Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Шапошников, О сильной единственности решений вырожденных двумерных стохастических уравнений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 2, 301–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:20:26

© 2011 г.

ШАПОШНИКОВ А. В.*

**О СИЛЬНОЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ
ВЫРОЖДЕННЫХ ДВУМЕРНЫХ
СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ¹⁾**

Доказано существование сильного решения и его потраекторная единственность для стохастических дифференциальных уравнений на плоскости с вырожденной матрицей диффузии и ограниченным борелевским сносом специального вида. Метод основан на оценках производных Маллявэна решений стохастических уравнений и критерии компактности в классе Соболева на винеровском пространстве.

Ключевые слова и фразы: стохастическое дифференциальное уравнение, сильное решение, потраекторная единственность, производная Маллявэна, критерий компактности.

В данной работе рассматриваются стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) в $\mathbf{R}^2$ следующего вида:

$$\begin{cases} dX_t = Y_t dt, & X_0 = x_0, \\ dY_t = b(X_t, Y_t) dt + dW_t, & Y_0 = y_0. \end{cases}$$

Некоторые эргодические свойства систем СДУ этого типа (наличие инвариантной меры, перемешивание, сходимост к стационарному режиму) рассматривались в работах [1]–[3], в которых также обсуждались вопросы существования и единственности решений уравнений указанного вида. В работе [1] доказано, что если снос b является борелевской функцией и растет не более чем линейно, т.е. $|b(x, y)| \leq C(1 + |x| + |y|)$, то рассматриваемое уравнение имеет слабое решение; при этом решение единственно в смысле распределения и является строго марковским процессом. В работе [3] доказано существование сильного решения при некоторых дополнительных предположениях (липшицевости или монотонности по переменной y сноса b). В статье [1] ставится вопрос о существовании сильного решения в случае борелевской функции b . Основным результатом данной заметки состоит в следующей теореме.

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия.

¹⁾ Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00518 и программой SFB 701 при университете Билефельда.

Теорема 1. Для стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{cases} dX_t = Y_t dt, \\ dY_t = b(\alpha X_t + \beta Y_t) dt + dW_t, \end{cases} \quad \begin{matrix} X_0 = x_0, \\ Y_0 = y_0, \end{matrix} \quad (1)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\beta \neq 0$, b — ограниченная борелевская функция, справедливы следующие утверждения:

- (i) при указанных условиях сильное решение существует;
- (ii) для решений данного уравнения выполняется потраекторная единственность.

Доказательство. Вначале опишем общий план построения сильного решения.

1) Рассматриваются последовательность уравнений со «сглаженными» коэффициентами $\{b_n\}$, которые в подходящем смысле сходятся к функции b , и последовательность решений этих уравнений $\{(X^n, Y^n)\}$. Далее, используя дифференцируемость в смысле Маллявэна решений уравнений с гладкими коэффициентами, мы доказываем, что найдется такое $\delta > 0$, что для каждого $t \in [0, \delta]$ последовательности $\{X_t^n\}$ и $\{Y_t^n\}$ образуют относительно компактные множества в пространстве $L^2(\mu)$.

2) Следующий шаг состоит в том, чтобы доказать, что найдутся такие подпоследовательность $\{n_k\}$ и прогрессивно измеримый относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ процесс (X^0, Y^0) , что последовательность $\{(X^{n_k}, Y^{n_k})\}$ сходится к процессу (X^0, Y^0) в $L^2([0, \delta] \times C[0, 1], \mathcal{BF}, \lambda \otimes \mu)$, где $\mathcal{BF}$ обозначает σ -алгебру прогрессивно измеримых относительно потока $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ множеств.

3) Следующий этап заключается в доказательстве того, что найдется согласованный с потоком $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ процесс $(\hat{X}, \hat{Y})$ с почти наверное непрерывными траекториями, который является решением уравнения (1) на отрезке $[0, \delta]$.

4) Далее, используя марковское свойство слабого решения, мы доказываем, что сильное решение существует на всем временном промежутке $[0, \infty)$.

5) Наконец, утверждение (ii) вытекает из утверждения (i) и известной теоремы о том, как связаны между собой потраекторная единственность, сильное существование и слабая единственность (см. [4]).

З а м е ч а н и е 1. В работе [5] применяется идейно близкая схема построения сильного решения в случае единичной матрицы диффузии и ограниченного борелевского сноса. Основные отличия заключаются в различных подходах к исследованию уравнения для производной в смысле Маллявэна решения СДУ с гладким коэффициентом сноса. При получении необходимых оценок производных решений СДУ в работе [5] на с. 3937 используется явное представление (формула (48)) решения линейного неоднородного ОДУ со «случайными» коэффициентами. Поскольку в общем случае матрицы, задающие данное дифференциальное

уравнение, не обязаны коммутировать, то, по-видимому, приведенное в [5] рассуждение в полной общности охватывает только одномерный случай.

