных моментов некоторых характеристик этих нулей.

В 2010 г. в работе [10] была доказана теорема о дробных моментах случайных величин, из которой следует лучший результат о числе перемен знака $S(t)$ и другие более сильные результаты о дробных моментах арифметических сумм. В [10] был предложен метод, позволяющий получать асимптотические формулы для дробных моментов случайных величин с лучшими остатками и для более широкого множества значений параметра по сравнению с результатами работ [3]–[9].

Рассмотрим полное вероятностное пространство $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$. Пусть $\xi_n: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ — случайная величина, а $F_n(x) = \mathbf{P}\{\omega: |\xi_n(\omega)| < x\}$ — функция распределения, где n — некоторый вещественный параметр, а $x > 0$. Обозначим $m_a(n) = \int_0^{+\infty} x^a dF_n(x)$ — a -й момент случайной величины $|\xi_n|$. Пусть далее $[x]$ — целая часть x . В нижеследующей теореме будут рассмотрены два случая: случай предельного нормального распределения и случай предельного показательного распределения. В первом случае параметр δ равен нулю, а во втором — единице.

Теорема 1. Пусть существует абсолютная постоянная $n_0 \geq 1$ такая, что для любого $n > n_0$ и любых целых чисел $1 \leq \nu \leq [\varrho \ln f(n)] + 1$, где $0 < \varrho \leq 0.1$ — некоторая постоянная, а $f(\cdot)$ — вещественнозначная функция такая, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, справедливо следующее равенство:

$$m_{2\nu}(n) = \sigma_{2\nu} \left(1 + \frac{\theta}{f(n)}\right), \quad |\theta| \leq 1,$$

где $\sigma_{2\nu}$ — некоторая последовательность положительных чисел, определяемая ниже. Тогда найдется число $n_1 > n_0$ такое, что для любого $n > n_1$ и любого $0 < a \leq 0.5\varrho \ln f(n)$ справедливо равенство

$$m_a(n) = \mu(a) + \theta R_n,$$

где $\mu(a)$ — некоторая функция параметра a , определяемая ниже, $|\theta| \leq 1$ и

$$R_n = \begin{cases} R_1, & 0 < a < 30, \\ R_2, & 30 \leq a \leq \frac{\varrho}{2^{16+2\delta}} \sqrt{\ln f(n)}, \\ R_3, & \frac{\varrho}{2^{16+2\delta}} \sqrt{\ln f(n)} < a \leq 0.5\varrho \ln f(n), \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2^{11-\delta}}{a} \left(\frac{2^{22} \ln \ln f(n)}{\varrho \ln f(n)} \right)^{(a+1+\delta)/2},$$

$$R_2 = 2^7 \mu(a) \left(\frac{2^{12+2\delta} a^2 \ln(\sqrt{\ln f(n)})/a}{\varrho \ln f(n)} \right)^{(a+1+\delta)/2},$$

$$R_3 = 2^{2+\delta} \mu(a) \exp \left(-\frac{\varrho \sqrt{\ln f(n)}}{2^{20+2\delta}} \right),$$

$$\mu(a) \equiv \begin{cases} 2^{0.5a} \Gamma(0.5a + 0.5) \pi^{-0.5}, & \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \frac{(2\nu)!}{2^\nu \nu!} \text{ и } \delta = 0, \\ \Gamma(0.5a + 1), & \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \nu! \text{ и } \delta = 1, \end{cases}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. В основе доказательства лежат два новых интегральных тождества:

$$|\xi|^a = \varkappa^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{(1 - e^{-\xi^2 u^2})^s e^{-\xi^2 u^2} du}{u^{1+a}},$$

$$\varkappa = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - e^{-u^2})^s e^{-u^2} du}{u^{1+a}} \geq \frac{1}{12 \cdot 4^s};$$

$$|\xi|^r = \tau^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2l}(\xi u)}{u^{1+r}} du, \quad \tau = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2l} u}{u^{1+r}} du \geq \frac{1}{4 \cdot 2^r}.$$

Первое тождество применяется в случае малых значений параметра: $a \leq (\varrho/2^{16+2\delta}) \sqrt{\ln f(n)}$, второе тождество — в случае больших значений параметра: $(\varrho/2^{16+2\delta}) \sqrt{\ln f(n)} < a \leq 0.5\varrho \ln f(n)$. Тогда

$$m_a(n) = \varkappa^{-1} \int_0^{+\infty} dF_n(x) \int_0^{+\infty} \frac{(1 - e^{-x^2 u^2})^s e^{-x^2 u^2} du}{u^{1+a}}$$

$$= \varkappa^{-1} \int_0^{+\infty} dF_n(x) \int_0^\lambda \frac{(1 - e^{-x^2 u^2})^s e^{-x^2 u^2} du}{u^{1+a}} + r(\lambda) = I(\lambda) + r(\lambda).$$

