Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Спиряев, О некоторых свойствах стратегий Каги и Ренко для случайного блуждания, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 2, 279–300

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4375>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 18:31:53

© 2011 г.

СПИРЯЕВ М. А.*

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СТРАТЕГИЙ КАГИ И РЕНКО ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ

В работе изучаются вероятностные характеристики методов технического анализа Каги (Kagi) и Ренко (Renko), используемых на финансовом рынке. Для случайного блуждания дается выражение для ожидаемой прибыли инвестора, использующего стратегию Каги, и исследуются его асимптотические свойства. В качестве промежуточных результатов установлены некоторые свойства, связанные с величинами «падения» и «размаха» случайного блуждания.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, величины «падения» и «размаха», стратегии Каги и Ренко, моменты Каги и Ренко.

1. Введение. На сегодняшний день существует множество графических методов технического анализа финансовых данных, позволяющих выявлять закономерности в движении цен и делать прогнозы путем анализа их графиков. Многие из этих методов посвящены проблеме выявления трендов и моментов, когда один тренд сменяется другим. Среди таких методов широкое распространение получили методы Каги (Kagi) и Ренко (Renko).

Происхождение методов Каги и Ренко связано с появившимися в Японии в 1870-х годах методами технического анализа, основанными на анализе колебаний цен. Впервые в литературе подробное описание методов Каги и Ренко, а также связанных с ними торговых стратегий было дано в работе [5]. В работе [2] проводится статистический анализ стратегий Каги и Ренко, а также приводится их математическая формализация.

Основная идея стратегий Каги и Ренко состоит в том, что решения о продаже/покупке актива принимаются лишь тогда, когда происходят существенные изменения цены. Этот подход позволяет акцентировать

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: spiryaevmax@gmail.com

¹⁾ Работа поддержана проектами РФФИ 09-01-12157-офи-м, РФФИ 10-01-00518-а и SFB 701 при университете Билефельда.

внимание трейдера только на значительных колебаниях цен и не рассматривать «шумы». Изучение свойств моментов Каги и Ренко, в которые принимаются решения, связано со свойствами процессов $\sup X - X$ и $|X - X_0|$, где X является процессом цены. Эти моменты входят в выражение для прибыли инвестора, следующего стратегиям Каги и Ренко:

$$V_{\text{Kagi}} = \sum_m (-1)^{m+1} \text{sign}(X(\kappa_0) - X(\kappa_0^*)) \cdot (X(\kappa_m) - X(\kappa_{m-1})),$$

$$V_{\text{Renko}} = \sum_m (-1)^{m+1} \text{sign}(X(\rho_0) - X(\rho_0^*)) \cdot (X(\rho_m) - X(\rho_{m-1})),$$

где κ_i и ρ_i являются моментами Каги и Ренко соответственно. Таким образом, для исследования ожидаемой прибыли инвестора необходимо определить конечномерные распределения процесса X в моменты остановки Каги и Ренко:

$$\text{Law}(X(\kappa_1), \dots, X(\kappa_n)), \quad \text{Law}(X(\rho_1), \dots, X(\rho_n)), \quad n \in \mathbf{N}.$$

В данной работе исследуется случай, когда процесс цены X представляет собой случайное блуждание. Вычисляются конечномерные распределения процесса цены в моменты Каги и Ренко, преобразования Лапласа этих моментов, а также математическое ожидание прибыли инвестора, использующего стратегии Каги и Ренко.

2. Метод Каги. Для любой константы $H \in \mathbf{N}$ и случайного блуждания $(X(n))_{n \geq 0}$, определенного на вероятностном пространстве $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbf{P})$, индуктивно определим последовательность моментов остановки $(\kappa_i, \kappa_i^*)_{i=0,1,\dots}$.

(i) *Базис:* $\kappa_0 = \inf\{u \geq 0: \max_{[0,u]} X - \min_{[0,u]} X = H\}$;

если $X(\kappa_0) = \max_{[0,\kappa_0]} X$, то $\kappa_0^* = \inf\{u \in [0, \kappa_0]: X(u) = \min_{[0,\kappa_0]} X\}$,

если $X(\kappa_0) = \min_{[0,\kappa_0]} X$, то $\kappa_0^* = \inf\{u \in [0, \kappa_0]: X(u) = \max_{[0,\kappa_0]} X\}$.

(ii) Шаг $n \mapsto n + 1$:

если $X(\kappa_n) - X(\kappa_n^*) = H$, то

$$\kappa_{n+1} = \inf\left\{u \geq \kappa_n: \max_{[\kappa_n, u]} X - X(u) = H\right\},$$

$$\kappa_{n+1}^* = \inf\left\{u \in [\kappa_n, \kappa_{n+1}]: X(u) = \max_{[\kappa_n, \kappa_{n+1}]} X\right\};$$

если $X(\kappa_n) - X(\kappa_n^*) = -H$, то

$$\kappa_{n+1} = \inf\left\{u \geq \kappa_n: X(u) - \min_{[\kappa_n, u]} X = H\right\},$$

$$\kappa_{n+1}^* = \inf\left\{u \in [\kappa_n, \kappa_{n+1}]: X(u) = \min_{[\kappa_n, \kappa_{n+1}]} X\right\}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Последовательность (κ_i, κ_i^*) называется *Каги- H -конструкцией* для процесса X . Моменты $(\kappa_i)_{i=0,1,\dots}$ называются *моментами остановки Каги*.

Рис. 1. Моменты остановки Каги.

2.1. Свойства моментов Каги для случайного блуждания.

Рассмотрим случайное блуждание $X = (X(n))_{n=0,1,\dots}$:

$$X(n) = \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

где $(\xi_i)_{i=1,2,\dots}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_i = -1) = q$.

Теорема 1. Для произвольного $H \in \mathbf{N}$ случайное блуждание X обладает следующими свойствами.

При $k_0 > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(\kappa_0) = k_0, \dots, X(\kappa_n) = k_n) \\ = C(k_0) \prod_{l=0}^{\lceil (n-1)/2 \rceil - 1} p_{\min}(k_{2l+2} - k_{2l+1}) \prod_{l=0}^{\lceil (n-2)/2 \rceil} p_{\max}(k_{2l+1} - k_{2l}). \end{aligned}$$

При $k_0 < 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(\kappa_0) = k_0, \dots, X(\kappa_n) = k_n) \\ = C(k_0) \prod_{l=0}^{\lceil (n-1)/2 \rceil - 1} p_{\max}(k_{2l+2} - k_{2l+1}) \prod_{l=0}^{\lceil (n-2)/2 \rceil} p_{\min}(k_{2l+1} - k_{2l}). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\mathbf{E} \kappa_n = S_0 + S_{\max} \left(P_U \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + P_D \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \right)$$

$$\begin{aligned}
& + S_{\min} \left(P_U \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + P_D \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right) \quad \text{при } p \neq q, \\
\mathbf{E} \kappa_n &= \left(\frac{1}{2} + n \right) H(H+1) \quad \text{при } p = q, \\
\mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_n} &= F_+(H, \lambda) (D_{\max})^{\lceil n/2 \rceil} (D_{\min})^{\lceil (n-1)/2 \rceil} \\
& + F_-(H, \lambda) (D_{\max})^{\lceil (n-1)/2 \rceil} (D_{\min})^{\lceil n/2 \rceil}.
\end{aligned}$$

где $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbf{Z}: n \geq x\}$, $k_i \in \mathbf{Z}$ и произведение $\prod_{l=0}^{-1} z_l$ мы полагаем равным 1. Определения величин C , $p_{\min}$, $p_{\max}$, S_0 , $S_{\min}$, $S_{\max}$, P_U , P_D даны в (2.16), (2.18), (2.20), (2.26) и (2.23) соответственно. Определения величин $F_{\pm}$, $D_{\max}$ и $D_{\min}$ даны в (2.31) и (2.30).