Перейдем к реализации намеченного плана. Заметим, что достаточно рассмотреть случай, когда $\beta = 1$, поскольку общая ситуация сводится к данной с помощью введения новой функции $\hat{b}(x) = b(\beta x)$. Итак, далее будем считать, что $\beta = 1$. Пусть $\{b_n\}$ — последовательность финитных бесконечно дифференцируемых функций, почти всюду по мере Лебега сходящаяся к функции b и удовлетворяющая условию $\|b_n\|_\infty \leq \|b\|_\infty$. Пусть d — некоторое положительное число. Обозначим через W пространство $C_0[0, d]$ непрерывных функций w на отрезке $[0, d]$ таких, что $w(0) = 0$, наделенное стандартной $\sup$ -нормой $\|\cdot\|_\infty$. Пусть μ — стандартная мера Винера на борелевской σ -алгебре пространства W . Через H обозначим гильбертово пространство $W_0^{1,2}[0, d]$, состоящее из абсолютно непрерывных функций h на отрезке $[0, d]$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$h(0) = 0, \quad \|h\|_H^2 < \infty, \quad \text{где} \quad \|h\|_H^2 = \int_{[0, d]} |h'(t)|^2 dt.$$

Напомним, что пространство H является пространством Камерона–Мартина меры μ . Также, когда это будет удобно, будем обозначать меру Винера через $\mathbb{P}$ и считать, что она задана на $C[0, \infty)$. Напомним определение класса Соболева $\mathbb{D}^{1,2}$ на пространстве W с мерой Винера μ . Пусть $\mathcal{FC}_b^\infty$ обозначает совокупность всех функций f на W вида

$$f(x) = \varphi(l_1(x), \dots, l_n(x)), \quad \varphi \in C_b^\infty(\mathbf{R}^n), \quad l_i \in W^*, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Пространство Соболева $\mathbb{D}^{1,2}$ определяется (см. [6], см. также [7], [8]) как пополнение $\mathcal{FC}_b^\infty$ относительно нормы $\|f\|_{1,2} = \|f\|_{L^2(\mu)} + \|\nabla f\|_{L^2(\mu, H)}$, где ∇f обозначает градиент функции f вдоль H . Для фиксированной функции F из пространства $\mathbb{D}^{1,2}$ отображение $\nabla F: W \rightarrow H$ можно рассматривать как вещественнозначную функцию двух аргументов (w, t) , где $w \in W$, $t \in [0, d]$, причем при фиксированном w эта функция принадлежит классу $W_0^{1,2}[0, d]$ по переменной t . Следуя [6], обозначим производную этой функции по t (при фиксированном w) в точке $s \in [0, d]$ через $D_s F(w)$. Таким образом, если i — естественный изоморфизм H и $L^2[0, d]$, переводящий h в h' , то элемент $i(\nabla F(w))$ пространства $L^2[0, d]$ есть функция $s \mapsto D_s F(w)$.

Доказательство относительной компактности последовательностей $\{X_t^n\}$ и $\{Y_t^n\}$ основано на следующих двух утверждениях (см. [9]).

Предложение 1. Пусть C — компактный самосопряженный оператор на H с плотным образом. Тогда для каждого $c > 0$ множество

$$\mathfrak{M} = \left\{ F \in \mathbb{D}^{1,2}(W): \int_W |F|^2 d\mu + \int_W \|C^{-1}(\nabla F)\|^2 d\mu \leq c \right\}$$

относительно компактно в $L^2(\mu)$.

Доказательство предложения 1 можно найти также в книге [7] (см. гл. 5, § 12).

Предложение 2. Для любого $\gamma > 0$ единичный шар B относительно нормы

$$\|f\|_{L^2[0,1]} + \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(t) - f(s)|^2}{|t - s|^{1+\gamma}} dt ds \right)^{1/2}$$

компактен в топологии пространства $L^2[0,1]$. Следовательно, найдется такой инъективный компактный самосопряженный оператор S в $L^2[0,1]$, что образ единичного шара при действии S содержит B .

