Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, В. А. Топчий, Ю. Ху, Ветвящееся случайное блуждание по решетке $\mathbf{Z}^4$ с ветвлением лишь в начале координат, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 2, 224–247

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 18:22:33

© 2011 г. *ВАТУТИН В. А.**, *ТОПЧИЙ В. А.***, *ХУ ЮЭЮНЬ****

**ВЕТВЯЩЕЕСЯ СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ
ПО РЕШЕТКЕ $\mathbf{Z}^4$ С ВЕТВЛЕНИЕМ
ЛИШЬ В НАЧАЛЕ КООРДИНАТ**

Для критического ветвящегося случайного блуждания по решетке $\mathbf{Z}^4$ с ветвлением лишь в начале координат исследовано асимптотическое поведение вероятности нахождения частиц в начале координат в момент $t \rightarrow \infty$ и доказана условная предельная теорема ягломовского типа для числа частиц в начале координат в момент t при условии, что в этот момент в начале координат имеются частицы.

Ключевые слова и фразы: ветвящееся случайное блуждание, частица в начале координат, условная предельная теорема.

1. Введение. Рассмотрим следующую модификацию стандартного ветвящегося случайного блуждания по решетке $\mathbf{Z}^d$. Популяция частиц порождается одной частицей, находящейся в момент $t = 0$ в начале координат. Частица, находящаяся вне начала координат, совершает непрерывное по времени случайное блуждание по решетке $\mathbf{Z}^d$ с инфинитесимальной матрицей переходных вероятностей

$$A = |a(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Z}^d}, \quad a(\mathbf{0}, \mathbf{0}) < 0,$$

до момента попадания в начало координат (другими словами, время, которое частица проводит в точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, имеет экспоненциальное распределение с параметром $a := -a(\mathbf{0}, \mathbf{0})$). В начале координат частица проводит случайный промежуток времени, имеющий экспоненциальное

*Математический институт им. В. А. Стеклова, ул. Губкина 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

**Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия; e-mail: topchij@ofim.oscsbras.ru

***Département de Mathématiques, Université Paris XIII, F-93430 Villetaneuse, France; e-mail: yueyun@math.univ-paris13.fr

¹⁾ Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00078) и программы «Математическая теория управления» РАН. Работа второго автора выполнена при поддержке программы «Современные проблемы теоретической математики» в Институте математики СО РАН.

распределение с параметром 1, а затем либо переходит в точку $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ с вероятностью

$$-(1-\alpha)a(\mathbf{0}, \mathbf{y})a^{-1}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) =: (1-\alpha)\pi_{\mathbf{y}}, \quad (1.1)$$

либо умирает с вероятностью α , производя в момент гибели случайное число потомков ξ в соответствии с производящей функцией

$$f(s) := \mathbf{E} s^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

В момент рождения частицы находятся в начале координат и из этой точки они начинают свои собственные ветвящиеся случайные блуждания независимо друг от друга и по тому же вероятностному закону, что и частица-родитель.

Эта модель исследовалась в работах [1]–[4], где были выведены основные уравнения для вероятностных производящих функций числа частиц $\eta(t; \mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^d$ в момент t и, при некоторых ограничениях, было исследовано асимптотическое поведение моментов случайной величины $\eta(t; \mathbf{x})$ при $t \rightarrow \infty$. Близкие по духу модели, когда частицы перемещаются по пространству $\mathbf{R}^d$, в соответствии с некоторым вероятностным законом, рассматривались в работах [6], [7], [9], [10].

В данной заметке мы предполагаем, что ветвящееся случайное блуждание порождается в момент $t = 0$ одной частицей, находящейся в начале координат, и накладываем следующие ограничения на характеристики процесса.

Условие (I). Подчиненное случайное блуждание по решетке $\mathbf{Z}^d$ симметрично, неприводимо и однородно:

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\mathbf{0}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) =: a(\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

где $a(\mathbf{x}) \geq 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $a(\mathbf{0}) < \infty$; кроме того, мы предполагаем, что

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^d} a(\mathbf{x}) = 0, \quad b^2 := \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^d} |\mathbf{x}|^2 a(\mathbf{x}) < \infty, \quad (1.2)$$

где $|\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$ для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_d) \in \mathbf{Z}^d$.

Обозначим h_d вероятность того, что частица, покинувшая начало координат и совершающая случайное блуждание по решетке $\mathbf{Z}^d$, удовлетворяющее условию (I), никогда не вернется в начало координат. Заметим, что $h_1 = h_2 = 0$, в то время как $h_d \in (0, 1)$, $d \geq 3$.

Условие (II). Ветвящееся случайное блуждание является критическим:

$$\alpha f'(1) + (1-\alpha)(1-h_d) = 1,$$

причем $f^{(2)}(1) \in (0, \infty)$.

Здесь и в дальнейшем при $k = 2, 3, \dots$ мы используем обозначение $f^{(k)}(s) := d^k f(s)/ds^k$.

Ясно, что в пространствах размерностей $d = 1, 2$ введенное понятие критичности ветвящегося случайного блуждания сводится к критичности производящей функции числа потомков частиц в начале координат, т.е. к условию $f'(1) = 1$. Для пространств размерностей $d \geq 3$ это не так.

Обозначим $\mu_0(t)$ — число частиц, находящихся в момент t в начале координат, $\mu(t)$ — число частиц, находящихся в момент t вне начала координат, а $\eta(t) = \mu_0(t) + \mu(t)$ — общее число частиц в процессе в момент t .

Для случая $d = 1$ авторы статей [12]–[15] исследовали асимптотические свойства вероятностей $\{\mu_0(t) > 0\}$ и $\{\mu(t) > 0\}$ и доказали условные предельные теоремы для соответствующим образом нормированных векторов $(\mu_0(t), \mu(t))$, используя вспомогательный ветвящийся процесс. Модификация этой модели в пространстве размерности $d = 1$, когда первоначальное число частиц в начале координат велико, рассматривалась в работе [11].

Асимптотическое представление для вероятности $q(t) := \mathbf{P}(\mu_0(t) > 0)$ для пространств размерностей $d \neq 4$ было найдено (снова при помощи вспомогательного ветвящегося процесса) в статье [16]. Однако свойства вероятности $q(t)$ для случая $d = 4$ остались неисследованными. В данной работе мы восполняем этот пробел.

Наш основной результат выглядит следующим образом.

Теорема 1.1. *Для ветвящегося случайного блуждания, эволюционирующего на решетке $\mathbf{Z}^4$ и удовлетворяющего условиям (I) и (II),*

$$q(t) \sim C \frac{\ln t}{t}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

где $C = 3a(1 - \alpha)\gamma_4 h_4^2 / (\alpha f^{(2)}(1)) > 0$, а константа γ_4 указана ниже в лемме 2.1, и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\mu_0(t)}{\mathbf{E}[\mu_0(t) | \mu_0(t) > 0]} \leq x \mid \mu_0(t) > 0\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 - e^{-2x/3}), \quad x > 0. \quad (1.4)$$

З а м е ч а н и е. В дальнейшем будет показано, что

$$\mathbf{E}[\mu_0(t) | \mu_0(t) > 0] = \frac{\mathbf{E} \mu_0(t)}{\mathbf{P}(\mu_0(t) > 0)} \sim \frac{3}{\alpha f^{(2)}(1) C^2} \frac{t}{\ln^2 t}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Основным шагом при доказательстве теоремы 1.1, является нахождение асимптотики вероятности невырождения $q(t)$, которая удовлетворяет некоторому уравнению типа свертки (см. ниже соотношение (2.6)). Как будет показано, анализ разложений первого порядка

функций, входящих в это уравнение, приводит лишь к грубой оценке сверху для $q(t)$ (лемма 3.2). В связи этим, для нахождения точной асимптотики нам понадобятся рассуждения, опирающиеся на разложения функций до второго порядка (предложение 3.1).

Оставшаяся часть работы построена следующим образом: в п. 2 мы напомним некоторые известные факты и выведем ряд основных эволюционных уравнений. Доказательство теоремы 1.1 будет приведено в п. 3.

2. Вспомогательные результаты и основные уравнения.

Для дальнейших ссылок мы перечислим сначала некоторые результаты, доказанные в статье [16]. Забудем на время о том, что мы имеем дело с ветвящимся случайным блужданием на решетке $\mathbf{Z}^d$, $d \geq 3$, и рассмотрим лишь движение частиц, совершающих без ветвления случайное блуждание, подчиняющееся условию (I).