Оценивая остаток, получим $r(\lambda) \leq (12 \cdot 4^s / a \lambda^a) \int_0^{+\infty} e^{-x^2 \lambda^2} dF_n(x)$. Затем воспользуемся следующим интегральным выражением при $V > 0$:

$$e^{-x^2 u^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^V \cos(xut) e^{-t^2/4} dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_V^{+\infty} \cos(xut) e^{-t^2/4} dt.$$

Тогда

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2 \lambda^2} dF_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dF_n(x) \int_0^V \cos(x\lambda t) e^{-t^2/4} dt + O(e^{-V^2/8}).$$

Далее, используя теорему Фубини, меняем порядок интегрирования. Разлагая подынтегральную функцию по степеням x и используя асимптотические выражения для четных моментов, получим требуемое. Аналогичные рассуждения проводим и для величины $I(\lambda)$. В случае больших значений параметра представим a в виде $a = 2t + r$, где r лежит в области малых параметров. Следовательно,

$$m_a(n) = \tau^{-1} \int_0^{+\infty} x^{2t} dF_n(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2l}(ux) du}{u^{1+r}}.$$

Далее, используя теорему Фубини, меняем порядок интегрирования. Разлагая подынтегральную функцию по степеням x и используя асимптотические выражения для четных моментов, получим требуемое.

З а м е ч а н и е 1. Подобного рода утверждение верно и в более общем случае — когда относительно предельного распределения $F(x)$ предполагается, что в некоторой окрестности нуля верно неравенство $|F(x)| \leq Ax^\beta$ для некоторых $A > 0$ и $\beta > 0$, а относительно $\sigma_{2\nu}$ предполагается выполнение неравенств $0 < \sigma_{2\nu} \leq (C\nu)^{\nu(2-\delta)}$, где $C > 1$ и $0 < \delta < 2$ — некоторые постоянные.

Приведем несколько примеров применения теоремы 1.

Справедлива следующая теорема, являющаяся улучшением теоремы 2 из работы [7, гл. II, § 3].

Теорема 2. Для любого $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ существует число $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $T \geq T_1$ при $H = T^{27/82+\varepsilon}$ и $x = T^{0.1\varepsilon}$ и любых $0 < \alpha \leq (\ln \ln \ln T)/(16 \ln B)$ и $3(\ln \ln T)(\ln x)^{-1} < h \leq (\ln T)^{-0.5}$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_T^{T+H} |S(t)|^\alpha dt &= \frac{(\ln \ln T)^{\alpha/2}}{(\pi\sqrt{2})^\alpha} H(v(\alpha) + \theta R_T(\alpha)), \\ \int_T^{T+H} \left| \int_0^h S(t+u) du \right|^\alpha dt &= \frac{(h\sqrt{\ln(1/h)})^\alpha}{(\pi\sqrt{2})^\alpha} H(v(\alpha) + \theta_1 R_T(\alpha)), \end{aligned}$$

где $B = e^{40}\varepsilon^{-3}$, $v(\alpha) = 2^{\alpha/2}\Gamma((\alpha+1)/2)/\sqrt{\pi}$, $|\theta| \leq 1$, $|\theta_1| \leq 1$, а $R_T(\alpha)$ определяется формулой

$$R_T(\alpha) = \begin{cases} R_1, & 0 < \alpha < 30, \\ R_2, & 30 \leq \alpha \leq \frac{\sqrt{\ln \ln \ln T}}{2^{18} \ln B}, \\ R_3, & \frac{\sqrt{\ln \ln \ln T}}{2^{18} \ln B} < \alpha \leq \frac{\ln \ln \ln T}{16 \ln B}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{2^{11}}{\alpha} \left(\frac{2^{25}(\ln B) \ln \ln \ln T}{\ln \ln \ln T} \right)^{(\alpha+1)/2}, \\ R_2 &= 2^7 v(\alpha) \left(\frac{2^{15} \alpha^2 (\ln B) \ln(\sqrt{\ln \ln \ln T}/(2\alpha))}{\ln \ln \ln T} \right)^{(\alpha+1)/2}, \\ R_3 &= 4v(\alpha) \exp \left(- \frac{\sqrt{\ln \ln \ln T}}{2^{22} \ln B} \right). \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. Формулы теоремы 2 с $H = T^\varepsilon$ и $x = T^{0.05\varepsilon}$ справедливы для всех $T \in (X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, за исключением значений, образующих множество E с мерой $\text{mes}(E) < X^{1-0.04\varepsilon}$.

Справедлива следующая теорема, являющаяся улучшением теоремы 3 из работы [7, гл. II, § 4].

Теорема 3. Для любого $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ существует число $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $T \geq T_1$ при $H = T^{27/82+\varepsilon}$ выполняется следующее неравенство:

$$M(T+H) - M(T) > H(\ln T) \exp \left(- \frac{C(\ln \ln T) \ln \ln \ln T}{\ln \ln \ln T} \right),$$

где $C = 2^{41} \ln B$, $B = e^{40\varepsilon-3}$.

З а м е ч а н и е 3. Неравенство теоремы 3 с $H = T^\varepsilon$ справедливо для всех $T \in (X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, за исключением значений, образующих множество E с мерой $\text{mes}(E) < X^{1-0.04\varepsilon}$.