З а м е ч а н и е 2. Приведенная норма эквивалентна норме пространства Бесова $B_{2,2}^{\gamma/2}[0,1]$ (см. [10]), доказательство компактности в $L^2[0,1]$ единичного шара относительно указанной нормы также можно найти в [10] (см. гл. 6, п. 26.3.3). Для полноты изложения приведем простое доказательство предложения 2, используя критерий компактности в $L^2[0,1]$. Основной этап заключается в проверке равномерной непрерывности в L^2 указанного семейства функций. Из формулы замены переменных мы получаем следующее равенство:

$$J := \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(t) - f(s)|^2}{|t - s|^{1+\gamma}} dt ds = 2 \int_0^1 \frac{1}{h^{1+\gamma}} \int_0^{1-h} |f(s+h) - f(s)|^2 ds dh.$$

Положим

$$\varphi_1(h) = \int_0^{1-2h} |f(s+h) - f(s)|^2 ds, \quad \varphi_2(h) = \int_0^{1-h} |f(s+h) - f(s)|^2 ds.$$

Тогда для любого $h \in (0, 1/2)$ и любого $u \in (0, h)$ выполняется неравенство $\varphi_1(h) \leq 2\varphi_1(u) + 2\varphi_2(h-u)$. Временно зафиксируем $h \in (0, 1/2)$ и проинтегрируем обе части этого неравенства по u по интервалу $(0, h)$:

$$\begin{aligned} h\varphi_1(h) &\leq 2 \int_0^h \varphi_1(u) du + 2 \int_0^h \varphi_2(h-u) du \\ &\leq 2h^{1+\gamma} \int_0^h \frac{\varphi_1(u)}{u^{1+\gamma}} du + 2h^{1+\gamma} \int_0^h \frac{\varphi_2(h-u)}{(h-u)^{1+\gamma}} du \\ &\leq 4h^{1+\gamma} \int_0^1 \frac{1}{v^{1+\gamma}} \int_0^{1-v} |f(s+v) - f(s)|^2 ds dv. \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется неравенство $\varphi_1(h) \leq 4h^\gamma J$. Заменяя f на функцию, равную $f(1-x)$, можно получить аналогичную оценку и для

$$\psi_1(h) = \int_{2h}^1 |f(s-h) - f(s)|^2 ds.$$

Дальнейшее обоснование несложно.

Следствие 1. Для любых $c, \gamma > 0$ множество

$$\mathfrak{N} = \left\{ F \in \mathbb{D}^{1,2}(W): \mathbb{E}|F|^2 + \mathbb{E} \int_0^d \int_0^d \frac{|D_t F - D_s F|^2}{|t-s|^{1+\gamma}} dt ds \leq c \right\}$$

относительно компактно в $L^2(\mu)$.

Доказательство. Пусть i обозначает естественный изоморфизм пространств H и $L^2[0, d]$, который каждому вектору $h \in H$ ставит в соответствие функцию $h' \in L^2[0, d]$. Определим оператор C в пространстве H следующей формулой: $C = i^{-1} \circ S \circ i$, где S — компактный самосопряженный оператор из предложения 2. Для завершения доказательства осталось воспользоваться предложением 1.

Основная цель дальнейших рассуждений заключается в том, чтобы получить такие оценки производных от решений уравнений со сглаженными коэффициентами b_n , которые бы позволили воспользоваться следствием 1.

Теперь временно предположим, что b — финитная бесконечно дифференцируемая функция. Пусть (X, Y) — решение соответствующего уравнения, где X обозначает функцию двух переменных $(t, w) \mapsto X_t(w)$. Как известно, в этом случае $X_t(w)$, $Y_t(w)$ бесконечно дифференцируемы в смысле Маллявэна (см. [8], [11]), причем для фиксированной функции $h \in H$ производная

$$V_t = \begin{pmatrix} \partial_h X_t \\ \partial_h Y_t \end{pmatrix}$$

будет удовлетворять следующему уравнению со «случайными» коэффициентами:

$$dV_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha b'(\alpha X_t + Y_t) & b'(\alpha X_t + Y_t) \end{pmatrix} V_t dt + \begin{pmatrix} 0 \\ h'(t) \end{pmatrix} dt, \quad V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Рассмотрим также вспомогательное однородное матричное уравнение

$$dM_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha b'(\alpha X_t + Y_t) & b'(\alpha X_t + Y_t) \end{pmatrix} M_t dt, \quad M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

причем его решение будем обозначать через

$$M_t = \begin{pmatrix} f_1(t, \alpha X + Y) & f_2(t, \alpha X + Y) \\ g_1(t, \alpha X + Y) & g_2(t, \alpha X + Y) \end{pmatrix}.$$