2.2. Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы 1 потребуются три леммы.

Лемма 1. Пусть $A \leq 0 \leq B$. Для случайного блуждания X рассмотрим моменты выхода на уровни A и B :

$$\tau^A = \inf\{n \geq 0: X(n) = A\}, \quad \tau^B = \inf\{n \geq 0: X(n) = B\},$$

а также момент выхода процесса X из интервала (A, B) :

$$\tau^{[A, B]} = \tau^A \wedge \tau^B.$$

Тогда для преобразования Лапласа момента $\tau^{[A, B]}$ справедливы следующие свойства:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} e^{-\lambda \tau^{[A, B]}} \mathbf{I}(\tau^{[A, B]} = \tau^A) &= \frac{\operatorname{sh}(B(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2) e^{A(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2}}{\operatorname{sh}((B-A)(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2)}, \\
\mathbf{E} e^{-\lambda \tau^{[A, B]}} \mathbf{I}(\tau^{[A, B]} = \tau^B) &= \frac{\operatorname{sh}(-A(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2) e^{B(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2}}{\operatorname{sh}((B-A)(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2)},
\end{aligned}$$

где

$$f_+(\lambda) = \ln \frac{e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda} - 4pq}}{2p}, \quad f_-(\lambda) = \ln \frac{e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda} - 4pq}}{2q}, \quad \lambda \geq 0.$$

Доказательство. Для произвольных $\mu_1, \mu_2 > 0$ рассмотрим два мартингала:

$$\left(e^{\mu_1 X(n) - n \ln g(\mu_1)} \right)_{n \geq 0}, \quad \left(e^{-\mu_2 X(n) - n \ln g(-\mu_2)} \right)_{n \geq 0},$$

где $g(\mu) = \mathbf{E} e^{\mu \xi_1} = p e^\mu + q e^{-\mu}$. Для любого $n \geq 0$ легко проверить, что

$$0 < e^{\mu_1 X(\tau^{[A, B]} \wedge n) - (\tau^{[A, B]} \wedge n) \ln g(\mu_1)} \leq e^{\mu B}$$

при условии, что $\ln g(\mu_1) \geq 0$. По теореме о преобразовании свободного выбора (см., например, [4]) и по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем, что

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} e^{\mu_1 X(\tau^{[A,B]} \wedge n) - (\tau^{[A,B]} \wedge n) \ln g(\mu_1)} = \mathbf{E} e^{\mu_1 X(\tau^{[A,B]}) - \tau^{[A,B]} \ln g(\mu_1)}. \quad (2.1)$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что $\mathbf{P}(\tau^{[A,B]} < \infty) = 1$ (см. [3]). Аналогично показывается, что

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} e^{-\mu_2 X(\tau^{[A,B]} \wedge n) - (\tau^{[A,B]} \wedge n) \ln g(-\mu_2)} = \mathbf{E} e^{-\mu_2 X(\tau^{[A,B]}) - \tau^{[A,B]} \ln g(-\mu_2)}. \quad (2.2)$$

Из равенств (2.1) и (2.2) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} e^{\mu_1 A} \mathbf{E} e^{-\tau^{[A,B]} \ln g(\mu_1)} \mathbf{I}(\tau^{[A,B]} = \tau^A) \\ \quad + e^{\mu_1 B} \mathbf{E} e^{-\tau^{[A,B]} \ln g(\mu_1)} \mathbf{I}(\tau^{[A,B]} = \tau^B) = 1, \\ e^{-\mu_2 A} \mathbf{E} e^{-\tau^{[A,B]} \ln g(-\mu_2)} \mathbf{I}(\tau^{[A,B]} = \tau^A) \\ \quad + e^{-\mu_2 B} \mathbf{E} e^{-\tau^{[A,B]} \ln g(-\mu_2)} \mathbf{I}(\tau^{[A,B]} = \tau^B) = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Далее для любого $\lambda \geq 0$ выберем μ_1 и μ_2 так, чтобы выполнялись равенства

$$\lambda = \ln g(\mu_1) = \ln g(-\mu_2). \quad (2.4)$$

Нетрудно показать, что система уравнений (2.4) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $\lambda \geq 0$, $\ln \mu_1 \geq 0$, $\ln(-\mu_2) \geq 0$:

$$\mu_1 = \ln \frac{e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda} - 4pq}}{2p} = f_+(\lambda), \quad \mu_2 = \ln \frac{e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda} - 4pq}}{2q} = f_-(\lambda). \quad (2.5)$$

Подставив μ_1 и μ_2 в (2.3), получаем систему из двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} e^{f_+(\lambda)A} \mathbf{E} e^{-\tau^{[A,B]} \lambda} \mathbf{I}(\tau^{[A,B]} = \tau^A) \\ \quad + e^{f_+(\lambda)B} \mathbf{E} e^{-\tau^{[A,B]} \ln g(\lambda)} \mathbf{I}(\tau^{[A,B]} = \tau^B) = 1, \\ e^{-f_-(\lambda)A} \mathbf{E} e^{-\tau^{[A,B]} \lambda} \mathbf{I}(\tau^{[A,B]} = \tau^A) \\ \quad + e^{-f_-(\lambda)B} \mathbf{E} e^{-\tau^{[A,B]} \ln g(\lambda)} \mathbf{I}(\tau^{[A,B]} = \tau^B) = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем утверждение леммы.

Следствие 1. Пусть $\beta^{[A,B]}$ и $\alpha^{[A,B]}$ обозначают вероятности выхода случайного блуждания X из интервала (A, B) через границы B и A соответственно:

$$\beta^{[A,B]} = \mathbf{P}(X(\tau^{[A,B]}) = B), \quad \alpha^{[A,B]} = \mathbf{P}(X(\tau^{[A,B]}) = A). \quad (2.6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-\lambda \tau^{[A,B]}} &= \left(\operatorname{sh} \left(B \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) e^{A(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh} \left(-A \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) e^{B(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \right) \\ &\quad \times \left[\operatorname{sh} \left((B - A) \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

В случае $p \neq q$

$$\begin{aligned} \beta^{[A,B]} &= \frac{1 - (q/p)^A}{(q/p)^B - (q/p)^A}, \quad \alpha^{[A,B]} = \frac{(q/p)^B - 1}{(q/p)^B - (q/p)^A}, \\ \mathbf{E} \tau^{[A,B]} &= \frac{1}{p - q} (B\beta^{[A,B]} + A\alpha^{[A,B]}). \end{aligned}$$

В случае $p = q$

$$\beta^{[A,B]} = \frac{-A}{B - A}, \quad \alpha^{[A,B]} = \frac{B}{B - A}, \quad \mathbf{E} \tau^{[A,B]} = -AB.$$

Другое, не основанное на лемме 1, доказательство утверждений из следствия 1 можно прочитать, например, в [3].