Справедлива следующая теорема, являющаяся улучшением теоремы 3 из работы [9].

Теорема 4. Для любого $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ существует натуральное число $N_1 = N_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого натурального $N \geq N_1$ при $M = \lceil N^{27/82+\varepsilon} \rceil$ и любого $0 < \alpha \leq (\ln \ln \ln N)/(16 \ln A)$ выполняются следующие равенства:

$$\sum_{N \leq n \leq N+M} |S(t_n)|^\alpha = \frac{(\ln \ln N)^{\alpha/2}}{(\pi\sqrt{2})^\alpha} M(v(\alpha) + \theta R_N(\alpha)),$$

где $A = e^{38.4\varepsilon-3}$, $v(\alpha) = 2^{0.5\alpha} \Gamma(0.5\alpha + 0.5) \pi^{-0.5}$, $|\theta| \leq 1$, а $R_N(\alpha)$ определяется формулой

$$R_N(\alpha) = \begin{cases} R_1, & 0 < \alpha < 30, \\ R_2, & 30 \leq \alpha \leq \frac{\sqrt{\ln \ln \ln N}}{2^{18} \ln A}, \\ R_3, & \frac{\sqrt{\ln \ln \ln N}}{2^{18} \ln A} < \alpha \leq \frac{\ln \ln \ln N}{16 \ln A}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{2^{11}}{\alpha} \left(\frac{2^{25}(\ln A) \ln \ln \ln \ln N}{\ln \ln \ln N} \right)^{(\alpha+1)/2}, \\ R_2 &= 2^7 v(\alpha) \left(\frac{2^{15} \alpha^2 (\ln A) \ln \left(\sqrt{\ln \ln \ln N} / (2\alpha) \right)}{\ln \ln \ln N} \right)^{(\alpha+1)/2}, \\ R_3 &= 4v(\alpha) \exp \left(- \frac{\sqrt{\ln \ln \ln N}}{2^{22} \ln A} \right). \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 4. Формулы теоремы 4 с $M = [N^\varepsilon]$ справедливы для всех $N \in (X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, за исключением значений, образующих множество E с мерой $\text{mes}(E) < X^{1-0.04\varepsilon}$.

В 2010 г. в работах [11], [12] предложен метод, позволяющий получить оценки скорости сходимости к предельному распределению для неотрицательных случайных величин и использующий только асимптотические формулы для четных моментов.

Определим для любых положительных чисел a и $\varepsilon < a$ и любого натурального числа k следующие функции $\varphi_+(x) = \varphi_+(x; a, \varepsilon, k)$ и $\varphi_-(x) = \varphi_-(x; a, \varepsilon, k)$:

$$\begin{aligned} \varphi_+(x) &= \frac{(2k+1)!}{(k!)^2 \varepsilon^{2k+1}} \int_x^{a+\varepsilon} (t-a)^k (a+\varepsilon-t)^k dt, & x \in [a, a+\varepsilon]; \\ \varphi_-(x) &= \frac{(2k+1)!}{(k!)^2 \varepsilon^{2k+1}} \int_x^a (t-a+\varepsilon)^k (a-t)^k dt, & x \in [a-\varepsilon, a]. \end{aligned}$$

Далее, определим функции $g(x) = g(x; a)$, $g_+(x) = g_+(x; a, \varepsilon, k)$ и $g_-(x) = g_-(x; a, \varepsilon, k)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} 1 & \text{для } |x| < a, \\ 0 & \text{для } |x| \geq a; \end{cases} \\ g_+(x) &= \begin{cases} 1 & \text{для } |x| < a, \\ \varphi_+(|x|) & \text{для } a \leq |x| \leq a+\varepsilon, \\ 0 & \text{для } |x| > a+\varepsilon; \end{cases} \\ g_-(x) &= \begin{cases} 1 & \text{для } |x| < a-\varepsilon, \\ \varphi_-(|x|) & \text{для } a-\varepsilon \leq |x| \leq a, \\ 0 & \text{для } |x| > a. \end{cases} \end{aligned}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 5. Пусть существует абсолютная постоянная $n_0 \geq 1$ такая, что для любого $n > n_0$ существует натуральное число $N =$

$N(n) \geq 3$ такое, что для любых целых чисел $1 \leq \nu \leq N$ справедливо следующее равенство:

$$m_{2\nu}(n) = \sigma_{2\nu} \left(1 + \frac{\theta}{f(n)} \right), \quad |\theta| \leq 1,$$

где $f(\cdot)$ — вещественнозначная функция и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, а $\sigma_{2\nu}$ — некоторая последовательность положительных чисел. Тогда найдется вещественное число $n_1 > n_0$ такое, что для любого $n > n_1$ и любого $a > 0$ справедливо равенство

$$F_n(a) = F(a) + R_n,$$

где

$$|R_n| \leq 6 \left(\frac{134(\ln N + 1)}{\sqrt{N}} + \frac{1}{2^N} + \frac{3^N}{f(n)} \right),$$

$$F(a) \equiv \begin{cases} 1 - e^{-a^2}, & \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \nu!; \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-t^2/2} dt, & \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \frac{(2\nu)!}{2^\nu \nu!}. \end{cases}$$