Обозначим

$$p(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(t; \mathbf{0}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) =: p(t; \mathbf{y} - \mathbf{x})$$

вероятность того, что частица, находившаяся в нулевой момент времени в точке $\mathbf{x}$, окажется в точке $\mathbf{y}$ в момент t .

Лемма 2.1 (см. [16]). *Если выполнено условие (I), то при $t \rightarrow \infty$*

$$p(t; \mathbf{0}) \sim \gamma_d t^{-d/2}, \quad \gamma_d > 0.$$

Рассмотрим частицу, находящуюся в начале координат в момент $t = 0$, и пусть τ_0 — время, которое частица проведет в начале координат. Обозначим $\tau_{2,d}$ время, необходимое частице, вышедшей из начала координат, для возвращения в начальную точку. Пусть, далее, $\theta(\mathbf{y})$ обозначает время, необходимое частице, находящейся в момент 0 в точке $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, для попадания в первый раз в начало координат. Положим

$$G_1(t) := \mathbf{P}(\tau_0 \leq t) = 1 - e^{-t}, \quad G_{2,d}(t) := \mathbf{P}(\tau_{2,d} \leq t), \quad G^{\mathbf{y}}(t) := \mathbf{P}(\theta(\mathbf{y}) \leq t)$$

и $G_{2,d} := \mathbf{P}(\tau_{2,d} < \infty)$. Из (1.1) следует, что

$$G_{2,d}(t) = \sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{0}} \pi_{\mathbf{y}} G^{\mathbf{y}}(t).$$

Лемма 2.2 (см. [16]). *Если выполнено условие (I), то случайная величина $\tau_{2,d}$, $d \geq 3$, является несобственной, причем*

$$\mathbf{P}(\tau_{2,d} = \infty) = h_d = 1 - G_{2,d}(\infty) := 1 - G_{2,d}.$$

Кроме того, если $G_2(t) := G_{2,d}(t)/(1 - h_d)$, то при $t \rightarrow \infty$

$$1 - G_2(t) \sim \frac{2a\gamma_d h_d^2}{(1 - h_d)(d - 2)} t^{-d/2+1}.$$

Положим

$$K_d(t) = K(t) := \alpha f'(1)G_1(t) + (1 - \alpha)(1 - h_d) G_1 * G_2(t).$$

Лемма 2.3 (см. [16]). *Если выполнено условие (I) для $d \geq 3$, то при $t \rightarrow \infty$*

$$1 - K_d(t) \sim (1 - \alpha)(G_{2,d} - G_{2,d}(t)) \sim \frac{2a(1 - \alpha)\gamma_d h_d^2}{d - 2} t^{-d/2+1}, \quad (2.1)$$

$$k_d(t) := K'_d(t) \sim a(1 - \alpha)\gamma_d h_d^2 t^{-d/2}. \quad (2.2)$$

Обозначим

$$F_{\mathbf{y}}(t; s_1, s_2) := \mathbf{E}_{\mathbf{y}} s_1^{\mu_0(t)} s_2^{\mu_+(t)}, \quad 0 \leq s_1, s_2 \leq 1,$$

вероятностную производящую функцию числа частиц в начале координат и вне него в момент $t \geq 0$ в ветвящемся случайном блуждании, порожденном одной частицей, находившейся в момент 0 в точке $\mathbf{y}$. По формуле полной вероятности находим

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{0}}(t; s_1, s_2) &= s_1(1 - G_1(t)) + \int_0^t \alpha f(F_{\mathbf{0}}(t - u; s_1, s_2)) dG_1(u) \\ &\quad + (1 - \alpha) \int_0^t \left(\sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{0}} \pi_{\mathbf{y}} F_{\mathbf{y}}(t - u; s_1, s_2) \right) dG_1(u), \end{aligned}$$

в то время как для $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$

$$F_{\mathbf{y}}(t; s_1, s_2) = s_2(1 - G^{\mathbf{y}}(t)) + \int_0^t F_{\mathbf{0}}(t - u; s_1, s_2) dG^{\mathbf{y}}(u).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{0}}(t; s_1, s_2) &= s_1(1 - G_1(t)) + \int_0^t \alpha f(F_{\mathbf{0}}(t - u; s_1, s_2)) dG_1(u) \\ &\quad + (1 - \alpha) s_2 \int_0^t \left(\sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{0}} \pi_{\mathbf{y}} (1 - G^{\mathbf{y}}(t - u)) \right) dG_1(u) \\ &\quad + (1 - \alpha) \int_0^t \left(\sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{0}} \pi_{\mathbf{y}} \int_0^{t-u} F_{\mathbf{0}}(t - u - v; s_1, s_2) dG^{\mathbf{y}}(v) \right) dG_1(u) \\ &= s_1(1 - G_1(t)) + \int_0^t \alpha f(F_{\mathbf{0}}(t - u; s_1, s_2)) dG_1(u) \\ &\quad + (1 - \alpha) s_2 \int_0^t (1 - G_{2,d}(t - u)) dG_1(u) \\ &\quad + (1 - \alpha) \int_0^t F_{\mathbf{0}}(t - u; s_1, s_2) d(G_1 * G_{2,d}(u)). \end{aligned}$$

Используя это соотношение и полагая $F(t; s) := F_0(t; s, 1) = \mathbf{E}_0 s^{\mu_0(t)}$, мы видим, что для всех $0 \leq s \leq 1$

$$\begin{aligned} F(t; s) &= s(1 - G_1(t)) + (1 - \alpha)(1 - h_d)(1 - G_2(\cdot)) * G_1(t) \\ &\quad + \int_0^t \alpha f(F(t - u; s)) dG_1(u) + (1 - \alpha)h_d G_1(t) \\ &\quad + \int_0^t (1 - \alpha)(1 - h_d)F(t - u; s) d(G_1 * G_2(u)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда, вводя обозначения $q(t; s) := 1 - F(t; s)$ и

$$\Phi(x) := f'(1)x - (1 - f(1 - x)) =: x\Psi(x) \sim \frac{f^{(2)}(1)}{2}x^2, \quad x \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

легко вывести, что при всех $0 \leq s \leq 1$

$$q(t; s) = (1 - s)(1 - G_1(t)) + q(\cdot; s) * K(t) - \alpha\Phi(q(\cdot; s)) * G_1(t). \quad (2.5)$$

Обозначим $q(t) := \mathbf{P}(\mu_0(t) > 0) = q(t; 0)$. Имеем

$$q(t) = 1 - G_1(t) + q * K(t) - \alpha\Phi(q(\cdot)) * G_1(t), \quad t \geq 0.$$

Заметим, что

$$k_d(t) = \alpha f'(1)e^{-t} + (1 - \alpha)(1 - h_d)(G_1 * G_2(t))'.$$

Таким образом,

$$q(t) = 1 - G_1(t) + \int_0^t q(t - u)(k_d(u) - \alpha\Psi(q(t - u))e^{-u})du. \quad (2.6)$$

Предыдущие рассуждения верны для любой размерности d . Теперь мы сосредоточимся на случае $d = 4$ и напомним, что в силу (2.2)

$$k_4(t) \sim c_4 t^{-2} \quad (2.7)$$

при $t \rightarrow \infty$, где $c_4 := a(1 - \alpha)\gamma_4 h_4^2 > 0$. Эта асимптотическая формула дает нам возможность доказать следующее утверждение.

Лемма 2.4. Для любых фиксированных $\varepsilon \in (0, 1)$ и $p \in (0, 1]$ при $t \rightarrow \infty$

$$I := \int_0^{t\varepsilon} \frac{\ln^p(t - u + 1)}{t - u + 1} k_4(u) du = \frac{\ln^p(t + 1)}{t + 1} + \frac{c_4 \ln^{1+p} t}{t^2} (1 + o(1)), \quad (2.8)$$

$$I^* := \int_{t\varepsilon}^t \frac{\ln^p(t - u + 1)}{t - u + 1} k_4(u) du = \frac{c_4 \ln^{1+p} t}{(1 + p)t^2} + o\left(\frac{\ln^{1+p} t}{t^2}\right), \quad (2.9)$$

$$\int_0^t \frac{\ln^p(t - u + 1)}{t - u + 1} k_4(u) du = \frac{\ln^p(t + 1)}{t + 1} + c_4 \frac{2 + p}{1 + p} (1 + o(1)) \frac{\ln^{1+p} t}{t^2}. \quad (2.10)$$