З а м е ч а н и е 3. В случае гладкого коэффициента b мы можем считать, что для всех пар (x_0, y_0) выбраны такие версии процессов (X_t, Y_t) , что для каждого t случайные величины $X_t^{(x_0, y_0)}$ и $Y_t^{(x_0, y_0)}$ гладко

зависят от начальных условий (x_0, y_0) . Тогда для каждого t коэффициенты матрицы M_t совпадают с производными по начальным условиям от (X_t, Y_t) , т.е.

$$M_t = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_t}{\partial x_0} & \frac{\partial X_t}{\partial y_0} \\ \frac{\partial Y_t}{\partial x_0} & \frac{\partial Y_t}{\partial y_0} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что V_t можно представить в виде

$$V_t = M_t \int_0^t M_s^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ h'(s) \end{pmatrix} ds = \int_0^t M_t M_s^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ h'(s) \end{pmatrix} ds. \quad (4)$$

Положим $q(t) = b'(\alpha X_t + Y_t)$. Уравнения для нахождения первого и второго столбцов матрицы M_t отличаются лишь начальными условиями и имеют вид $f'(t) = g(t)$, $f''(t) = \alpha q(t)f(t) + q(t)g(t)$, $f(0) = f_0$, $g(0) = g_0$. Далее нам также понадобится функция $r(t)$, которая определяется из равенства

$$g(t) = \exp \left(\int_0^t q(s) ds \right) r(t).$$

Нетрудно заметить, что в этом случае (с учетом предыдущего уравнения) справедливо равенство

$$r'(t) = \alpha q(t) \exp \left(- \int_0^t q(s) ds \right) f(t).$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} r(t) &= g_0 + \int_0^t \left(-\alpha \exp \left(- \int_0^s q(l) dl \right) \right)' f(s) ds \\ &= g_0 - \alpha \exp \left(- \int_0^t q(s) ds \right) f(t) + \alpha f_0 + \int_0^t \alpha r(s) ds \\ &= g_0 + \alpha f_0 - \alpha \exp \left(- \int_0^t q(s) ds \right) \left(f_0 + \int_0^t g(s) ds \right) + \int_0^t \alpha r(s) ds. \end{aligned}$$

Умножая полученное равенство на $\exp(\int_0^t q(s) ds)$, мы получаем, что

$$\begin{aligned} g(t) &= (g_0 + \alpha f_0) \exp \left(\int_0^t q(s) ds \right) - \alpha f_0 - \alpha \int_0^t g(s) ds \\ &\quad + \alpha \int_0^t g(s) \exp \left(\int_s^t q(l) dl \right) ds. \end{aligned}$$

Напомним, что нас интересуют те два случая, когда набор (f_0, g_0) равен $(1, 0)$ или $(0, 1)$, поэтому далее мы будем предполагать, что выполняется одно из этих равенств. Тогда для каждого $p \geq 1$ существует такое

$C_0 = C_0(p)$, что для любого $t \in [0, 1]$ справедливо неравенство, которое и будет лежать в основе существенной части дальнейших рассуждений:

$$|g(t)|^p \leq C_0 \left(\exp \left(p \int_0^t q(s) ds \right) + 1 + \int_0^t |g(s)|^p ds + \int_0^t |g(s)|^p \exp \left(p \int_s^t q(l) dl \right) ds \right).$$

Заметим, что в случае $b \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ (который мы сейчас и рассматриваем) решение уравнения (3) может быть получено как предел последовательных приближений на каждом отрезке, длина которого не превосходит $\delta_0(\|b'\|_\infty)$, независимо от начальных условий в левом конце отрезка. Из этого замечания нетрудно получить, что $f(s)$ и $g(s)$ как функции от w (винеровской траектории) при каждом фиксированном s измеримы относительно $\mathcal{F}_s^W$, при этом найдется число $C(\|b'\|_\infty)$ такое, что $\sup_{s \in [0, 1]} (|f(s)| + |g(s)|) \leq C(\|b'\|_\infty)$ для всякого w . Ниже нам понадобится такое наблюдение (которое также вытекает из последнего замечания): если $b \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, то $f(s)$ и $g(s)$ зависят от w только «через» процесс $Z = \alpha X + Y$, т.е. для каждого $s \in [0, 1]$ мы имеем $f(s) = f(s, Z)$ и $g(s) = g(s, Z)$, где в данном случае Z обозначает траекторию процесса Z до момента s включительно.