Лемма 2. Пусть $H \in \mathbf{N}$. Для случайного блуждания X рассмотрим моменты остановки

$$\begin{aligned} \gamma_{\max} &= \inf \left\{ k \geq 0: \max_{[0,k]} X - X(k) = H \right\}, \\ \gamma_{\min} &= \inf \left\{ k \geq 0: X(k) - \min_{[0,k]} X = H \right\}. \end{aligned}$$

Тогда преобразования Лапласа и математические ожидания моментов $\gamma_{\max}$ и $\gamma_{\min}$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-\lambda \gamma_{\max}} &= \operatorname{sh} \left(\frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) e^{-H(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \\ &\quad \times \left[\operatorname{sh} \left((H + 1) \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) - \operatorname{sh} \left(H \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) e^{(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \right]^{-1}, \\ \mathbf{E} e^{-\lambda \gamma_{\min}} &= \operatorname{sh} \left(\frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) e^{H(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \\ &\quad \times \left[\operatorname{sh} \left((H + 1) \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) - \operatorname{sh} \left(H \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) e^{-(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \right]^{-1}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{E} \gamma_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{p - q} \left(\frac{\beta^{[-H,1]}}{\alpha^{[-H,1]}} - H \right) & \text{при } p \neq q, \\ H(H + 1) & \text{при } p = q, \end{cases}$$

$$\mathbf{E} \gamma_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{p-q} \left(H - \frac{\alpha^{[-1,H]}}{\beta^{[-1,H]}} \right) & \text{при } p \neq q, \\ H(H+1) & \text{при } p = q. \end{cases}$$

Кроме того, распределения величин $\max_{[0, \gamma_{\max}]} X$ и $\min_{[0, \gamma_{\min}]} X$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\max_{[0, \gamma_{\max}]} X = k \right) &= (\beta^{[-H,1]})^k \alpha^{[-H,1]}, & k \geq 0, \\ \mathbf{P} \left(\min_{[0, \gamma_{\min}]} X = -k \right) &= (\alpha^{[-1,H]})^k \beta^{[-1,H]}, & k \geq 0, \end{aligned}$$

где $f_+(\lambda) = \ln((e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda} - 4pq})/(2p))$, $f_-(\lambda) = \ln((e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda} - 4pq})/(2q))$, $\lambda \geq 0$. Величины $\alpha^{[A,B]}$ и $\beta^{[A,B]}$ определены в (2.6).

Доказательство. Доказательство проведем только для величины $\gamma_{\max}$, поскольку доказательство для величины $\gamma_{\min}$ аналогично. Рассмотрим последовательность моментов остановки $(\delta_n)_{n \geq 0}$, которая задается следующим образом:

$$\delta_n = \inf \{k \geq \delta_{n-1} : X(k) - X(\delta_{n-1}) = -H \text{ или } 1\}, \quad \delta_0 = 0.$$

Также рассмотрим момент остановки $\sigma_{\max}$:

$$\sigma_{\max} = \inf \{k \geq 1 : X(\delta_k) - X(\delta_{k-1}) = -H\}. \quad (2.8)$$

Тогда $\gamma_{\max}$ можно представить в виде

$$\gamma_{\max} = \delta_{\sigma_{\max}} = \sum_{k=1}^{\sigma_{\max}} (\delta_k - \delta_{k-1}) \quad \text{п.н.} \quad (2.9)$$

Поскольку случайное блуждание X обладает строго марковским свойством и имеет независимые приращения, то моменты $(\delta_n - \delta_{n-1})_{n \geq 1}$ независимы и одинаково распределены, причем

$$\delta_n - \delta_{n-1} \stackrel{d}{=} \tau^{[-H,1]} = \tau^{-H} \wedge \tau^1. \quad (2.10)$$

Тогда из леммы 1 следует, что для любого $n \geq 1$

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} e^{-\lambda(\delta_n - \delta_{n-1})} \mathbf{I}(X(\delta_n) - X(\delta_{n-1}) = -H) \\ &= \frac{\text{sh}((f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2) e^{-H(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2}}{\text{sh}((H+1)(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2)}, \\ &\mathbf{E} e^{-\lambda(\delta_n - \delta_{n-1})} \mathbf{I}(X(\delta_n) - X(\delta_{n-1}) = 1) \\ &= \frac{\text{sh}(H((f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2)) e^{(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2}}{\text{sh}((H+1)(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где определения функций f_+ и f_- даны в условии леммы. С помощью представления (2.9) и свойств случайного блуждания находим следующее выражение для преобразования Лапласа момента $\gamma_{\max}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} e^{-\lambda \gamma_{\max}} &= \mathbf{E} \exp \left\{ -\lambda \sum_{k=1}^{\sigma_{\max}} (\delta_k - \delta_{k-1}) \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E} \exp \left\{ -\lambda \sum_{k=1}^n (\delta_k - \delta_{k-1}) \right\} \mathbf{I}(\sigma_{\max} = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E} \exp \left\{ -\lambda \sum_{k=1}^n (\delta_k - \delta_{k-1}) \right\} \mathbf{I}(X(\delta_1) = 1) \\
&\quad \times \mathbf{I}(X(\delta_2) - X(\delta_1) = 1) \cdots \mathbf{I}(X(\delta_n) - X(\delta_{n-1}) = -H) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E} \mathbf{E} \left(\exp \left\{ -\lambda \sum_{k=1}^n (\delta_k - \delta_{k-1}) \right\} \mathbf{I}(X(\delta_1) = 1) \right. \\
&\quad \left. \times \mathbf{I}(X(\delta_2) - X(\delta_1) = 1) \cdots \mathbf{I}(X(\delta_n) - X(\delta_{n-1}) = -H) \mid \mathcal{F}_{\delta_{n-1}} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E} \left(\exp \left\{ -\lambda \sum_{k=1}^{n-1} (\delta_k - \delta_{k-1}) \right\} \right. \\
&\quad \left. \times \mathbf{I}(X(\delta_1) = 1, \dots, X(\delta_{n-1}) - X(\delta_{n-2}) = 1) \right) \mathbf{E} e^{-\lambda(\delta_n - \delta_{n-1})} \\
&\quad \times \mathbf{I}(X(\delta_n) - X(\delta_{n-1}) = -H) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E} \left(\exp \left\{ -\lambda \sum_{k=1}^{n-1} (\delta_k - \delta_{k-1}) \right\} \right. \\
&\quad \left. \times \mathbf{I}(X(\delta_1) = 1) \cdots \mathbf{I}(X(\delta_{n-1}) - X(\delta_{n-2}) = 1) \right) \\
&\quad \times \mathbf{E} e^{-\lambda \delta_1} \mathbf{I}(X(\delta_1) = -H) \\
&\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{E} e^{-\lambda \delta_1} \mathbf{I}(X(\delta_1) = 1))^{n-1} \mathbf{E} e^{-\lambda \delta_1} \mathbf{I}(X(\delta_1) = -H) \\
&= \frac{\mathbf{E} e^{-\lambda \delta_1} \mathbf{I}(X(\delta_1) = -H)}{1 - \mathbf{E} e^{-\lambda \delta_1} \mathbf{I}(X(\delta_1) = 1)}.
\end{aligned}$$

Подставив выражения (2.11), получаем утверждение (2.7) леммы. Математическое ожидание момента $\gamma_{\max}$ можно получить либо непосредственно из (2.7), либо воспользовавшись тождеством Вальда:

$$\mathbf{E} \gamma_{\max} = \mathbf{E} (\delta_1 - \delta_0) \mathbf{E} \sigma_{\max}.$$

При $p \neq q$ имеем:

$$\mathbf{E} \gamma_{\max} = \frac{\beta^{[-H,1]} - H \alpha^{[-H,1]}}{(p-q) \alpha^{[-H,1]}},$$

ПОСКОЛЬКУ

$$\mathbf{E}(\delta_n - \delta_{n-1}) = \frac{1}{p-q} (\beta^{[-H,1]} - H\alpha^{[-H,1]}), \quad \mathbf{E}\sigma_{\max} = \frac{1}{\alpha^{[-H,1]}};$$

здесь первое равенство получено из (2.10) и следствия 1, второе — из формулы для распределения момента $\sigma_{\max}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\sigma_{\max} = k) &= \mathbf{P}(X(\delta_1) = 1, \dots, X(\delta_{k-1}) = k-1, X(\delta_k) = k-1-H) \\ &= (\beta^{[-H,1]})^{k-1} \alpha^{[-H,1]}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Случай $p = q$ рассматривается аналогично. Кроме того, из определения $\sigma_{\max}$ и (2.12) получаем, что

$$\mathbf{P}\left(\max_{[0, \gamma_{\max}]} X = k\right) = \mathbf{P}(\sigma_{\max} = k+1) = (\beta^{[-H,1]})^k \alpha^{[-H,1]}.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $H \in \mathbf{N}$. Для случайного блуждания X рассмотрим введенный ранее момент остановки κ_0 :

$$\kappa_0 = \inf \left\{ u \geq 0: \max_{[0, u]} X - \min_{[0, u]} X = H \right\}.$$