Доказательство. Ясно, что соотношение (2.10) следует из оценок (2.8) и (2.9). Для доказательства представления (2.8) мы воспользуемся следующими разложениями, справедливыми при $0 \leq u \leq \varepsilon t$:

$$\begin{aligned}\ln^p(t - u + 1) &= \left(\ln(t + 1) - \frac{u}{t} + O\left(\frac{u^2 + u}{t^2}\right) \right)^p \\ &= \ln^p(t + 1) \left(1 - \frac{pu}{t \ln(t + 1)} + O\left(\frac{u^2 + u}{t^2 \ln(t + 1)}\right) \right)\end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{t - u + 1} = \frac{1}{t + 1} \left(1 + \frac{u}{t} + O\left(\frac{u^2 + 1}{t^2}\right) \right),$$

которые влекут

$$\begin{aligned}\frac{\ln^p(t - u + 1)}{t - u + 1} &= \frac{\ln^p(t + 1)}{t + 1} + \frac{u \ln^p t}{t^2} + O\left(\frac{(u^2 + u) \ln^p t}{t^3}\right) \\ &\quad - \frac{pu}{t^2 \ln^{1-p}(t + 1)} + O\left(\frac{u^2 + u}{t^3 \ln^{1-p}(t + 1)}\right).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}I &= \frac{\ln^p(t + 1)}{t + 1} \int_0^{t\varepsilon} k_4(u) du + \frac{\ln^p t}{t^2} \int_0^{t\varepsilon} u k_4(u) du \\ &\quad + O\left(\frac{\ln^p t}{t^3}\right) \int_0^{t\varepsilon} (u^2 + 1) k_4(u) du + O\left(\frac{\ln^{p-1}(t + 1)}{t^2}\right) \int_0^{t\varepsilon} u k_4(u) du \\ &= \frac{\ln^p(t + 1)}{t + 1} + \frac{c_4 \ln^{1+p} t}{t^2} (1 + o(1)) + O\left(\frac{\ln^p t}{t^2}\right) \\ &= \frac{\ln^p(t + 1)}{t + 1} + \frac{c_4 \ln^{1+p} t}{t^2} (1 + o(1)),\end{aligned}$$

что доказывает (2.8). Остается убедиться в справедливости равенства (2.9). Заметим, что

$$I^* = c_4(1 + o(1)) \int_{t\varepsilon}^t \frac{\ln^p(t - u + 1)}{t - u + 1} \frac{1}{u^2} du.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\int_{t\varepsilon}^t \frac{\ln^p(t - u + 1)}{t - u + 1} \frac{1}{u^2} du &= \int_0^{t(1-\varepsilon)} \frac{\ln^p(u + 1)}{u + 1} \frac{1}{(t - u)^2} du \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^{t(1-\varepsilon)} \frac{\ln^p(u + 1)}{u + 1} du + O\left(\frac{1}{t^3} \int_0^{t(1-\varepsilon)} \ln^p(u + 1) du\right) \\ &= \left(\frac{1}{1 + p} + o(1) \right) \frac{\ln^{1+p} t}{t^2},\end{aligned}$$

что доказывает (2.9), а следовательно, и лемму.

Положим

$$I_k(t) := \int_2^{t-2} \frac{(t-u)^{k-1} \delta_1(t-u) \delta_2(u)}{\ln^{2k}(t-u)} \frac{du}{\ln u}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ обозначают ограниченные функции такие, что $\delta_1(t) \sim 1$ и $\delta_2(t) \sim 1$ при $t \rightarrow \infty$.

Мы завершаем этот пункт следующей оценкой для интеграла $I_k(t)$.

Лемма 2.5. Для любого натурального $k \geq 1$ при $t \rightarrow \infty$

$$I_k(t) = \frac{1 + o(1)}{k} \frac{t^k}{\ln^{2k+1} t}.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$. Ясно, что при $0 \leq u \leq \varepsilon t$

$$\ln(t-u) = \ln t + O(1),$$

в то время как для $t \geq u \geq \varepsilon t$

$$\ln u = \ln t + O(1).$$

Легко видеть, что

$$I_1(t) = \frac{1 + o(1)}{\ln^2 t} \int_2^{t/2} \frac{1}{\ln u} du + \frac{1 + o(1)}{\ln t} \int_0^{t/2} \frac{1}{\ln^2 u} du = (1 + o(1)) \frac{t}{\ln^3 t}.$$

Далее, при $k \geq 2$

$$I_k(t) = \frac{1 + o(1)}{\ln^{2k} t} \int_2^{t\varepsilon} \frac{(t-u)^{k-1}}{\ln u} du + \frac{1 + o(1)}{\ln t} \int_{t\varepsilon}^{t-2} \frac{(t-u)^{k-1}}{\ln^{2k}(t-u)} du.$$

Для больших значений t

$$\int_2^{\varepsilon t} \frac{(t-u)^{k-1}}{\ln u} du \leq 2t^{k-1} \frac{\varepsilon t}{\ln t},$$

в то время как

$$\int_{\varepsilon t}^{t-2} \frac{(t-u)^{k-1}}{\ln^{2k}(t-u)} du = \int_2^{t(1-\varepsilon)} \frac{u^{k-1}}{\ln^{2k} u} du \sim \frac{1}{k} \frac{(1-\varepsilon)^k t^k}{\ln^{2k} t}.$$

Отсюда, переходя к пределу сначала при $t \rightarrow \infty$, а затем при $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем желаемое соотношение.

3. Доказательства основных результатов. Вначале мы исследуем асимптотическое поведение моментов

$$P_k(t) := \mathbf{E} \mu_0^{[k]}(t),$$

где $x^{[k]} = x(x-1) \cdots (x-k+1)$, предполагая, что производящая функция числа потомков бесконечно дифференцируема в точке $s = 1$. Для этого нам понадобится классическая формула Фaa ди Бруно для n -й производной сложной функции $g(h(s))$ (см., например, [5]):

$$\begin{aligned} \frac{d^n g(h(s))}{ds^n} &= g'(h(s))h^{(n)}(s) + \sum_{k=2}^n g^{(k)}(h(s)) \\ &\times \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_{n-1}=k \\ j_1+2j_2+\dots+(n-1)j_{n-1}=n}} \frac{n!}{j_1!j_2!\dots j_{n-1}!} \left(\frac{h^{(1)}(s)}{1!}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{h^{(n-1)}(s)}{(n-1)!}\right)^{j_{n-1}}. \end{aligned}$$

Лемма 3.1. Если производящая функция $f(s)$ удовлетворяет условию (II) и бесконечно дифференцируема в точке $s = 1$, то для любого фиксированного $n \geq 1$

$$P_n(t) \sim n! \left(\frac{\alpha f^{(2)}(1)}{2} \right)^{n-1} \frac{1}{c_4^{2n-1}} \frac{t^{n-1}}{\ln^{2n-1} t}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Доказательство. Дифференцируя обе части (2.3), имеем для всех $t \geq 0$

$$\begin{aligned} P_1(t) &= 1 - G_1(t) + \int_0^t \alpha f'(1) P_1(t-u) dG_1(u) \\ &+ \int_0^t (1-\alpha)(1-h_4) P_1(t-u) d(G_1 * G_2(u)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$P_1(t) = 1 - G_1(t) + \int_0^t P_1(t-u) dK(u) = (1 - G_1) * V_K(t),$$

где функция

$$V_K(t) = \sum_{j=0}^{\infty} K^{*j}(t)$$

есть функция восстановления, порожденная распределением $K(t)$ (напомним, что $K(t) := \alpha f'(1)G_1(t) + (1-\alpha)(1-h_4)G_1 * G_2(t)$). Так как

$$1 - K(t) \sim c_4 t^{-1},$$

то теорема 3 работы [8] дает

$$P_1(t) \sim \frac{1}{c_4 \ln t}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Поскольку $G_1(t) = 1 - e^{-t}$, то

$$\frac{d}{dt} (G_1 * V_K(t)) = (1 - G_1) * V_K(t) = P_1(t). \quad (3.3)$$

Далее, полагая $F^{(n)}(t; s) = \partial^n F(t; s) / \partial^n s$ при $n \geq 2$, имеем

$$\begin{aligned} F^{(n)}(t; s) &= \int_0^t \alpha \frac{d^n f(F(t-u; s))}{ds^n} dG_1(u) \\ &\quad + \int_0^t (1-\alpha)(1-h_4) F^{(n)}(t-u; s) d(G_1 * G_2(u)) \end{aligned}$$