Схема доказательства. Пусть $m_0 \geq 1$ — такое число, что для любого $n > m_0$ выполнено неравенство $f(n) \geq 1$. Тогда $n_1 \geq \max(n_0, m_0)$. Пусть $g(x)$, $g_+(x)$ и $g_-(x)$ — функции, определенные выше. Обозначим $\mu_n = \mathbf{P}\{\omega: |\xi_n(\omega)| < a\}$. Тогда $\mu_n = \int_0^{+\infty} g(x) dF_n(x)$. Пусть $\mu_n^\pm = \int_0^{+\infty} g_\pm(x) dF_n(x)$. Очевидно, что верны неравенства $\mu_n^- \leq \mu_n \leq \mu_n^+$. Поскольку $g_\pm(x) = 2(2\pi)^{-1/2} \int_0^{+\infty} G_\pm(y) \cos(xy) dy$, где $G_\pm(y)$ — преобразования Фурье функций $g_\pm(x)$, то верны равенства

$$\begin{aligned} \mu_n^\pm &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dF_n(x) \int_0^T G_\pm(y) \cos(xy) dy \\ &+ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dF_n(x) \int_T^{+\infty} G_\pm(y) \cos(xy) dy = I(T) + R(T). \end{aligned}$$

Оценим остаток:

$$|R(T)| \leq \int_T^{+\infty} |G_\pm(y)| dy \leq \frac{(10k)^k}{\varepsilon^{k-1} T^{k-1}} \quad \text{при } k \geq 2.$$

Далее, используя теорему Фубини, меняем порядок интегрирования в интеграле $I(T)$. Разлагая подынтегральную функцию по степеням x , используя асимптотические выражения для четных моментов и выбирая оптимальным образом параметры ε и k , получим требуемое.

Следствие 1. Если $N = [\varkappa \ln f(n)] + 1$, где $0 < \varkappa \leq 1/\ln 6$ — некоторая постоянная, то

$$|R_n| \leq \frac{1620 \ln \ln f(n)}{\sqrt{\varkappa \ln f(n)}}.$$

З а м е ч а н и е 5. Подобного рода утверждение верно и в более общем случае — когда относительно предельного распределения $F(x)$ предполагается, что $F(x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица (существует такая абсолютная постоянная $L > 0$, что для любых $x, y \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство $|F(x) - F(y)| \leq L|x - y|$).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Пусть существует абсолютная постоянная $n_0 \geq 1$ такая, что для любого $n > n_0$ существует натуральное число $N = N(n) \geq 3$ такое, что для любых целых чисел $1 \leq \nu \leq N$ справедливо следующее равенство:

$$m_{2\nu}(n) = \sigma_{2\nu} \left(1 + \frac{\theta}{f(n)} \right), \quad |\theta| \leq 1,$$

где $f(\cdot)$ — вещественнозначная функция и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Пусть для $\sigma_{2\nu}$ справедливы неравенства: $0 < \sigma_{2\nu} \leq (C\nu)^{\nu(2-\delta)}$, где $C > 1$, $0 < \delta < 2$ — некоторые постоянные. Тогда найдется вещественное число $n_1 > n_0$ такое, что для любого $n > n_1$ и любого $a > 0$ справедливо равенство

$$F_n(a) = F(a) + R_n, \quad |R_n| \leq M \left(\frac{224 C (\ln N + 1)}{N^{\delta/2}} + \frac{1}{3^N} + \frac{N^{2BN}}{f(n)} \right),$$

где $M = \max(2B^2, 6L)$, $B = [4C] + 1$.

Следствие 2. Если $N = [(\kappa \ln f(n)) / \ln \ln f(n)] + 1$, где $0 < \kappa \leq 1/(8B)$ — некоторая постоянная, то

$$|R_n| \leq \frac{450MC(\ln \ln f(n))^2}{\kappa(\ln f(n))^{\delta/2}}.$$

Приведем несколько примеров применения теоремы 5 и ее следствия 1.

Справедлива следующая теорема, являющаяся уточнением теоремы 2 из работы [13].

Теорема 7. Пусть $0 \leq \omega \leq 1$, n — натуральное число и u_x — последовательность натуральных чисел такая, что $u_{x+1}/u_x \geq \beta > 1$. Пусть, далее, $S(\omega; n) = \sum_{x \leq n} e^{2\pi i \omega u_x}$, где суммирование ведется по натуральным числам x . Тогда найдется натуральное число n_1 такое, что для любого $n > n_1$ и любого $a > 0$ функция распределения $F_n(a)$ величины $|S(\omega; n)/\sqrt{n}|$ может быть представлена в виде

$$F_n(a) = 1 - e^{-a^2} + R_n, \quad |R_n| \leq \frac{4600\sqrt{\ln c_0 \ln \ln n}}{\sqrt{\ln n}},$$

где $c_0 = 2\beta/(\beta - 1)$.