Тогда распределение величины $X(\kappa_0)$ задается следующим образом:

$$\mathbf{P}(X(\kappa_0) = k) = \begin{cases} \alpha^{[k-H, k]} - \alpha^{[k-H-1, k]} & \text{при } k = 1, 2, \dots, H, \\ \beta^{[k, k+H]} - \beta^{[k, k+H+1]} & \text{при } k = -1, -2, \dots, -H. \end{cases}$$

Преобразование Лапласа момента остановки κ_0 задается следующим образом:

$$\mathbf{E}e^{-\lambda\kappa_0} = \frac{\operatorname{sh}((f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2)}{\operatorname{sh}(H(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2) \operatorname{sh}((H+1)(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2) \times (G_+(H, \lambda) + G_-(H, \lambda))},$$

где $f_+(\lambda) = \ln((e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda} - 4pq})/(2p))$, $f_-(\lambda) = \ln((e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda} - 4pq})/(2q))$, $\lambda \geq 0$ и

$$G_\pm(H, \lambda) = \frac{\operatorname{ch}(f_\pm(\lambda)(H+1/2)) - \operatorname{ch}(f_\pm(\lambda)/2)}{2 \operatorname{sh}(f_\pm(\lambda)/2)}.$$

Доказательство. Возьмем произвольное k такое, что $0 < k \leq H$, и рассмотрим момент $\tau^{(k-H, k)}$ первого выхода случайного блуждания X из интервала $(k-H, k)$, а также момент χ_k , задаваемый формулой

$$\chi_k = \inf \{ n \geq 0: X(n) - X(\tau^{[k-H, k]}) = -1 \text{ или } H \}.$$

Из определения момента κ_0 можно вывести следующее свойство:

$$\mathbf{I}(X(\kappa_0) = k) = \mathbf{I}(X(\tau^{[k-H, k]}) = k - H) \mathbf{I}(X(\chi_k) - X(\tau^{[k-H, k]}) = H). \quad (2.13)$$

При этом в силу строго марковского свойства процесса X и независимости приращений индикаторы, стоящие в правой части, независимы.

Следовательно, для $k = 1, \dots, H$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(\kappa_0) = k) &= \mathbf{P}(X(\tau^{[k-H, k]}) = k - H) \mathbf{P}(X(\chi_k) - X(\tau^{[k-H, k]}) = H) \\ &= \alpha^{[k-H, k]} \beta^{[-1, H]} = \alpha^{[k-H, k]} - \alpha^{[k-H-1, k]}. \end{aligned}$$

Заметим, что для $k > H$ непосредственно из определения момента κ_0 следует, что

$$\mathbf{P}(X(\kappa_0) = k) = 0, \quad k > H.$$

Случай $k = -1, \dots, -H$ разбирается аналогично.

Рассмотрим теперь преобразование Лапласа для момента κ_0 :

$$\mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_0} = \sum_{k=1}^H \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}(X(\kappa_0) = k) + \sum_{k=1}^H \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}(X(\kappa_0) = -k). \quad (2.14)$$

Используя свойство (2.13), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}(X(\kappa_0) = k) &= \mathbf{E} [e^{-\lambda \tau^{[k-H, k]}} \mathbf{I}(\tau^{[k-H, k]} = \tau^{k-H})] \mathbf{E} [e^{-\lambda \tau^{[-1, H]}} \mathbf{I}(\tau^{[-1, H]} = \tau^H)], \\ \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}(X(\kappa_0) = -k) &= \mathbf{E} [e^{-\lambda \tau^{[-k, H-k]}} \mathbf{I}(\tau^{[-k, H-k]} = \tau^{H-k})] \mathbf{E} [e^{-\lambda \tau^{[-H, 1]}} \mathbf{I}(\tau^{[-H, 1]} = \tau^{-H})]. \end{aligned}$$

Из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}(X(\kappa_0) = k) &= \frac{\operatorname{sh}(k \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2}) \operatorname{sh}(\frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2}) e^{k \frac{f_-(\lambda) - f_+(\lambda)}{2}}}{\operatorname{sh}(H \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2}) \operatorname{sh}((H+1) \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2})}, \\ \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}(X(\kappa_0) = -k) &= \frac{\operatorname{sh}(k \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2}) \operatorname{sh}(\frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2}) e^{-k \frac{f_-(\lambda) - f_+(\lambda)}{2}}}{\operatorname{sh}(H \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2}) \operatorname{sh}((H+1) \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2})}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Подставив эти выражения в (2.14), получим утверждение леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Будем считать, что процесс X задан на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с фильтрацией $\mathcal{F}_k^X = \sigma\{X(n), n \leq k\}$. Утверждение о распределении вектора $(X(\kappa_0), \dots, X(\kappa_n))$ будем доказывать по индукции.

Базис состоит в том, что

$$\mathbf{P}(X(\kappa_0) = k_0) = C(k_0),$$

где

$$C(k_0) = \begin{cases} (1 - \nu^{k_0}) \left(\frac{1}{1 - \nu^{H \operatorname{sign}(k_0)}} - \frac{1}{1 - \nu^{(H+1) \operatorname{sign}(k_0)}} \right) & \text{при } p \neq q, \\ |k_0| \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{H+1} \right) & \text{при } p = q, \end{cases} \quad (2.16)$$

$k_0 = \pm 1, \dots, \pm H$ и $\nu = p/q$. Данное утверждение непосредственно следует из леммы 3.

Шаг $(n-1) \mapsto n$. Без ограничения общности будем считать, что $k_0 > 0$ и n четное, поскольку случай нечетного n или отрицательного k_0 рассматривается аналогично. Заметим, что для произвольного случайного блуждания S из леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_{\gamma_{\max}} = r) &= \mathbf{P}\left(\max_{[0, \gamma_{\max}]} S = r + H\right) \\ &= (\beta^{[-H, 1]})^{H+r} \alpha^{[-H, 1]} = p_{\max}(r), \\ \mathbf{P}(S_{\gamma_{\min}} = r) &= \mathbf{P}\left(\min_{[0, \gamma_{\min}]} S = r - H\right) \\ &= (\alpha^{[-1, H]})^{H-r} \beta^{[-1, H]} \mathbf{I}(r \leq H) = p_{\min}(r), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} p_{\max}(r) &= \left(1 - \frac{1}{\sum_{i=0}^H \nu^i}\right)^{H+r} \frac{1}{\sum_{i=0}^H \nu^i} \mathbf{I}(r \geq -H), \\ p_{\min}(r) &= \left(1 - \frac{\nu^H}{\sum_{i=0}^H \nu^i}\right)^{H-r} \frac{\nu^H}{\sum_{i=0}^H \nu^i} \mathbf{I}(r \leq H). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Тогда, используя строго марковское свойство процесса X и предположение индукции, получаем:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(X(\kappa_0) = k_0, \dots, X(\kappa_n) = k_n) \\ &= \mathbf{P}(X(\kappa_n) = k_n \mid X(\kappa_{n-1}) = k_{n-1}, \dots, X(\kappa_0) = k_0) \\ &\quad \times \mathbf{P}(X(\kappa_{n-1}) = k_{n-1}, \dots, X(\kappa_0) = k_0) \\ &= \mathbf{P}(X(\kappa_n) = k_n \mid X(\kappa_{n-1}) = k_{n-1}) \mathbf{P}(X(\kappa_{n-1}) = k_{n-1}, \dots, X(\kappa_0) = k_0) \\ &= \mathbf{P}(X(\kappa_n) = k_n \mid X(\kappa_{n-1}) = k_{n-1}) C(k_0) \prod_{l=0}^{n/2-2} p_{\min}(k_{n-2l} - k_{n-2l-1}) \\ &\quad \times \prod_{l=0}^{n/2-1} p_{\max}(k_{n-2l-1} - k_{n-2l-2}). \end{aligned}$$

Вновь применяя строго марковское свойство, а также свойства (2.17), получаем, что для четного n и положительного k_0

$$\mathbf{P}(X(\kappa_n) = k_n \mid X(\kappa_{n-1}) = k_{n-1}) = p_{\min}(k_n - k_{n-1}).$$

Шаг индукции доказан.