или, в соответствии с формулой Фаа ди Бруно для $s = 1$,

$$P_n(t) = \alpha \int_0^t H_n(t-u) dG_1(u) + \int_0^t P_n(t-u) dK(u), \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} H_n(t) &:= \sum_{k=2}^n f^{(k)}(1) \\ &\quad \times \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_{n-1}=k \\ j_1+2j_2+\dots+(n-1)j_{n-1}=n}} \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_{n-1}!} \left(\frac{P_1(t)}{1!} \right)^{j_1} \dots \left(\frac{P_{n-1}(t)}{(n-1)!} \right)^{j_{n-1}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решая уравнение восстановления (3.4) относительно функции $P_n(t)$, находим, что

$$P_n(t) = \alpha \int_0^t H_n(t-u) d(G_1 * V_K(u)),$$

или, ввиду (3.3),

$$P_n(t) = \alpha \int_0^t H_n(t-u) P_1(u) du.$$

При $n = 2$ имеем

$$P_2(t) = \alpha f^{(2)}(1) \int_0^t P_1^2(t-u) P_1(u) du.$$

В силу леммы 2.5 это приводит к соотношению

$$P_2(t) \sim \frac{\alpha f^{(2)}(1)}{c_4^3} I_1(t) \sim \frac{\alpha f^{(2)}(1)}{c_4^3} \frac{t}{\ln^3 t} = 2! \frac{\alpha f^{(2)}(1)}{2c_4^3} \frac{t}{\ln^3 t}.$$

Воспользуемся теперь индукцией. Предположим, что при всех $i < n$

$$P_i(t) \sim i! \frac{(\alpha f^{(2)}(1))^{i-1}}{2^{i-1} c_4^{2^{i-1}}} \frac{t^{i-1}}{\ln^{2^{i-1}} t}.$$

Тогда для $2 \leq k \leq n$ при $t \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_{n-1}=k \\ j_1+2j_2+\dots+(n-1)j_{n-1}=n}} \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_{n-1}!} \left(\frac{P_1(t)}{1!} \right)^{j_1} \dots \left(\frac{P_{n-1}(t)}{(n-1)!} \right)^{j_{n-1}} \\
& \sim \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_{n-1}=k \\ j_1+2j_2+\dots+(n-1)j_{n-1}=n}} \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_{n-1}!} \left(\frac{1}{c_4 \ln t} \right)^{j_1} \\
& \quad \times \dots \times \left(\frac{(\alpha f^{(2)}(1))^{n-2}}{2^{n-2} c_4^{2n-3}} \frac{t^{n-2}}{\ln^{2n-3} t} \right)^{j_{n-1}} \\
& = \left(\frac{\alpha f^{(2)}(1)}{2} \right)^{n-k} \frac{1}{c_4^{2n-k}} \frac{t^{n-k}}{\ln^{2n-k} t} \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_{n-1}=k \\ j_1+2j_2+\dots+(n-1)j_{n-1}=n}} \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_{n-1}!}.
\end{aligned}$$

Можно проверить, что для любого $n \geq 2$

$$\sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_{n-1}=2 \\ j_1+2j_2+\dots+(n-1)j_{n-1}=n}} \frac{1}{j_1! j_2! \dots j_{n-1}!} = \frac{n-1}{2}.$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
H_n(t) & \sim f^{(2)}(1) \left(\frac{\alpha f^{(2)}(1)}{2} \right)^{n-2} \frac{1}{c_4^{2n-2}} \frac{t^{n-2}}{\ln^{2n-2} t} \\
& \quad \times \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_{n-1}=2 \\ j_1+2j_2+\dots+(n-1)j_{n-1}=n}} \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_{n-1}!} \\
& = n! \frac{f^{(2)}(1)}{2} \left(\frac{\alpha f^{(2)}(1)}{2} \right)^{n-2} \frac{n-1}{c_4^{2n-2}} \frac{t^{n-2}}{\ln^{2n-2} t}.
\end{aligned}$$

Следовательно, в силу леммы 2.5

$$\begin{aligned}
P_n(t) & = \alpha \int_0^t H_n(t-u) P_1(u) du \\
& \sim n! \left(\frac{\alpha f^{(2)}(1)}{2} \right)^{n-1} \frac{n-1}{c_4^{2n-1}} \int_2^{t-2} \frac{(t-u)^{n-2}}{\ln^{2n-2}(t-u)} \frac{1}{\ln u} du \\
& \sim n! \left(\frac{\alpha f^{(2)}(1)}{2} \right)^{n-1} \frac{1}{c_4^{2n-1}} \frac{t^{n-1}}{\ln^{2n-1} t},
\end{aligned}$$

что и требовалось.

Следствие 3.1. Если производящая функция $f(s)$ удовлетворяет условию (II), то

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{tq(t)}{\ln t} \geq \frac{c_4}{\alpha f^{(2)}(1)}. \quad (3.6)$$

Доказательство. Из доказательства леммы 3.1 ясно, что для справедливости асимптотического представления (3.1) при $n = 1, 2$ достаточно выполнения условия $f^{(2)}(1) < \infty$. Отсюда и из неравенства Ляпунова

$$q(t) = \mathbf{P}(\mu_0(t) > 0) \geq \frac{(\mathbf{E} \mu_0(t))^2}{\mathbf{E} \mu_0^2(t)} \sim \frac{\ln t}{t} \frac{c_4}{\alpha f^{(2)}(1)}$$

легко следует необходимое утверждение.

Прежде чем переходить к нахождению точной асимптотики функции $q(t)$ при $t \rightarrow \infty$, выведем сначала грубую оценку сверху для этой функции.

Лемма 3.2. *Справедлива оценка*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{tq(t)}{\ln t} < \infty.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $u > 0$. Для $0 \leq x \leq 1$ введем функцию

$$\begin{aligned} T(x) &:= xk_4(u) - \alpha\Phi(x)e^{-u} \\ &= \alpha(f'(1)x - \Phi(x))e^{-u} + x(1 - \alpha)(1 - h_4)(G_1 * G_2)'(u). \end{aligned}$$

Вспоминая (2.4), имеем

$$T'(x) = \alpha f'(1 - x)e^{-u} + (1 - \alpha)(1 - h_4)(G_1 * G_2)'(u) > 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Следовательно, функция $T(x)$ монотонно возрастает при $x \in (0, 1)$. В дальнейшем мы будем использовать этот факт несколько раз.

Запишем формальное представление

$$q(t) = \beta(t) \frac{\ln(t+1)}{t+1}, \quad t \geq 0,$$

и положим

$$q(u, t) := \beta(t) \frac{\ln(t-u+1)}{t-u+1}, \quad 0 \leq u \leq t.$$

Допустим, что заявленное утверждение не верно, т.е.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{tq(t)}{\ln t} = \infty. \quad (3.7)$$

Если выполнено соотношение (3.7), то существует последовательность $t_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, такая, что $\beta(t_k) = \sup_{u \leq t_k} \beta(u)$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta(t_k) =$

∞ . Следовательно, для достаточно больших значений $t = t_k$ (для простоты мы опускаем нижний индекс) $\beta(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \beta(s) > 1$. Опираясь на равенство (2.9) при $p = 1$, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t/2}^t q(t-u)(k_4(u) - \alpha \Psi(q(t-u))e^{-u}) du \right| \\ & \leq \int_{t/2}^t \beta(t-u) \frac{\ln(t-u+1)}{t-u+1} k_4(u) du + \alpha \int_{t/2}^t \Phi(q(t-u))e^{-u} du \\ & \leq \beta(t) \frac{2c_4}{t^2} \ln^2 t, \end{aligned} \quad (3.8)$$

поскольку $\beta(t) > 1$ и $\alpha \int_{t/2}^t \Phi(q(t-u))e^{-u} du \leq \alpha f'(1)e^{-t/2} = o(t^{-2} \ln^2 t)$.