Справедлива следующая теорема, являющаяся улучшением теоремы 6 из работы [7, гл. II, § 6].

Пусть h — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам

$$3(\ln \ln T)(\ln x)^{-1} < h \leq (\ln T)^{-0.5},$$

где $x = T^{0.1\varepsilon}$. Рассмотрим две измеримые функции

$$\xi(t) = \frac{S(t)\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\ln \ln T}}, \quad \eta(t) = \frac{(S_1(t+h) - S_1(t))\pi\sqrt{2}}{h\sqrt{\ln(1/h)}},$$

где $S_1(t) = \int_0^t S(u) du$. Пусть

$$F_T(y) = \mathbf{P}\{t: |\xi(t)| < y\} = H^{-1} \text{mes}\{t: |\xi(t)| < y\},$$

$$G_T(y) = \mathbf{P}\{t: |\eta(t)| < y\} = H^{-1} \text{mes}\{t: |\eta(t)| < y\}$$

— функции распределения случайных величин $|\xi(t)|$ и $|\eta(t)|$.

Теорема 8. Для любого $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ существует число $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $T \geq T_1$ при $H = T^{27/82+\varepsilon}$ выполняются следующие равенства:

$$F_T(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-t^2/2} dt + R_T, \quad |R_T| \leq \frac{2^{13}\sqrt{\ln B \ln \ln \ln \ln T}}{\sqrt{\ln \ln \ln T}},$$

$$G_T(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-t^2/2} dt + R'_T, \quad |R'_T| \leq \frac{2^{13}\sqrt{\ln B \ln \ln \ln \ln T}}{\sqrt{\ln \ln \ln T}},$$

где $B = e^{40\varepsilon^{-3}}$.

З а м е ч а н и е 6. Формулы теоремы 8 с $H = T^\varepsilon$ и $x = T^{0.05\varepsilon}$ справедливы для всех $T \in (X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, за исключением значений, образующих множество E с мерой $\text{mes}(E) < X^{1-0.04\varepsilon}$.

З а м е ч а н и е 7. Используя оценки для нечетных моментов величин $\xi(t)$ и $\eta(t)$, можно немного улучшить остаточные члены в асимптотических формулах теоремы 8 и получить оценки вида:

$$R_T = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln \ln \ln T}}\right), \quad R'_T = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln \ln \ln T}}\right).$$

Дальнейшие продвижения в этом направлении сделаны в работе [14].

В 1983 г. Дж. Мюллер [15] предложила новый подход к исследованию величины $M(T)$. Пусть $T > 0$ — достаточно большое число. При каком значении A промежуток $(T-A, T+A]$ будет содержать точку перемены знака функции $S(t)$? Опираясь на гипотезу Римана, Дж. Мюллер доказала, что величину A можно положить равной $c \ln \ln \ln T$, где $c > 0$ — абсолютная постоянная.

Используя идею Дж. Мюллер, М. А. Королев [16] в 2005 г. получил безусловный результат для почти всех T , но еще с меньшим значением A . Им была доказана следующая теорема.

Теорема (М. А. Королев). Пусть ε — сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$ и $A = 4.39 \ln \ln \ln \ln T$. Тогда интервал $(t - A, t + A)$ содержит точку перемены знака функции $S(t)$ при любом t , $T \leq t \leq T + H$, за исключением значений из множества E с мерой $\text{mes}(E) = O(H(\ln \ln T)^{-0.5})$.

В 2009 г. в работе [17] был получен более сильный результат.

Теорема 9. Для любого $0 < \varepsilon < 0.001$ существует вещественное положительное число $T_0(\varepsilon)$ такое, что для любых $T \geq T_0(\varepsilon)$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$ и $A = 4.39 \ln \ln \ln \ln T$ интервал $(t - A, t + A)$ содержит точку перемены знака функции $S(t)$ при любом t , $T \leq t \leq T + H$, за исключением значений из множества E с мерой $\text{mes}(E) = O(H(\ln \ln T)^{-1}(\ln \ln \ln T)^{-0.5})$, постоянная под знаком O абсолютная.

Нижеследующие результаты основаны на неравенстве Маркова:

$$\mathbf{P}(|\xi(\omega)| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbf{E} \xi^{2r}}{\lambda^{2r}}.$$

В работе [18] получены новые результаты о распределении больших значений аргумента дзета-функции Римана на критической прямой. Пусть $E(\lambda, T, H)$ обозначает множество принадлежащих промежутку $(T, T + H]$ значений t , для которых $|S(t)| \geq \lambda$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 10. Пусть $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда для любого $\lambda \geq \ln \ln T$ имеет место оценка

$$\text{mes}(E(\lambda, T, H)) \leq e^2 H \exp(-\kappa \lambda),$$

где $\kappa = \pi \varepsilon^{1.5} e^{-19.5}$.