Для доказательства утверждения о математических ожиданиях моментов Каги также будем использовать метод математической индукции.

Несимметричный случай: $p \neq q$. Базис состоит в том, что

$$\mathbf{E} \kappa_0 = S_0, \quad (2.19)$$

где

$$S_0 = \frac{1}{p-q} \sum_{k=1}^H k \frac{\nu^{H+k+1} - 2\nu^{H+1} + 2\nu^H - \nu^{H+k} - \nu^{H-k} + \nu^{H-k+1}}{(1-\nu^H)(1-\nu^{H+1})}. \quad (2.20)$$

Чтобы это показать, рассмотрим мартингал $(X(k) - (p-q)k)_{k=0,1,2,\dots}$. Из определения момента κ_0 несложно вывести следующее неравенство:

$$\kappa_0 \leq \gamma_{\max} + \gamma_{\min} \quad \text{п.н.,}$$

где моменты $\gamma_{\max}$ и $\gamma_{\min}$ определены в лемме 2. Отсюда получаем, что $\mathbf{E} \kappa_0 < \infty$, и, применяя тождество Вальда, находим:

$$\mathbf{E} X(\kappa_0) = (p-q)\mathbf{E} \kappa_0. \quad (2.21)$$

Распределение величины $X(\kappa_0)$ известно из леммы 3. Вычисляя отсюда математическое ожидание $X(\kappa_0)$, получаем (2.19).

Шаг $(n-1) \mapsto n$. Будем считать, что n является четным; случай нечетного n рассматривается аналогично. Введем события

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \omega: X(\kappa_0) = \max_{[0, \kappa_0]} X \right\} = \{X(\kappa_0) > 0\} \quad (\text{восходящий тренд}), \\ D &= \left\{ \omega: X(\kappa_0) = \min_{[0, \kappa_0]} X \right\} = \{X(\kappa_0) < 0\} \quad (\text{нисходящий тренд}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Обозначим вероятности событий U и D через P_U и P_D соответственно. Тогда из леммы 3 следует, что

$$\begin{aligned} P_U &= \mathbf{P}(X(\kappa_0) > 0) = \sum_{k=1}^H \mathbf{P}(X(\kappa_0) = k) \\ &= \sum_{k=1}^H \frac{\nu^{H+k+1} - \nu^{H+1} + \nu^H - \nu^{H+k}}{(1-\nu^H)(1-\nu^{H+1})}, \\ P_D &= \mathbf{P}(X(\kappa_0) < 0) = \sum_{k=-H}^{-1} \mathbf{P}(X(\kappa_0) = k) \\ &= \sum_{k=1}^H \frac{-\nu^{H-k+1} + \nu^{H+1} - \nu^H + \nu^{H-k}}{(1-\nu^H)(1-\nu^{H+1})}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Далее, рассмотрим следующие операторы на пространстве последовательностей $x = (x_i)_{i=1}^\infty$:

$$\begin{aligned} f_{\max}(x) &= \min \left\{ n: \max_{1 \leq i \leq n} x_i - x_n = H \right\}, \\ f_{\min}(x) &= \min \left\{ n: x_n - \min_{1 \leq i \leq n} x_i = H \right\}. \end{aligned}$$

Тогда для момента κ_n можно записать представление

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \kappa_{n-1} + \mathbf{I}(U)f_{\min}(X(\kappa_{n-1} + 1), X(\kappa_{n-1} + 2), \dots) \\ &\quad + \mathbf{I}(D)f_{\max}(X(\kappa_{n-1} + 1), X(\kappa_{n-1} + 2), \dots). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей этого равенства, получаем:

$$\mathbf{E} \kappa_n = \mathbf{E} \kappa_{n-1} + P_U \frac{1}{p-q} \left(H - \frac{\alpha^{[-1, H]}}{\beta^{[-1, H]}} \right) + P_D \frac{1}{p-q} \left(\frac{\beta^{[-H, 1]}}{\alpha^{[-H, 1]}} - H \right), \quad (2.25)$$

поскольку

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left[\mathbf{I}(D)f_{\max}(X(\kappa_{n-1} + 1), X(\kappa_{n-1} + 2), \dots) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\mathbf{I}(D)f_{\max}(X(\kappa_{n-1} + 1) - X(\kappa_{n-1}), X(\kappa_{n-1} + 2) - X(\kappa_{n-1}), \dots) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\mathbf{E} \left(\mathbf{I}(D)f_{\max}(X(\kappa_{n-1} + 1) - X(\kappa_{n-1}), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. X(\kappa_{n-1} + 2) - X(\kappa_{n-1}), \dots) \mid \mathcal{F}_{\kappa_0} \right) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\mathbf{I}(D)\mathbf{E} \left(f_{\max}(X(\kappa_{n-1} + 1) - X(\kappa_{n-1}), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. X(\kappa_{n-1} + 2) - X(\kappa_{n-1}), \dots) \mid \mathcal{F}_{\kappa_0} \right) \right] \\ &= [\mathbf{E} \mathbf{I}(D)] \left[\mathbf{E} \left(f_{\max}(X(\kappa_{n-1} + 1) - X(\kappa_{n-1}), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. X(\kappa_{n-1} + 2) - X(\kappa_{n-1}), \dots) \right) \right] \\ &= \frac{1}{p-q} \left(\frac{\beta^{[-H, 1]}}{\alpha^{[-H, 1]}} - H \right) P_D. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что оператор $f_{\max}$ инвариантен относительно сдвига, а величина $\mathbf{I}(D)$ измерима относительно $\mathcal{F}_{\kappa_0}$. Аналогично доказывается равенство для $f_{\min}$. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} S_{\max} &= \frac{1}{p-q} \left(\frac{\beta^{[-H, 1]}}{\alpha^{[-H, 1]}} - H \right) = \frac{1}{p-q} \left(\frac{\nu - \nu^{H+1}}{1 - \nu} - H \right), \\ S_{\min} &= \frac{1}{p-q} \left(H - \frac{\alpha^{[-1, H]}}{\beta^{[-1, H]}} \right) = \frac{1}{p-q} \left(H - \frac{1 - \nu^H}{\nu^H - \nu^{H+1}} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Тогда утверждение теоремы следует из (2.25) и предположения индукции.

Симметричный случай: $p = q$. При $p = q$ событие $\{\kappa_0 = k\}$ включает в себя траектории двух типов:

- траектории, для которых $\gamma_{\max} = k$,
- траектории, для которых $\gamma_{\min} = k$.

Между траекториями этих двух типов можно установить взаимно однозначное соответствие: если траекторию первого типа перевернуть (домножить на -1), то получится соответствующая траектория второго типа, и наоборот. Следовательно,

$$\mathbf{E} \kappa_0 = \frac{1}{2} \mathbf{E} \gamma_{\max} = \frac{1}{2} H(H+1), \quad P_U = P_D = \frac{1}{2}.$$

Уравнение (2.25) в этом случае имеет вид

$$\mathbf{E} \kappa_n = \mathbf{E} \kappa_{n-1} + H(H+1).$$

Отсюда получаем утверждение теоремы.