Заметим, что $q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В силу (3.2) мы имеем грубую оценку: $q(t) = \mathbf{P}(\mu_0(t) > 0) \leq \mathbf{E} \mu_0(t) = P_1(t) \sim 1/(c_4 \ln t)$. Отсюда следует, что при $0 \leq u \leq t/2$

$$\begin{aligned} q(t-u) &= \beta(t-u) \frac{\ln(t-u+1)}{t-u+1} \leq \beta(t) \frac{\ln(t-u+1)}{t-u+1} \\ &= q(u, t) \leq \beta(t) \frac{\ln(t/2)}{t/2} \leq 3\beta(t) \frac{\ln t}{t} = 3q(t) \leq 1 \end{aligned}$$

для всех достаточно больших t . Следовательно, при $0 \leq u \leq t/2$ справедливо неравенство

$$q(t-u)(k_4(u) - \alpha \Psi(q(t-u))e^{-u}) \leq q(u, t)(k_4(u) - \alpha \Psi(q(u, t))e^{-u}).$$

Это, в силу (2.6) и (3.8), влечет цепочку оценок

$$\begin{aligned} & \beta(t) \frac{\ln(t+1)}{t+1} = q(t) \\ &= 1 - G_1(t) + \int_0^t q(t-u)(k_d(u) - \alpha \Psi(q(t-u))e^{-u}) du \\ &\leq \beta(t) \frac{3c_4}{t^2} \ln^2 t + \int_0^{t/2} \beta(t-u) \frac{\ln(t-u+1)}{t-u+1} \\ &\quad \times \left(k_4(u) - \alpha \Psi\left(\beta(t-u) \frac{\ln(t-u+1)}{t-u+1}\right) e^{-u} \right) du \\ &\leq \beta(t) \frac{3c_4}{t^2} \ln^2 t \\ &\quad + \beta(t) \int_0^{t/2} \frac{\ln(t-u+1)}{t-u+1} \left(k_4(u) - \alpha \Psi\left(\beta(t) \frac{\ln(t-u+1)}{t-u+1}\right) e^{-u} \right) du. \end{aligned}$$

Ввиду (2.8) имеем

$$\int_0^{t/2} \frac{\ln(t-u+1)}{t-u+1} k_4(u) du \leq \frac{\ln(t+1)}{t+1} + 2c_4 \frac{\ln^2 t}{t^2} \quad (3.9)$$

и, для малых значений $\delta > 0$ и достаточно больших t ,

$$\begin{aligned} & \int_0^{t/2} \frac{\ln(t-u+1)}{t-u+1} \alpha \Psi \left(\beta(t) \frac{\ln(t-u+1)}{t-u+1} \right) e^{-u} du \\ & \geq (1-\delta) \beta(t) \frac{\alpha f^{(2)}(1)}{2} \int_0^{t/2} \frac{\ln^2(t-u+1)}{(t-u+1)^2} e^{-u} du \\ & \geq (1-2\delta) \beta(t) \frac{\alpha f^{(2)}(1)}{2} \frac{\ln^2 t}{t^2}. \end{aligned}$$

В результате мы получим неравенство

$$\begin{aligned} \beta(t) \frac{\ln(t+1)}{t+1} & \leq \beta(t) \left(\frac{\ln(t+1)}{t+1} + 5c_4 \frac{\ln^2 t}{t^2} \right) \\ & \quad - (1-2\delta) \beta^2(t) \frac{\alpha f^{(2)}(1)}{2} \frac{\ln^2 t}{t^2}, \end{aligned}$$

которое после очевидных упрощений приводит к соотношению

$$(1-2\delta) \beta^2(t) \frac{\alpha f^{(2)}(1)}{2} \leq 5c_4 \beta(t),$$

что невозможно, если $\beta(t) \rightarrow \infty$. Следовательно, $\limsup_{t \rightarrow \infty} \beta(t) < \infty$, что и доказывает лемму.

Существенным шагом в доказательстве теоремы 1.1 является следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Если $d = 4$, то*

$$q(t) = C \frac{\ln t}{t} (1 + o(1)), \quad (3.10)$$

где

$$C := \frac{3c_4}{\alpha f^{(2)}(1)}. \quad (3.11)$$

Доказательство. Воспользуемся формальным представлением

$$q(t) = \frac{\ln(t+1)}{t+1} \left(C + \frac{\rho(t)}{\sqrt{\ln(t+1)}} \right) = C \frac{\ln(t+1)}{t+1} + \frac{\rho(t) \sqrt{\ln(t+1)}}{t+1}.$$

Заметим, что, согласно следствию 3.1,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho(t)}{\sqrt{\ln t}} = C_0 \geq -\frac{2}{3} C \quad (3.12)$$

и, в силу леммы 3.2,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho(t)}{\sqrt{\ln t}} \leq C_1 < \infty$$

для некоторой константы $C_1 > 0$. Если функция $\rho(t)$ ограничена, то предложение доказано. Поэтому предположим, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \infty \quad \text{и} \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = -\infty.$$

Ясно, что если мы докажем желаемое утверждение для этого случая, то для случаев, когда один из этих пределов конечен, необходимое утверждение также будет справедливо.

Предположим сначала, что $\limsup_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \infty$, и введем множество

$$\mathcal{A}_+ := \left\{ t \in [0, \infty) : \rho(t) = \sup_{v \leq t} \rho(v) \right\}.$$

Тогда найдется неограниченная последовательность $(t_k) \in \mathcal{A}_+$ такая, что $\rho(t_k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Наши дальнейшие рассуждения справедливы для больших значений $t \in \mathcal{A}_+$. В этом случае можно предполагать, что $\rho(t) > 1$. Для $0 \leq u \leq t$ положим

$$Q(u, t) := C \frac{\ln(t - u + 1)}{t - u + 1} + \frac{\rho(t) \sqrt{\ln(t - u + 1)}}{t - u + 1} \geq q(t - u).$$

Зафиксируем достаточно малое число $\varepsilon > 0$. Ясно, что для $0 \leq u \leq t\varepsilon$ и достаточно больших значений t

$$Q(u, t) \leq C \frac{\ln(t + 1)}{t(1 - \varepsilon)} + \frac{\rho(t) \sqrt{\ln(t + 1)}}{t(1 - \varepsilon)} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} q(t) < 1,$$

поскольку $q(t) \rightarrow 0$. Используя еще раз монотонность функции $(0, 1) \ni x \mapsto xk_4(u) - \alpha\Phi(x)e^{-u}$ (аналогично тому, как это было сделано в лемме 3.2), мы приходим к неравенству

$$q(t - u)(k_4(u) - \alpha\Psi(q(t - u))e^{-u}) \leq Q(u, t)(k_4(u) - \alpha\Psi(Q(u, t))e^{-u}).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_{t\varepsilon}^t q(t - u)k_4(u) du \\ &\quad + \int_0^{t\varepsilon} q(t - u)(k_4(u) - \alpha\Psi(q(t - u))e^{-u}) du + o\left(\frac{\ln^2 t}{t^2}\right) \\ &\leq \int_{t\varepsilon}^t Q(u, t)k_4(u) du + \int_0^{t\varepsilon} Q(u, t)(k_4(u) - \alpha\Psi(Q(u, t))e^{-u}) du + o\left(\frac{\ln^2 t}{t^2}\right) \\ &= \int_0^t Q(u, t)k_4(u) du - \alpha \int_0^{t\varepsilon} \Phi(Q(u, t))e^{-u} du + o\left(\frac{\ln^2 t}{t^2}\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Оценим теперь интегралы в правой части (3.13). Отталкиваясь от оценки (2.10) при $p = 1$ и $p = 1/2$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t Q(u, t) k_4(u) du &= C \int_0^t \frac{\ln(t-u+1)}{t-u+1} k_4(u) du \\ &\quad + \rho(t) \int_0^t \frac{\sqrt{\ln(t-u+1)}}{t-u+1} k_4(u) du \\ &= C \frac{\ln(t+1)}{t+1} + \frac{3C c_4 \ln^2 t}{2t^2} (1 + o(1)) \\ &\quad + \frac{\rho(t) \sqrt{\ln(t+1)}}{t+1} + \frac{5c_4 \rho(t) \ln^{3/2} t}{3t^2} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Поскольку все моменты распределения с плотностью e^{-u} , $u \geq 0$, конечны и функция $u^k e^{-u}$ быстро убывает на бесконечности для любого $k \geq 0$, то

$$\begin{aligned} -\alpha \int_0^{t^\varepsilon} \Phi(Q(u, t)) e^{-u} du &= -\alpha \Phi(q(t)) (1 + o(1)) = -\alpha \frac{f^{(2)}(1)}{2} q^2(t) (1 + o(1)) \\ &= -\alpha \frac{f^{(2)}(1)}{2} \left(C^2 \frac{\ln^2 t}{t^2} + 2C \frac{\rho(t) \ln^{3/2} t}{t^2} + \frac{\rho^2(t) \ln t}{t^2} \right) (1 + o(1)) \\ &= -\alpha \frac{f^{(2)}(1)}{2} \left(C^2 \frac{\ln^2 t}{t^2} + 2C \frac{\rho(t) \ln^{3/2} t}{t^2} + \frac{\rho^2(t) \ln t}{t^2} \right) + o\left(\frac{\ln^2 t}{t^2}\right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подставляя эти выражения в (3.13), мы видим, что для всех достаточно малых значений $\delta > 0$

$$\begin{aligned} C \frac{\ln(t+1)}{t+1} + \frac{\rho(t) \sqrt{\ln(t+1)}}{t+1} &= q(t) \\ &\leq \delta \frac{\ln^2 t}{t^2} + C \frac{\ln(t+1)}{t+1} + \frac{3C c_4 \ln^2 t}{2t^2} + \frac{\rho(t) \sqrt{\ln(t+1)}}{t+1} \\ &\quad + \frac{5c_4 \rho(t) \ln^{3/2} t}{3t^2} - \alpha \frac{f^{(2)}(1)}{2} \left(C^2 \frac{\ln^2 t}{t^2} + 2C \frac{\rho(t) \ln^{3/2} t}{t^2} + \frac{\rho^2(t) \ln t}{t^2} \right), \end{aligned}$$