З а м е ч а н и е 8. Неравенство из теоремы 10 при $H = X^\varepsilon$ справедливо для всех T из промежутка $(X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, за исключением значений из некоторого множества, мера которого не превосходит $X^{1-0.04\varepsilon}$.

Теорема 11. При любом $T > T_0 > 0$ и $\lambda \geq \ln \ln T$ справедлива оценка

$$\text{mes}(E(\lambda, T, T)) \leq e^{2.1} T \exp(-\kappa_1 \lambda),$$

где $\kappa_1 = 27\pi \cdot 10^{-6} e^{-19.5}$.

Теорема 12. Пусть $T > T_0 > 0$, и пусть E_j , $j = 0, 1$, — множества значений t , $T < t \leq 2T$, для которых

$$(-1)^j S(t) > \frac{1}{300} \sqrt{\frac{\ln T}{\ln \ln T \ln \ln \ln T}}.$$

Тогда безусловно верна оценка свертку

$$\text{mes}(E_0) + \text{mes}(E_1) \leq e^{2.1} T \exp \left(-\kappa_2 \sqrt{\frac{\ln T}{\ln \ln T \cdot \ln \ln \ln T}} \right),$$

где $\kappa_2 = 9\pi \cdot 10^{-8} e^{-19.5}$, а при справедливости гипотезы Римана верны оценки снизу

$$\text{mes}(E_j) \geq 0.4T \exp \left(-\frac{\ln T}{\ln \ln T} \right) (\ln T)^{-0.5} (\ln \ln T)^{-1}, \quad j = 0, 1.$$

Следующей важной задачей теории дзета-функции Римана является проблема кратных нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$.

О п р е д е л е н и е 3. Обозначая через $k(\rho)$ кратность нуля ρ , для целого $j \geq 1$ величину $N_j(T)$ положим равной числу различных нулей ρ дзета-функции с условием $k(\rho) = j$, ордината которых положительна и не превосходит T .

Известно, что если точка $T = \gamma$ является ординатой нулей $\rho_1, \dots, \rho_m$, то при переходе через эту точку функция $N(T)$ совершает скачок на величину, равную сумме кратностей этих нулей: $N(\gamma + 0) - N(\gamma - 0) = k(\rho_1) + \dots + k(\rho_m)$.

В 1973 г. Х. Монтгомери [19] с помощью гипотезы Римана доказал, что $\lim_{T \rightarrow +\infty} (N_1(T)/N(T)) \geq 2/3$.

А. Фуджи в 1975 г. доказал [20] неравенство $N_j(T) \leq N(T) \exp(-c\sqrt{j})$, в котором c — положительная абсолютная постоянная, j — достаточно большое целое число, $T > T_0(j) > 0$.

В 1981 г. в работе [21] А. Фуджи улучшил свой результат, доказав неравенство $\sum_{i=j}^{+\infty} N_i(T) \leq N(T) \exp(-cj)$, в котором c — положительная абсолютная постоянная, j — достаточно большое целое число, $T > T_0(j) > 0$.

В 1993 г. А. Чир и Д. Голдстон [22] улучшили результат Х. Монтгомери, доказав неравенство $\lim_{T \rightarrow +\infty} (N_1(T)/N(T)) \geq 0.672753$.

В 1998 г. Дж. Конрей, А. Гош и С. Гонек [23] с помощью обобщенной гипотезы Линделёфа доказали неравенство $\lim_{T \rightarrow +\infty} (N_1(T)/N(T)) \geq 19/27$.

В 2006 г. М. А. Королев [24] доказал несколько утверждений, уточняющих неравенство Фуджи.

Теорема (М. А. Королев). Пусть ε — сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда для любого целого $j \geq 1$ имеет место оценка $N_j(T+H) - N_j(T) \leq e^{7.2} (N(T+H) - N(T)) \exp(-\kappa_0 j)$, где $\kappa_0 = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}/(e\sqrt{10B})$, $B = e^{37}\pi^{-2}$.

Теорема (М. А. Королев). При любом $j \geq 1$ и $T > T_0 > 0$ справедлива оценка $N_j(T) \leq c_1 N(T) \exp(-cj)$, где $c_1 = e^{7.3}$, $c = e^{-30.3}$.

В 2010 г. в [25] автор получил качественно новые оценки кратных нулей. Из них следует, что плотность нулей дзета-функции Римана, кратность которых больше некоторой постоянной j_0 , не превосходит 10^{-12} .

Теорема 13. Пусть $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда для любого целого $j \geq j_0$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=j}^{+\infty} (N_k(T+H) - N_k(T)) \leq \frac{2\kappa e^{3.1}}{(1-e^{-3})^2} (N(T+H) - N(T)) \exp(-\kappa j),$$

где $\kappa = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}/(3e\sqrt{B})$, $B = e^{37}\pi^{-2}$, $j_0 = (3 + 0.1\kappa + 2(1.5\varepsilon e)^{2/3})/\kappa$.