Для преобразования Лапласа момента κ_n , где n — четное, рассмотрим следующее разложение:

$$\mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_n} = \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_n} \mathbf{I}(U) + \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_n} \mathbf{I}(D). \quad (2.27)$$

Воспользуемся свойством (2.24):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_n} \mathbf{I}(U) &= \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_{n-1} - \lambda f_{\min}(X(\kappa_{n-1}+1), X(\kappa_{n-1}+2), \dots)} \mathbf{I}(U) \\ &= \mathbf{E} (\mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_{n-1} - \lambda f_{\min}(X(\kappa_{n-1}+1), X(\kappa_{n-1}+2), \dots)} \mathbf{I}(U) \mid \mathcal{F}_{\kappa_{n-1}}) \\ &= \mathbf{E} (\mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_{n-1} - \lambda f_{\min}(X(\kappa_{n-1}+1) - X(\kappa_{n-1}), X(\kappa_{n-1}+2) - X(\kappa_{n-1}), \dots)} \mathbf{I}(U) \mid \mathcal{F}_{\kappa_{n-1}}) \\ &= [\mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_{n-1}} \mathbf{I}(U)] [\mathbf{E} e^{-\lambda f_{\min}(X(\kappa_{n-1}+1) - X(\kappa_{n-1}), X(\kappa_{n-1}+2) - X(\kappa_{n-1}), \dots)}]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

По лемме 2

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-\lambda f_{\min}(X(\kappa_{n-1}+1) - X(\kappa_{n-1}), \dots)} &= \frac{\operatorname{sh}(H(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2) e^{(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2}}{\operatorname{sh}((H+1)(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2) - \operatorname{sh}((f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2) e^{H(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2}}. \end{aligned}$$

Подставляя это равенство в (2.28) и обобщая полученные результаты на случай произвольного n , находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_n} \mathbf{I}(U) &= \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}(U) (D_{\max})^{\lceil n/2 \rceil} (D_{\min})^{\lceil (n-1)/2 \rceil}, \\ \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_n} \mathbf{I}(D) &= \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}(D) (D_{\max})^{\lceil (n-1)/2 \rceil} (D_{\min})^{\lceil n/2 \rceil}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где

$$\begin{aligned}
 D_{\max} &= \operatorname{sh}\left(\frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2}\right) e^{-H(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \\
 &\times \left[\operatorname{sh}\left((H+1)\frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(H\frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2}\right) e^{(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \right]^{-1}, \\
 D_{\min} &= \operatorname{sh}\left(\frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2}\right) e^{H(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \\
 &\times \left[\operatorname{sh}\left((H+1)\frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(H\frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2}\right) e^{-(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \right]^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

и $f_+(\lambda) = \ln((e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda} - 4pq})/(2p))$, $f_-(\lambda) = \ln((e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda} - 4pq})/(2q))$.

С помощью представлений (2.15) можно показать, что

$$\mathbf{E} e^{-\lambda\kappa_0} \mathbf{I}(U) = F_+(H, \lambda), \quad \mathbf{E} e^{-\lambda\kappa_0} \mathbf{I}(D) = F_-(H, \lambda),$$

где

$$\begin{aligned}
 F_\pm(H, \lambda) &= \frac{\operatorname{sh}((f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2)}{\operatorname{sh}(H(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2) \operatorname{sh}((H+1)(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2)} \\
 &\times \left(\frac{e^{f_+(\lambda)}}{2} \frac{1 - e^{Hf_+(\lambda)}}{1 - e^{f_+(\lambda)}} - \frac{e^{-f_\pm(\lambda)}}{2} \frac{1 - e^{-Hf_\pm(\lambda)}}{1 - e^{-f_\pm(\lambda)}} \right).
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Соединяя вместе (2.27), (2.29), (2.30) и (2.31), получаем утверждение теоремы.

3. Метод Ренко.

3.1. Построение. Для случайного блуждания $(X(n))_{n \geq 0}$ и константы $H \in \mathbf{N}$ индуктивно определим последовательность моментов остановки $(\tilde{\rho}_i)_{i=0,1,\dots}$:

$$\tilde{\rho}_0 = 0, \quad \dots, \quad \tilde{\rho}_{i+1} = \min\{u \geq \tilde{\rho}_i : |X(u) - X(\tilde{\rho}_i)| = H\}.$$

Построим процесс $\tilde{X} = (\tilde{X}(n))_{n \geq 0}$ следующим образом:

$$\tilde{X}(n) = X(\tilde{\rho}_i), \quad n \in [\tilde{\rho}_i, \tilde{\rho}_{i+1}).$$

Для процесса $\tilde{X}$ построим его Каги- H -конструкцию $(\rho_i, \rho_i^*)_{i=0,1,\dots}$.

О п р е д е л е н и е 2. Последовательность $(\rho_i, \rho_i^*)_{i=0,1,\dots}$ называется *Ренко- H -конструкцией* для процесса X . Моменты $(\rho_i)_{i=0,1,\dots}$ называются *моментами остановки Ренко*.

Рис. 2. Моменты остановки Ренко.

3.2. Свойства моментов Ренко для случайного блуждания.

Теорема 2. Для произвольного $H \in \mathbf{N}$ случайное блуждание X обладает следующими свойствами.

При $r_0 > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(\rho_0) = r_0 H, \dots, X(\rho_n) = r_n H) &= C(r_0) \prod_{l=0}^{\lceil (n-1)/2 \rceil - 1} p_{\min}(r_{2l+2} - r_{2l+1}) \\ &\times \prod_{l=0}^{\lceil (n-2)/2 \rceil} p_{\max}(r_{2l+1} - r_{2l}). \end{aligned}$$

При $r_0 < 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(\rho_0) = r_0 H, \dots, X(\rho_n) = r_n H) &= C(r_0) \prod_{l=0}^{\lceil (n-1)/2 \rceil - 1} p_{\max}(r_{2l+2} - r_{2l+1}) \\ &\times \prod_{l=0}^{\lceil (n-2)/2 \rceil} p_{\min}(r_{2l+1} - r_{2l}), \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \rho_n &= S_0 + S_{\max} \left(P_U \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + P_D \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \right) \\ &\quad + S_{\min} \left(P_U \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + P_D \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right) \quad \text{при } p \neq q, \\ \mathbf{E} \rho_n &= (2n+1)H^2 \quad \text{при } p = q, \\ \mathbf{E} e^{-\lambda \rho_n} &= F_+(H, \lambda) (D_{\max})^{\lceil n/2 \rceil} (D_{\min})^{\lceil (n-1)/2 \rceil} \\ &\quad + F_-(H, \lambda) (D_{\max})^{\lceil (n-1)/2 \rceil} (D_{\min})^{\lceil n/2 \rceil}, \end{aligned}$$

где $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbf{Z}: n \geq x\}$, $k_i \in \mathbf{Z}$ и произведение $\prod_{l=0}^{-1} z_l$ мы полагаем равным 1. Определения величин C , $p_{\min}$, $p_{\max}$, S_0 , $S_{\min}$, $S_{\max}$, P_U , P_D

будут даны в (3.3), (3.4), (3.5) и (3.6) соответственно. Определения величин $F_{\pm}$, $D_{\max}$ и $D_{\min}$ будут даны в (3.12), (3.9) и (3.10).