что, в силу определения (3.11), приводит после естественных преобразований к оценке

$$\frac{\alpha f^{(2)}(1) \rho(t)}{2\sqrt{\ln t}} \left(\frac{8}{9} C + \frac{\rho(t)}{\sqrt{\ln t}} \right) \leq \delta.$$

Поскольку $\rho(t) > 1$, то $\alpha f^{(2)}(1) \rho(t) / (2\sqrt{\ln t}) \leq 9\delta/8$ и, таким образом,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty, t \in \mathcal{A}_+} \frac{\rho(t)}{\sqrt{\ln t}} = 0.$$

Положим $t_+(u) = \sup\{t \leq u: t \in \mathcal{A}_+\}$. Ясно, что $\rho(u) \leq \rho(t_+(u))$. Отсюда

$$\begin{aligned} \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{u q(u)}{\ln u} &= C + \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\rho(u)}{\sqrt{\ln u}} \leq C + \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{\rho(t_+(u))}{\sqrt{\ln t_+(u)}} \\ &= C + \limsup_{t \rightarrow \infty, t \in \mathcal{A}_+} \frac{\rho(t)}{\sqrt{\ln t}} = C. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для вывода оценки снизу предположим, что $\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = -\infty$ (в противном случае доказывать нечего), и обозначим

$$\mathcal{A}_- := \left\{ t \in [0, \infty) : \rho(t) = \inf_{v \leq t} \rho(v) \right\}.$$

Наши последующие рассуждения справедливы для больших значений $t \in \mathcal{A}_-$. При $0 \leq u \leq t$ имеем

$$Q(u, t) = C \frac{\ln(t - u + 1)}{t - u + 1} + \frac{\rho(t) \sqrt{\ln(t - u + 1)}}{t - u + 1} \leq q(t - u) \leq 1.$$

Зафиксируем малое значение $\varepsilon > 0$, и пусть $0 \leq u \leq t\varepsilon$. Ввиду (3.12), получаем

$$Q(u, t) \geq C \frac{\ln(t + 1)}{t + 1} + \frac{\rho(t) \sqrt{\ln t(1 - \varepsilon)}}{t(1 - \varepsilon)} \geq \frac{1}{4} C \frac{\ln(t + 1)}{t + 1} > 0.$$

Аналогично тому, как это было сделано в (3.13), мы снова воспользуемся монотонностью, однако на этот раз для вывода оценки снизу, и получим

$$q(t) \geq \int_0^t Q(u, t) k_4(u) du - \alpha \int_0^{t\varepsilon} \Phi(Q(u, t)) e^{-u} du + o\left(\frac{\ln^2 t}{t^2}\right).$$

Отталкиваясь от оценок (2.10) при $p = 1$ и $p = 1/2$ (и используя асимптотическое соотношение $|\rho(t)| = O(\sqrt{\ln t})$), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \int_0^t Q(u, t) k_4(u) du &= C \frac{\ln(t + 1)}{t + 1} + \frac{3Cc_4 \ln^2 t}{2t^2} + \frac{\rho(t) \sqrt{\ln(t + 1)}}{t + 1} \\ &\quad + \frac{5c_4 \rho(t) \ln^{3/2} t}{3t^2} + o\left(\frac{\ln^2 t}{t^2}\right). \end{aligned}$$

Это представление в сочетании с (3.14) влечет для любого достаточно малого значения $\delta > 0$ неравенство

$$\begin{aligned} C \frac{\ln(t + 1)}{t + 1} + \frac{\rho(t) \sqrt{\ln(t + 1)}}{t + 1} &= q(t) \\ &\geq C \frac{\ln(t + 1)}{t + 1} + \frac{3Cc_4 \ln^2 t}{2t^2} + \frac{\rho(t) \sqrt{\ln(t + 1)}}{t + 1} + \frac{5c_4 \rho(t) \ln^{3/2} t}{3t^2} \\ &\quad - \alpha \frac{f^{(2)}(1)}{2} \left(C^2 \frac{\ln^2 t}{t^2} + 2C \frac{\rho(t) \ln^{3/2} t}{t^2} + \frac{\rho^2(t) \ln t}{t^2} \right) - \delta \frac{\ln^2 t}{t^2}, \end{aligned}$$

которое, аналогично предыдущему, после естественных упрощений приводит к оценке

$$\delta \geq -\frac{\rho(t) \alpha f^{(2)}(1)}{2\sqrt{\ln t}} \left(\frac{8}{9} C + \frac{\rho(t)}{\sqrt{\ln t}} \right).$$

Отсюда, учитывая (3.12), нетрудно заключить, что для всех достаточно больших значений t

$$\delta \geq -\frac{\rho(t)\alpha f^{(2)}(1)}{2\sqrt{\ln t}} \frac{1}{9} C.$$

Поскольку величина δ может быть выбрана сколь угодно малой, то

$$\limsup_{t \rightarrow \infty, t \in \mathcal{A}_-} \frac{|\rho(t)|}{\sqrt{\ln t}} = 0.$$

Положим $t_-(u) = \sup\{t \leq u: t \in \mathcal{A}_-\}$. Ясно, что $|\rho(u)| \leq |\rho(t_-(u))|$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{uq(u)}{\sqrt{\ln u}} &= C - \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{|\rho(u)|}{\sqrt{\ln u}} \geq C - \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{|\rho(t_-(u))|}{\sqrt{\ln t_-(u)}} \\ &= C - \limsup_{t \rightarrow \infty, t \in \mathcal{A}_-} \frac{|\rho(t)|}{\sqrt{\ln t}} = C. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Объединив (3.15) и (3.16), получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{tq(t)}{\ln t} = C,$$

что и доказывает предложение.

Теорема 3.1. *Предположим, что функция $f(s)$ бесконечно дифференцируема в точке $s = 1$ и удовлетворяет соотношению*

$$\alpha f'(1) + (1 - \alpha)(1 - h_4) = 1.$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\mu_0(t)q(t)}{P_1(t)} \leq x \mid \mu_0(t) > 0 \right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} (1 - e^{-2x/3}), \quad x > 0,$$

или, что то же,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[e^{-\lambda \mu_0(t)q(t)/P_1(t)} \mid \mu_0(t) > 0 \right] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{2}{2 + 3\lambda}, \quad \lambda \geq 0.$$

Доказательство. В силу леммы 3.1

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mu_0^n(t) &\sim n! \left(\frac{\alpha f^{(2)}(1)}{2} \right)^{n-1} \frac{1}{c_4^{2n-1}} \frac{t^{n-1}}{\ln^{2n-1} t} \\ &= \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} n! \left(\frac{\alpha f^{(2)}(1)}{3c_4} \frac{t}{\ln t} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{c_4 \ln t} \right)^n \\ &\sim \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} n! \frac{P_1^n(t)}{q^{n-1}(t)} = q(t) \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} n! \left(\frac{P_1(t)}{q(t)} \right)^n. \end{aligned}$$

Следовательно, при $t \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E} \left[\left(\frac{\mu_0(t)q(t)}{P_1(t)} \right)^n \mid \mu_0(t) > 0 \right] = \frac{1}{q(t)} \left(\frac{q(t)}{P_1(t)} \right)^n \mathbf{E} \mu_0^n(t) \rightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^n n!. \quad (3.17)$$

Таким образом, n -й момент условного распределения для любого $n \geq 1$ сходится к n -му моменту смеси (с вероятностями $2/3$ и $1/3$ соответственно) экспоненциального распределения с параметром $2/3$ (которое однозначно определяется своими моментами) и распределения, имеющего единичный атом в нуле. Отсюда следует утверждение теоремы.

Нашим следующим шагом будет обобщение теоремы 3.1 на случай произвольной вероятностной производящей функции $f(s)$ с конечным вторым моментом. Для этого нам понадобится следующая лемма об аппроксимации.