Следствие 3. Пусть $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда для любого целого $j \geq j_0$ справедливо неравенство

$$N_j(T+H) - N_j(T) \leq \frac{2\kappa e^{3.1}}{(1-e^{-3})^2} (N(T+H) - N(T)) \exp(-\kappa j),$$

где $\kappa = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}/(3e\sqrt{B})$, $B = e^{37}\pi^{-2}$, $j_0 = (3 + 0.1\kappa + 2(1.5\varepsilon e)^{2/3})/\kappa$.

З а м е ч а н и е 9. Неравенства из теоремы 13 и следствия 3 при $H = X^\varepsilon$ справедливы для всех T из промежутка $(X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, за исключением значений из некоторого множества, мера которого не превосходит $X^{1-0.04\varepsilon}$.

З а м е ч а н и е 10. При $H = T^{27/82+\varepsilon}$ для любого целого $j \geq j_0$ справедливо неравенство

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=j}^{+\infty} (N_k(T+H) - N_k(T))}{N(T+H) - N(T)} \leq \frac{2\kappa e^3}{(1-e^{-3})^2} \exp(-\kappa j),$$

где $\kappa = 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}/(3e\sqrt{B})$, $B = e^{37}\pi^{-2}$, $j_0 = (3 + 0.1\kappa + 2(1.5\varepsilon e)^{2/3})/\kappa$.

Теорема 14. При любом целом $j \geq 3.1/\alpha$ и $T > T_0 > 0$ справедлива оценка

$$\sum_{k=j}^{+\infty} N_k(T) \leq \beta N(T) e^{-\alpha j}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\pi\sqrt{5}}{3} \cdot 10^{-5} e^{-19.5}, \quad \beta = \frac{2\alpha e^{3.2}}{(1-e^{-3})^2}.$$

Другой важной задачей в теории дзета-функции Римана является изучение распределения расстояния между последовательными нулями дзета-функции Римана $\zeta(s)$, лежащими в критической полосе $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$. Количество $N(T)$ таких нулей с условием $0 < \operatorname{Im} s \leq T$ выражается следующей формулой Римана–Мангольда: $N(T) = L(T) + S(T) + \delta(T)/\pi$, где $L(T) = (T/(2\pi)) \ln(T/(2\pi)) - T/(2\pi) + 7/8$, $S(T)$ — аргумент дзета-функции Римана, а $\delta(T)$ — гладкая функция, производная которой имеет оценку вида $|\delta'(T)| \ll T^{-2}$.

Перенумеруем мнимые части нулей $\zeta(s)$ в критической полосе в порядке возрастания, а в случае совпадения нескольких ординат — в произвольном порядке: $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \dots$.

Существует несколько утверждений, указывающих на то, что случаи, когда расстояние между последовательными ординатами велико, встречается достаточно редко.

Если $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, а целое число r удовлетворяет условию $1 \leq r \leq \lambda^{-1}T \ln T$, то для числа ν_r пар γ_n, γ_{n+r} , удовлетворяющих условиям

$$\frac{\gamma_{n+r} - \gamma_n}{r} \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}, \quad T < \gamma_n, \gamma_{n+r} \leq 2T,$$

в 1975 г. А. Фуджи [26] получил следующую оценку: $\nu_r \leq c_1 N(T) \times \exp(-c(\lambda r)^{2/3}(\ln(\lambda r))^{-1/3})$, где c, c_1 — положительные постоянные. Далее, в 2002 г. А. Ивич [27] доказал, что количество ординат γ_n с условиями $T < \gamma_n \leq T + H$, $H = T^{1/2+\varepsilon}$, $\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq \lambda(\ln T)^{-1}$ не превосходит $c_1(N(T+H) - N(T)) \exp(-c\lambda)$.

В 2010 г. в работе [28] были доказаны следующие утверждения (из этих результатов следует, что плотность соседних нулей дзета-функции Римана, расстояние между которыми больше $2\pi\lambda_0/\ln(T/(2\pi))$, где λ_0 — некоторая постоянная, не превосходит 10^{-12}).

Теорема 15. Пусть $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда при любом $\lambda \geq 4\kappa^{-1}$ для количества $\nu(\lambda; T, H)$ ординат γ_n нулей $\zeta(s)$, удовлетворяющих условиям $\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq (2\pi\lambda)/\ln(T/(2\pi))$, $T < \gamma_n, \gamma_{n+1} \leq T + H$, имеет место оценка

$$\nu(\lambda; T, H) < \frac{e^3}{\lambda} (N(T+H) - N(T)) \exp(-\kappa\lambda), \quad \text{где } \kappa = \frac{\pi}{3} e^{-19.5} \varepsilon^{1.5}.$$

З а м е ч а н и е 11. Неравенство из теоремы 15 при $H = X^\varepsilon$ справедливо для всех T из промежутка $(X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, за исключением значений из некоторого множества, мера которого не превосходит $X^{1-0.04\varepsilon}$.