3.3. Доказательство теоремы 2. Для доказательства первых двух утверждений рассмотрим введенный ранее процесс $\tilde{X}$. Этот процесс, определенный на прежнем вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, но с другой фильтрацией $\mathcal{F}_n = \sigma\{X(\tilde{\rho}_k), k \leq n\}$, является случайным блужданием, умноженным на H :

$$\tilde{X}(n) = \sum_{i=1}^n \eta_i,$$

где

$$\mathbf{P}(\eta_i = H) = \beta^{[-H, H]} = \frac{\nu^H}{1 + \nu^H}, \quad \mathbf{P}(\eta_i = -H) = \alpha^{[-H, H]} = \frac{1}{1 + \nu^H}.$$

Для процесса $\tilde{X}$ рассмотрим соответствующую ему последовательность $\tilde{\kappa}_i$ моментов Каги с уровнем $\tilde{H} = 1$. Необходимо отметить, что случайные блуждания X и $\tilde{X}$ имеют разную временную шкалу, поскольку время, за которое процесс $\tilde{X}$ делает i -й шаг, равно $\tilde{\rho}_i$. При этом «формулы перехода» между характеристиками процессов X и $\tilde{X}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(\rho_0) = r_0 H, \dots, X(\rho_n) = r_n H) \\ = \mathbf{P}(\tilde{X}(\tilde{\kappa}_0) = r_0, \dots, \tilde{X}(\tilde{\kappa}_n) = r_n), \\ \mathbf{E} \rho_n = \mathbf{E} \tilde{\kappa}_n \mathbf{E} \tau^{[-H, H]}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\tau^{[-H, H]} = \tau^{-H} \wedge \tau^H$ — момент выхода процесса X из интервала $(-H, H)$. Здесь первое равенство выводится непосредственно из определения моментов ρ_k и процесса $\tilde{X}$. Второе равенство выводится из тождества Вальда и следующего свойства моментов Ренко:

$$\rho_n = \sum_{i=1}^{\tilde{\kappa}_n} \tilde{\rho}_i \quad \text{п.н.}, \quad n \geq 0. \quad (3.2)$$

Характеристики процесса $\tilde{X}$ в правой части (3.1) находятся из теоремы 1, если в нее в качестве $\tilde{H}$ и $\tilde{\nu}$ подставить

$$\tilde{H} = 1, \quad \tilde{\nu} = \frac{\beta^{[-H, H]}}{\alpha^{[-H, H]}} = \nu^H.$$

Получаем: при $r_0 > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{X}(\tilde{\kappa}_0) = r_0, \dots, \tilde{X}(\tilde{\kappa}_n) = r_n) = C(r_0) \prod_{l=0}^{\lceil (n-1)/2 \rceil - 1} p_{\min}(r_{2l+2} - r_{2l+1}) \\ \times \prod_{l=0}^{\lceil (n-2)/2 \rceil} p_{\max}(r_{2l+1} - r_{2l}), \end{aligned}$$

при $r_0 < 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{X}(\tilde{\kappa}_0) = k_0, \dots, \tilde{X}(\tilde{\kappa}_n) = k_n) &= C(r_0) \prod_{l=0}^{\lceil (n-1)/2 \rceil - 1} p_{\max}(r_{2l+2} - r_{2l+1}) \\ &\times \prod_{l=0}^{\lceil (n-2)/2 \rceil} p_{\min}(r_{2l+1} - r_{2l}), \end{aligned}$$

где

$$C(r_0) = \begin{cases} \frac{\nu^H}{1 + \nu^H} & \text{при } r_0 = 1, \\ \frac{1}{1 + \nu^H} & \text{при } r_0 = -1, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} p_{\max}(r) &= \left(\frac{\nu^H}{1 + \nu^H} \right)^{1+r} \frac{1}{1 + \nu^H} \mathbf{I}(r \geq -1), \\ p_{\min}(r) &= \left(\frac{1}{1 + \nu^H} \right)^{1-r} \frac{\nu^H}{1 + \nu^H} \mathbf{I}(r \leq 1), \end{aligned} \quad (3.4)$$

а также

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \tilde{\kappa}_n &= S_0 + S_{\max} \left(P_U \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + P_D \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \right) \\ &\quad + S_{\min} \left(P_U \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + P_D \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right) \quad \text{при } p \neq q, \\ \mathbf{E} \tilde{\kappa}_n &= 2n + 1 \quad \text{при } p = q, \end{aligned}$$

где

$$S_0 = \frac{H}{p-q} \frac{\nu^H - 1}{\nu^H + 1}, \quad S_{\max} = \frac{H}{p-q} (\nu^H - 1), \quad S_{\min} = \frac{H}{p-q} (1 - \nu^{-H}), \quad (3.5)$$

$$P_U = \frac{\nu^H}{1 + \nu^H}, \quad P_D = \frac{1}{1 + \nu^H}. \quad (3.6)$$

Подставляя полученные выражения в (3.1), а также пользуясь тем, что согласно следствию 1

$$\mathbf{E} \tau^{[-H, H]} = \frac{H}{p-q} \frac{\nu^H - 1}{\nu^H + 1},$$

получаем утверждения теоремы.

Для того чтобы вычислить преобразование Лапласа для момента Ренко ρ_n , рассмотрим разложение

$$\mathbf{E} e^{-\lambda \rho_n} = \mathbf{E} e^{-\lambda \rho_n} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_1) = H) + \mathbf{E} e^{-\lambda \rho_n} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_1) = -H). \quad (3.7)$$

Как и при доказательстве аналогичного свойства для моментов Каги, индуктивно можно показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-\lambda \rho_n} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_1) = H) &= \mathbf{E} e^{-\lambda \tilde{\rho}_1} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_1) = H) (D_{\max})^{\lceil n/2 \rceil} (D_{\min})^{\lceil (n-1)/2 \rceil}, \\ \mathbf{E} e^{-\lambda \rho_n} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_1) = -H) &= \mathbf{E} e^{-\lambda \tilde{\rho}_1} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_1) = -H) (D_{\max})^{\lceil (n-1)/2 \rceil} (D_{\min})^{\lceil n/2 \rceil}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$D_{\max} = \mathbf{E} \exp \left\{ -\lambda \sum_{i=1}^{\tilde{\gamma}_{\max}} \tilde{\rho}_i \right\}, \quad \tilde{\gamma}_{\max} = \inf \left\{ n \geq 0: \max_{[0, n]} \tilde{X} - \tilde{X}(n) = H \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} D_{\max} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E} \exp \left\{ -\lambda \sum_{i=1}^k \tilde{\rho}_i \right\} \mathbf{I}(\tilde{\gamma}_{\max} = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E} e^{-\lambda \tilde{\rho}_1} \mathbf{I}(\tilde{X}(1) = H) \cdots e^{-\lambda \tilde{\rho}_{k-1}} \mathbf{I}(\tilde{X}(k-1) - \tilde{X}(k-2) = H) \\ &\quad \times e^{-\lambda \tilde{\rho}_k} \mathbf{I}(\tilde{X}(k) - \tilde{X}(k-1) = -H) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E} e^{-\lambda \tilde{\rho}_1} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_1) = H) \cdots e^{-\lambda \tilde{\rho}_{k-1}} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_{k-1}) - X(\tilde{\rho}_{k-2}) = H) \\ &\quad \times e^{-\lambda \tilde{\rho}_k} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_k) - X(\tilde{\rho}_{k-1}) = -H) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{E} e^{-\lambda \tilde{\rho}_1} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_1) = H))^{k-1} \mathbf{E} e^{-\lambda \tilde{\rho}_1} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_1) = -H) \\ &= \frac{\mathbf{E} e^{-\lambda \tilde{\rho}_1} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_1) = -H)}{1 - \mathbf{E} e^{-\lambda \tilde{\rho}_1} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_1) = H)}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 1, находим:

$$\begin{aligned} D_{\max} &= \operatorname{sh} \left(H \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) e^{-H(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \\ &\quad \times \left[\operatorname{sh} \left((H+1) \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sh} \left(H \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) e^{H(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $f_+(\lambda) = \ln((e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda} - 4pq})/(2p))$, $f_-(\lambda) = \ln((e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda} - 4pq})/(2q))$. Аналогично находим

$$\begin{aligned} D_{\min} &= \operatorname{sh} \left(H \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) e^{H(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \\ &\quad \times \left[\operatorname{sh} \left((H+1) \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sh} \left(H \frac{f_+(\lambda) + f_-(\lambda)}{2} \right) e^{-H(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Также из леммы 1 следует, что

$$\mathbf{E} e^{-\lambda \rho_1} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_1) = H) = F_+(H, \lambda), \quad \mathbf{E} e^{-\lambda \rho_1} \mathbf{I}(X(\tilde{\rho}_1) = -H) = F_-(H, \lambda), \quad (3.11)$$

где

$$F_{\pm}(H, \lambda) = \frac{\operatorname{sh}(H(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2) e^{\pm(f_-(\lambda) - f_+(\lambda))/2}}{\operatorname{sh}((H+1)(f_+(\lambda) + f_-(\lambda))/2)}. \quad (3.12)$$

Подставляя (3.9)–(3.12) в (3.11) получаем утверждение теоремы.