Лемма 3.3. Пусть $f(s)$ — произвольная вероятностная производящая функция такая, что $f'(1) > 0$ и $f^{(2)}(1) \in (0, \infty)$. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдутся две полиномиальные вероятностные производящие функции $f_-(s)$, $f_+(s)$ и константа $s_0 = s_0(f_-, f_+, \varepsilon) < 1$ такие, что

$$f_-(s) \leq f(s) \leq f_+(s) \quad \forall s \in (s_0, 1], \quad (3.18)$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) = f'(1),$$

$$\frac{f_+^{(2)}(1)}{1 + \varepsilon} \leq f^{(2)}(1) \leq \frac{f_-^{(2)}(1)}{1 - \varepsilon}. \quad (3.19)$$

Заметим, что с необходимостью $f_+^{(2)}(1) \geq f^{(2)}(1) \geq f_-^{(2)}(1)$.

Доказательство. Пусть N — целочисленная неотрицательная случайная величина с производящей функцией f . Рассмотрим лишь случай, когда множество значений случайной величины N неограничено, поскольку в противном случае доказывать нечего.

Зафиксируем достаточно малое значение $\varepsilon > 0$. Допустим, что найдутся две целочисленные неотрицательные ограниченные случайные величины N_1 и N_2 такие, что

$$\mathbf{E} N_1 = \mathbf{E} N_2 = \mathbf{E} N, \quad \mathbf{D}(N_1) < \mathbf{D}(N) < \mathbf{D}(N_2) \quad (3.20)$$

и

$$\mathbf{D}(N_2) - \varepsilon < \mathbf{D}(N) < \mathbf{D}(N_1) + \varepsilon. \quad (3.21)$$

Положим $f_-(s) := \mathbf{E} s^{N_1}$, $f_+(s) := \mathbf{E} s^{N_2}$ при $0 \leq s \leq 1$. Тогда утверждение (3.18) будет следовать из (3.20) на основе разложений трех интересующих нас производящих функций по формуле Тейлора в окрестности точки 1, в то время как (3.19) будет следовать из (3.21) в силу произвольности в выборе $\varepsilon > 0$.

Для построения случайных величин N_1 и N_2 , удовлетворяющих условиям (3.20) и (3.21), зафиксируем достаточно большое натуральное k такое, что $0 < \mathbf{E}(N(N-k)^+) \leq \varepsilon/3$ и $\mathbf{E}((N-k)^-) \geq 1$ (здесь $x^+ := \max(x, 0)$ и $x^- := \max(-x, 0)$ для действительного числа x). Поскольку $N = N \wedge k + (N-k)^+$, то элементарные подсчеты показывают, что

$$\mathbf{D}(N) = \mathbf{D}(N \wedge k) + \mathbf{D}((N-k)^+) + 2\mathbf{E}((N-k)^+) \mathbf{E}((N-k)^-).$$

Следовательно,

$$2\mathbf{E}((N-k)^+) \leq \mathbf{D}(N) - \mathbf{D}(N \wedge k) \leq 2\mathbf{E}(N(N-k)^+) \leq \frac{2\varepsilon}{3}. \quad (3.22)$$

Положим $r = \mathbf{E}((N-k)^+) > 0$. Ясно, что $r \leq k^{-1}\mathbf{E}(N(N-k)^+) \leq \varepsilon/3k < 1$. Выберем бернуллиевскую случайную величину B , не зависящую от N , для которой $\mathbf{P}(B=1) = r = 1 - \mathbf{P}(B=0)$. Положим $N_1 := N \wedge k + B$. Тогда $\mathbf{E}N_1 = \mathbf{E}N$. С другой стороны, из (3.22) следует, что $\mathbf{D}N \leq \mathbf{D}(N \wedge k) + 2\varepsilon/3 < \mathbf{D}N_1 + 2\varepsilon/3$, и $\mathbf{D}N_1 = \mathbf{D}(N \wedge k) + r(1-r) \leq \mathbf{D}(N \wedge k) + r \leq \mathbf{D}N - r$, поскольку $\mathbf{E}((N-k)^+) = r$. Таким образом, случайная величина N_1 удовлетворяет условиям (3.20) и (3.21).

Для построения желаемой искомой величины N_2 зафиксируем $\ell := \lfloor 3\mathbf{E}(N(N-k)^+) \mathbf{E}((N-k)^+) \rfloor$ и $b := \ell^{-1}\mathbf{E}((N-k)^+)$. Пусть $\tilde{B}$ — бернуллиевская случайная величина, не зависящая от N , для которой $\mathbf{P}(\tilde{B}=1) = b = 1 - \mathbf{P}(\tilde{B}=0)$. Положим $N_2 := N \wedge k + \ell \tilde{B}$. Ясно, что $\mathbf{E}N_2 = \mathbf{E}N$ и

$$\mathbf{D}N_2 = \mathbf{D}(N \wedge k) + \ell^2 b(1-b) < \mathbf{D}(N \wedge k) + 3\mathbf{E}(N(N-k)^+) \leq \mathbf{D}N + \varepsilon.$$

Заметим, что

$$\ell^2 b(1-b) \geq \frac{5}{2} \ell b \frac{\mathbf{E}(N(N-k)^+)}{\mathbf{E}((N-k)^+)} = \frac{5}{2} \mathbf{E}(N(N-k)^+).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{D}N_2 \geq \mathbf{D}(N \wedge k) + \frac{5}{2} \mathbf{E}(N(N-k)^+) \geq \mathbf{D}N + \frac{1}{2} \mathbf{E}(N(N-k)^+) > \mathbf{D}N.$$

Эти соотношения показывают, что случайная величина N_2 также удовлетворяет условиям (3.20) и (3.21), чем и завершается доказательство леммы.

Лемма 3.4. Пусть заданы два ветвящихся случайных блуждания с размножением частиц лишь в начале координат, производящие функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$ числа частиц в которых таковы, что

$$\alpha f'_i(1) + (1-\alpha)(1-h_4) = 1, \quad i = 1, 2,$$

и для некоторого числа $0 \leq s_0 < 1$,

$$f_1(s) \leq f_2(s) \quad \forall s_0 < s \leq 1.$$

Тогда соответствующие производящие функции $F^1(t; s)$ и $F^2(t; s)$ для числа частиц в начале координат в момент t удовлетворяют неравенству

$$F^1(t; s) \leq F^2(t; s) \quad (3.23)$$

для всех $s \in (s_0, 1]$.

Доказательство. Пусть $0 \leq s \leq 1$ и $t \geq 0$. Введем обозначение

$$\begin{aligned} L(f, F)(t; s) := & s(1 - G_1(t)) + (1 - \alpha)(1 - h_4)(1 - G_2(\cdot)) * G_1(t) \\ & + \int_0^t \alpha f(F(t - u; s)) dG_1(u) + (1 - \alpha)h_4 G_1(t) \\ & + \int_0^t (1 - \alpha)(1 - h_4)F(t - u; s) d(G_1 * G_2(u)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

и для $i = 1, 2$ положим

$$F_0^i(t; s) = s, \quad F_{n+1}^i(t; s) := L(f_i, F_n^i)(t; s).$$

Покажем индукцией по n , что

$$s \leq F_n^i(t; s) \leq F_{n+1}^i(t; s) \quad \forall s, 0 \leq s \leq 1.$$

Действительно, выражение

$$R_i(s) := \alpha f_i(s) + (1 - \alpha)(1 - h_4)s + (1 - \alpha)h_4$$

является вероятностной производящей функцией с $R_i'(1) = \alpha f_i'(1) + (1 - \alpha)(1 - h_4) = 1$. Следовательно, $R_i(s) \geq s$ для всех $s \in [0, 1]$. Используя этот факт, имеем

$$\begin{aligned} F_1^i(t; s) &= L(f_i, F_0^i)(t; s) = s(1 - G_1(t)) + (1 - \alpha)(1 - h_4)(1 - G_2(\cdot)) * G_1(t) \\ &\quad + \int_0^t \alpha f_i(s) dG_1(u) + (1 - \alpha)h_4 G_1(t) + \int_0^t (1 - \alpha)(1 - h_4)s d(G_1 * G_2(u)) \\ &= s(1 - G_1(t)) + (1 - \alpha)(1 - h_4)(1 - G_2(\cdot)) * G_1(t) + (1 - \alpha)h_4 G_1(t) \\ &\quad + \alpha f_i(s)G_1(t) + (1 - \alpha)(1 - h_4)sG_1 * G_2(t) \\ &= s(1 - G_1(t)) + (1 - s)(1 - \alpha)(1 - h_4)(1 - G_2(\cdot)) * G_1(t) + R_i(s)G_1(t) \\ &\geq s(1 - G_1(t)) + sG_1(t) = s. \end{aligned}$$

Если эти оценки верны для некоторого n , то, в силу монотонности,

$$F_{n+2}^i(t; s) = L(f_i, F_{n+1}^i)(t; s) \geq L(f_i, F_n^i)(t; s) = F_{n+1}^i(t; s) \geq s. \quad (3.25)$$

Покажем теперь, что если $s \in (s_0, 1]$, то

$$F_n^1(t; s) \leq F_n^2(t; s) \quad \forall n \geq 0. \quad (3.26)$$

Действительно, указанное неравенство верно при $n = 0$ и если оно верно для некоторого n , то, в силу (3.25), для $s \in (s_0, 1]$

$$F_{n+1}^1(t; s) = L(f_1, F_n^1)(t; s) \leq L(f_2, F_n^1)(t; s) \leq L(f_2, F_n^2)(t; s) = F_{n+1}^2(t; s).$$

Теперь, отталкиваясь от (3.26), мы можем перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ и получить (3.23). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Первая часть теоремы — это просто предложение 3.1.