Теорема 16. При любом $\lambda \geq 4/\kappa_1$ и $T > T_0 > 0$ для количества $\nu(\lambda; T)$ ординат γ_n нулей $\zeta(s)$, удовлетворяющих условиям $\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq (2\pi\lambda)/\ln(T/(2\pi))$, $0.5T < \gamma_n \leq T$, имеет место оценка

$$\nu(\lambda; T) < \frac{e^3}{\lambda} N(T) \exp(-\kappa_1\lambda), \quad \text{где } \kappa_1 = \frac{9\pi}{e^{19.5} \cdot 10^6}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А., Королев М. А. Аргумент дзета-функции Римана. — Успехи матем. наук, 2005, т. 60, № 3, с. 41–96.

2. Bohr H., Landau E. Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion. — Math. Ann., 1913, v. 74, № 1, p. 3–30.
3. Selberg A. Contributions to the theory of the Riemann zeta-function. — Arch. Math. Naturvid., 1946, v. 48, № 5, p. 89–155.
4. Ghosh A. On Riemann's zeta-function — sign changes of $S(T)$. — Recent Progress in Analytic Number Theory (Durham, 1979), v. 1. New York: Academic Press, 1981, p. 25–46.
5. Карацуба А. А. О функции $S(t)$. — Изв. РАН, 1996, т. 60, № 5, с. 27–56.
6. Королев М. А. Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой. — Тр. МИАН, 2002, т. 239, с. 215–238.
7. Карацуба А. А., Королев М. А. Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой. — Успехи матем. наук, 2006, т. 61, № 3, с. 3–92.
8. Vaughan R. C., Wooley T. D. On the distribution of generating functions. — Bull. Lond. Math. Soc., 1998, v. 30, № 2, p. 113–122.
9. Королев М. А. Гипотеза Сельберга о распределении значений мнимых частей нулей дзета-функции Римана. — Докл. РАН, 2008, т. 421, № 3, с. 308–311.
10. Бояринов Р. Н. О дробных моментах случайных величин. — Докл. РАН, 2011, т. 436, № 3, с. 299–301.
11. Бояринов Р. Н. О скорости сходимости распределений случайных величин. — Докл. РАН, 2010, т. 435, № 3, с. 295–297.
12. Бояринов Р. Н. О скорости сходимости к предельному распределению. — Вестн. МГУ, сер. 1, матем. мех., 2011, № 2, с. 20–27.
13. Бояринов Р. Н., Чубариков В. Н. О распределении значений функций на последовательности Фибоначчи. — Докл. РАН, 2001, т. 379, № 1, с. 9–11.
14. Бояринов Р. Н. О распределении значений дзета-функции Римана. — Докл. РАН, 2011, т. 438, № 1, с. 14–16.
15. Mueller J. On the Riemann zeta function $\zeta(s)$ — gaps between sign changes of $S(t)$. — Mathematika, 1983, v. 29, № 2, p. 264–269.
16. Королев М. А. Изменение знака функции $S(t)$ на коротких промежутках. — Изв. РАН, 2005, т. 69, № 4, с. 75–88.
17. Бояринов Р. Н. Изменение знака функции на коротких интервалах. — Вестн. МГУ, сер. 1, матем. мех., 2010, № 3, с. 51–53.
18. Бояринов Р. Н. О распределении больших значений аргумента дзета-функции Римана. — Вестн. МГУ, сер. 1, матем. мех., 2010, № 6, с. 55–58.
19. Montgomery H. L. The pair correlation of zeros of the zeta function. — Proc. Sympos. Pure Math., 1973, v. 24, p. 181–193.
20. Fujii A. On the distribution of the zeros of the Riemann zeta function in short intervals. — Bull. Amer. Math. Soc., 1975, v. 81, № 1, p. 139–142.
21. Fujii A. On the zeros of dirichlet L -functions. II. — Trans. Amer. Math. Soc., 1981, v. 267, № 1, p. 33–40.
22. Cheer A. Y., Goldston D. A. Simple zeros of the Riemann zeta-function. — Proc. Amer. Math. Soc., 1993, v. 118, № 2, p. 365–372.
23. Conrey J. B., Ghosh A., Gonek S. M. Simple zeros of the Riemann zeta-function. — Proc. Lond. Math. Soc., Ser. III, 1998, v. 76, № 3, p. 165–372.
24. Королев М. А. О кратных нулях дзета-функции Римана. — Изв. РАН, 2006, т. 70, № 3, с. 3–22.
25. Бояринов Р. Н. О нулях дзета-функции Римана большой кратности. — Матем. заметки, 2011, т. 89, в. 5, с. 652–657.
26. Fujii A. On the difference between r consecutive ordinates of the zeros of the Riemann zeta-function. — Proc. Japan Acad., 1975, v. 51, № 10, p. 741–743.
27. Ivić A. On small values of the Riemann zeta-function on the critical line and gaps between zeros. — Liet. Mat. Rink., 2002, v. 42, № 1, p. 25–36.
28. Бояринов Р. Н. О больших расстояниях между последовательными нулями дзета-функции Римана. — Дискрет. матем., 2010, т. 22, № 3, с. 75–82.

Поступила в редакцию
25.III.2011