4. Торговая стратегия Каги. Рассмотрим применение полученных результатов на примере задачи вычисления прибыли инвестора, который использует стратегию Каги на временном интервале $[0, \kappa_M]$ (см. [2]):

$$\gamma(t) = \sum_{m=1}^M \operatorname{sign}(X(\kappa_{m-1}) - X(\kappa_{m-1}^*)) \cdot \mathbf{I}(t \in [\kappa_{m-1}, \kappa_m]),$$

где $\gamma(t)$ означает количество единиц актива, которое находится в портфеле инвестора в момент времени t , т.е. в момент κ_n он покупает единицу актива, если $X(\kappa_n) - X(\kappa_{n-1}) > 0$, и продает единицу актива, если $X(\kappa_n) - X(\kappa_{n-1}) < 0$. При этом в каждый момент времени в портфеле инвестора содержится либо 1 единица актива, либо -1 (короткая продажа). Также для простоты будем считать, что период торговли включает в себя ровно M моментов Каги. Прибыль инвестора в этом случае имеет вид

$$V_M = \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} \operatorname{sign}(X(\kappa_0))(X(\kappa_m) - X(\kappa_{m-1})).$$

Тогда ожидаемая прибыль инвестора для случая, когда цена является случайным блужданием, равна

$$\begin{aligned} \mathbf{E} V_M = (p - q) & \left(S_{\max} \left(\left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil P_U + \left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil P_D \right) \right. \\ & \left. - S_{\min} \left(\left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil P_U + \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil P_D \right) \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где величины P_U , P_D , $S_{\max}$, $S_{\min}$ даны в (2.22) и (2.25) соответственно.

Чтобы это показать, рассмотрим введенные в (2.21) события $U = \{X(\kappa_0) > 0\}$ и $D = \{X(\kappa_0) < 0\}$. Тогда имеет место следующее представление:

$$V_M = V_M^+ \mathbf{I}(U) + V_M^- \mathbf{I}(D),$$

где

$$V_M^+ = \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} (X(\kappa_m) - X(\kappa_{m-1})),$$

$$V_M^- = \sum_{m=1}^M (-1)^m (X(\kappa_m) - X(\kappa_{m-1})).$$

Для случая $p \neq q$ из теоремы 1 получаем, что

$$\mathbf{E} V_M^+ \mathbf{I}(U) = P_U(p - q) \left(S_{\max} \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil - S_{\min} \left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil \right),$$

$$\mathbf{E} V_M^- \mathbf{I}(D) = P_D(p - q) \left(S_{\max} \left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil - S_{\min} \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil \right).$$

Отсюда получаем выражение для ожидаемой прибыли инвестора (4.1). Отметим, что в случае симметричного случайного блуждания ($p = q$) имеем

$$\mathbf{E} (X(\kappa_m) - X(\kappa_{m-1})) = 0,$$

поскольку X в этом случае является мартингалом, выходящим из нуля п.н. В этом случае величины $X(\kappa_m) - X(\kappa_{m-1})$ не зависят от $X(\kappa_0)$, и, следовательно, ожидаемая прибыль инвестора в симметричном случае равна нулю, что соответствует ситуации с отсутствием арбитража на рынке.

Теперь исследуем вопрос о том, какую ожидаемую прибыль получит инвестор от использования стратегии Каги на бесконечном временном интервале в случае $p \neq q$. Заметим, что для произвольного $n \geq 1$ имеет место представление

$$\kappa_n = \sum_{m=0}^n (\kappa_m - \kappa_{m-1}),$$

где $\kappa_{-1} = 0$ п.н. Из определения моментов остановки κ_i нетрудно заметить, что для любого $m \geq 1$

$$\mathbf{P}(\kappa_m - \kappa_{m-1} \geq H) = 1.$$

Следовательно, $\kappa_n \uparrow \infty$ п.н. при $n \rightarrow \infty$. Значит, прибыль инвестора на бесконечном временном интервале можно полагать равной $\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{E} V_M$.

Рассмотрим сначала подпоследовательность $M = 2N$, $N \in \mathbf{N}$. Тогда из (4.1), (2.22) и (2.25) имеем

$$\mathbf{E} V_{2N} = N \frac{-\nu^{2H+1} + (2H+1)\nu^{H+1} - (2H+1)\nu^H + 1}{\nu^H(1-\nu)}. \quad (4.2)$$

Пусть $f(\nu)$ обозначает многочлен, стоящий в числителе:

$$f(\nu) = -\nu^{2H+1} + (2H+1)\nu^{H+1} - (2H+1)\nu^H + 1, \quad \nu \in (0, \infty).$$

Тогда

$$f'(\nu) = \nu^{H-1} [-(2H+1)\nu^{H+1} + (2H+1)(H+1)\nu - (2H+1)H].$$

Выражение в квадратных скобках обозначим $g(\nu)$. Функция g достигает своего максимума в точке $\nu = 1$, поскольку

$$g'(\nu) = 0 \Leftrightarrow -(2H+1)(H+1)\nu^H + (2H+1)(H+1) = 0 \Leftrightarrow \nu = 1.$$

Значит, $g(\nu) \leq g(1) = 0$ для любого ν . Следовательно, $f'(\nu) \leq 0$ для любого ν , откуда получается, что функция f убывает на $(0, \infty)$. Учитывая равенства $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, находим, что

$$f(\nu) > 0 \quad \text{при } \nu \in (0, 1), \quad f(\nu) < 0 \quad \text{при } \nu \in (1, \infty).$$

Тогда из (4.2) несложно вывести следующее утверждение:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} V_{2N} = \begin{cases} \infty & \text{при } \nu \neq 1, \\ 0 & \text{при } \nu = 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Иными словами, в ситуации, когда на рынке присутствует арбитраж ($p \neq q$), инвестор, используя указанную выше стратегию Каги, всегда может воспользоваться арбитражной возможностью и получить прибыль.

Если $M = 2N + 1$, $N \in \mathbf{N}$, то имеем следующее представление:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} V_{2N+1} = N & \frac{-\nu^{2H+1} + (2H+1)\nu^{H+1} - (2H+1)\nu^H + 1}{\nu^H(1-\nu)} \\ & + \left(P_U \left(\frac{\nu - \nu^{H+1}}{1-\nu} - H \right) - P_D \left(H - \frac{1 - \nu^H}{\nu^H - \nu^{H+1}} \right) \right). \end{aligned}$$

Второе слагаемое не зависит от N , поэтому ответ (4.3) остается прежним.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005, 402 с.
2. Пастухов С. В. О некоторых вероятностно-статистических методах в техническом анализе. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 2, с. 297–316.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964, 498 с.
4. Ширяев А. Н. О мартингалных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением. М.: МИАН, 2007, 78 с. (Совр. пробл. матем., в. 8.)
5. Нисон С. За гранью японских свечей: новые японские методы графического анализа. М.: Евро, 2009, 304 с.

Поступила в редакцию
21.X.2010