Для доказательства второй части предположим, что вероятностная производящая функция $f(s)$ не является полиномом (в противном случае теорема 3.1 дает желаемое утверждение). Пусть $f_-(s)$ и $f_+(s)$ для фиксированного $\varepsilon > 0$ будут полиномиальными вероятностными производящими функциями, удовлетворяющими условиям леммы 3.3, и пусть $F^-(t; s)$ и $F^+(t; s)$ обозначают вероятностные производящие функции, соответствующие ветвящимся случайным блужданиям по $\mathbf{Z}^4$ с ветвлением только в начале координат и законами распределения числа потомков, задаваемыми функциями $f_-(s)$ и $f_+(s)$ соответственно. Обозначим $q^\pm(t) := 1 - F^\pm(t; 0)$. Заметим, что асимптотические представления для вероятностей $q^\pm(t)$ приведены в (3.10) с соответствующими константами, связанными с величинами $f_\pm^{(2)}(1)$. Зафиксируем достаточно малое значение $\varepsilon > 0$. В силу (3.19) для всех достаточно больших значений t имеем

$$\frac{1}{1 + 2\varepsilon} \leq \frac{q^+(t)}{q(t)} \quad \text{и} \quad \frac{q^-(t)}{q(t)} \leq \frac{1}{1 - 2\varepsilon},$$

в то время, как согласно (3.10), (3.2) и (3.19) для всех достаточно больших значений t справедливы неравенства

$$(1 - 2\varepsilon) \frac{q^-(t)}{P_1^-(t)} \leq \frac{q(t)}{P_1(t)} \leq (1 + 2\varepsilon) \frac{q^-(t)}{P_1^-(t)},$$

$$(1 - 2\varepsilon) \frac{q^+(t)}{P_1^+(t)} \leq \frac{q(t)}{P_1(t)} \leq (1 + 2\varepsilon) \frac{q^+(t)}{P_1^+(t)},$$

в которых величины $P_1^\pm(t)$ имеют естественные значения. Ясно, что для любого $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[e^{-\lambda \mu_0(t) q(t) / P_1(t)} \mid \mu_0(t) > 0 \right] &= \frac{F(t; e^{-\lambda q(t) / P_1(t)}) - F(t; 0)}{1 - F(t; 0)} \\ &= 1 - \frac{1 - F(t; e^{-\lambda q(t) / P_1(t)})}{q(t)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Далее, $e^{-\lambda q(t)/P_1(t)} > s_0$ для всех достаточно больших значений t . Отсюда и из леммы 3.4 вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{q^+(t)}{q(t)} \frac{1 - F^+(t; e^{-\lambda q(t)/P_1(t)})}{q^+(t)} &\leq \frac{1 - F(t; e^{-\lambda q(t)/P_1(t)})}{q(t)} \\ &\leq \frac{q^-(t)}{q(t)} \frac{1 - F^-(t; e^{-\lambda q(t)/P_1(t)})}{q^-(t)}. \end{aligned}$$

С другой стороны, по соображениям монотонности, $F^+(t; e^{-\lambda q(t)/P_1(t)}) \leq F^+(t; e^{-\lambda(1+2\varepsilon)q^+(t)/P_1^+(t)})$ и $F^-(t; e^{-\lambda q(t)/P_1(t)}) \geq F^-(t; e^{-\lambda(1-2\varepsilon)q^-(t)/P_1^-(t)})$. Отсюда, переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$ и учитывая теорему 3.1, заключаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+2\varepsilon} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{2}{2+3(1+2\varepsilon)\lambda} \right) &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(t; e^{-\lambda q(t)/P_1(t)})}{q(t)} \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(t; e^{-\lambda q(t)/P_1(t)})}{q(t)} \\ &\leq \frac{1}{1-2\varepsilon} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{2}{2+3(1-2\varepsilon)\lambda} \right). \end{aligned}$$

Переходя теперь к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ и вспоминая (3.27), мы видим, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[e^{-\lambda \mu_0(t) q(t)/P_1(t)} \mid \mu_0(t) > 0 \right] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{2}{2+3\lambda},$$

что и требовалось.

З а м е ч а н и е. Из асимптотического соотношения (3.2) и Предложения 3.1 следует, что нормировка в теореме 1.1 имеет следующую асимптотику

$$\mathbf{E} [\mu_0(t) \mid \mu_0(t) > 0] = \frac{\mathbf{E} \mu_0(t)}{\mathbf{P}(\mu_0(t) > 0)} \sim \frac{3}{\alpha f^{(2)}(1) C^2} \frac{t}{\ln^2 t}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Авторы благодарят университет Париж XIII за финансовую поддержку визита В. А. Ватутина во Францию, за время которого была написана часть этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Albeverio S., Bogachev L. V.* Branching random walk in a catalytic medium. I. Basic equations. — Positivity, 2000, v. 4, № 1, p. 41–100.
2. *Albeverio S., Bogachev L. V., Yarovaya E. B.* Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1998, v. 326, № 8, p. 975–980.

3. *Богачев Л. В., Яровая Е. Б.* Предельная теорема для надкритического ветвящегося случайного блуждания на $\mathbf{Z}^d$ с одним источником. — Успехи матем. наук, 1998, т. 53, № 5, с. 231–232.
4. *Богачев Л. В., Яровая Е. Б.* О моментах ветвящегося случайного блуждания в случайной среде. — Успехи матем. наук, 2000, т. 53, № 5, с. 173–174.
5. *Faà di Bruno F.* Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel. — Quart. J. Pure Appl. Math., 1858, 1, p. 359–360.
6. *Dawson D. A. and Fleischmann K.* Longtime behavior of a branching process controlled by branching catalysts. — Stochastic Process. Appl., 1997, v. 71, p. 241–257.
7. *Delmas J.-F.* Super-mouvement brownien avec catalyse. — Stochastics Stochastics Rep., 1996, v. 58, № 3–4, p. 303–347.
8. *Erickson K. B.* Strong renewal theorem with infinite mean. — Trans Amer. Math. Soc., 1970, v. 151, № 1, p. 263–291.
9. *Fleischmann K.* Superprocesses in catalytic media. — In: Measure-Valued Processes, Stochastic Partial Differential Equations, and Interacting Systems (Montreal, PQ, 1992). Providence: Amer. Math. Soc., 1994, p. 99–110. (CRM Proc. Lecture Notes, v. 5.)
10. *Fleischmann K., Le Gall J. F.* A new approach to the single point catalytic super-Brownian motion. — Probab. Theory Related Fields, 1995, v. 102, № 1, p. 63–82.
11. *Vatutin V. A., Xiong J.* Some limit theorems for a particle system of single point catalytic branching random walks. — Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 2007, v. 23, № 6, p. 997–1012.
12. *Vatutin V. A., Topchii V. A., Yarovaya E. B.* Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers. — Theory Probab. Math. Statist., 2004, v. 16, p. 1–15.
13. *Topchii V. A., Vatutin V. A.* Individuals at the origin in the critical catalytic branching random walk. — Discrete Random Walks (Paris, 2003). Paris: MIMD, 2003, p. 325–332.
14. *Topchii V. A., Vatutin V. A.* Two-dimensional limit theorem for a critical catalytic branching random walk. — Mathematics and Computer Science III. Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities. Ed. by M. Drmota et al. Basel–Birkhauser: 2004, p. 387–395.
15. *Ватутин В. А., Топчий В. А.* Предельная теорема для критических каталитических ветвящихся случайных блужданий. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 3, с. 461–484.
16. *Ватутин В. А., Топчий В. А.* Каталитическое ветвящееся случайное блуждание на $\mathbf{Z}^d$ с ветвлением только в начале координат. — Матем тр., 2011, т. 14, № 2 (в печати).

Поступила в редакцию
16.VI.2010