Чтобы оценить $\mathbb{E}|F(Z)|^p$, воспользуемся тем, что решение уравнения (1) может быть получено с помощью аналога теоремы Гирсанова (см. [1]), и тем, что имеет место единственность распределения для решений данного уравнения (см. [1]). Итак, если мы рассмотрим процессы $\tilde{Y}_t = y_0 + W_t$, $\tilde{X}_t = x_0 + \int_0^t \tilde{Y}_s ds$, то относительно меры

$$\varrho d\mathbb{P} = \exp \left(\int_0^1 b(\alpha \tilde{X}_t + \tilde{Y}_t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^1 b^2(\alpha \tilde{X}_t + \tilde{Y}_t) dt \right) d\mathbb{P}$$

пара $(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t)$ будет решением рассматриваемого СДУ (вместе с некоторым новым винеровским процессом). Тогда мы получаем, что

$$\mathbb{E}|F(Z)|^p = \int |F(\alpha \tilde{X} + \tilde{Y})|^p \varrho d\mathbb{P} \leq \left(\int |F(\alpha \tilde{X} + \tilde{Y})|^{2p} d\mathbb{P} \right)^{1/2} \left(\int \varrho^{2p} d\mathbb{P} \right)^{1/2},$$

причем из теоремы Гирсанова следует, что выполняется неравенство

$$\int \varrho^{2p} d\mathbb{P} \leq C_2(\|b\|_\infty) < \infty.$$

Положим

$$\varrho_0 = \exp \left(\int_0^d \tilde{Y}_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^d \tilde{Y}_t^2 dt \right).$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \int |F(\alpha\tilde{X} + \tilde{Y})|^{2p} d\mathbb{P} &= \int |F(\alpha\tilde{X} + \tilde{Y})|^{2p} \varrho_0^{1/2} \varrho_0^{-1/2} d\mathbb{P} \\ &\leq \left(\int |F(\alpha\tilde{X} + \tilde{Y})|^{4p} \varrho_0 d\mathbb{P} \right)^{1/2} \left(\int \varrho_0^{-1} d\mathbb{P} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Используя распределение максимума винеровского процесса, нетрудно получить, что можно так выбрать значение d , не зависящее от x_0 , y_0 , p и b , чтобы выполнялось неравенство

$$\int \varrho_0^{-2} d\mathbb{P} + \int \varrho_0^2 d\mathbb{P} < \infty.$$

Поскольку относительно меры $\varrho_0 d\mathbb{P}$ процесс $\alpha\tilde{X} + \tilde{Y}$ имеет вид $\alpha x_0 + y_0 + \tilde{W}$, где $\tilde{W}$ — винеровский процесс относительно меры $\rho d\mathbb{P}$, то в итоге мы получаем, что существует константа $C_3(\|b\|_\infty, x_0, y_0)$ такая, что

$$\mathbb{E}|F(\alpha X + Y)|^p \leq C_3 \left[\mathbb{E}|F(\alpha x_0 + y_0 + W)|^{4p} \right]^{1/4}. \quad (5)$$

Для сокращения записи будем считать, что $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Пусть $R(x) = 2 \int_0^x b(z) dz$. Тогда функция R является липшицевой с константой Липшица $2\|b\|_\infty$, при этом R бесконечно дифференцируема, если $b \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Применяя формулу Ито к функции R и винеровскому процессу, находим, что

$$R(W_t) = \int_0^t 2b(W_s) dW_s + \int_0^t b'(W_s) ds.$$

С помощью данного равенства и теоремы Гирсанова мы можем получить следующую оценку, которая нам понадобится в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_s^t b'(W_l) dl \right) \middle| \mathcal{F}_s^W \right] &\leq \mathbb{E} \left[\exp(4\|b\|_\infty |W_t - W_s|) \middle| \mathcal{F}_s^W \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\exp \left(8 \int_s^t b(W_l) dW_l - \frac{64}{2} \int_s^t b^2(W_l) dl \right) \middle| \mathcal{F}_s^W \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{64}{2} \int_s^t b^2(W_l) dl \right) \middle| \mathcal{F}_s^W \right] \leq C_4(\|b\|_\infty). \end{aligned}$$

Теперь, используя полученные выше вспомогательные неравенства, оценим $\mathbb{E}|g(t, W)|^p$. Из неравенства для $|g(t, W)|^p$, переходя к математическим ожиданиям и применяя теорему Фубини, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|g(t, W)|^p &\leq C_0 \left(C_4(p\|b\|_\infty) + 1 + \int_0^t \mathbb{E}|g(s, W)|^p ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \mathbb{E} \left[|g(s, W)|^p \exp \left(p \int_s^t b'(W_l) dl \right) \right] ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_0 \left(C_4(p\|b\|_\infty) + 1 + \int_0^t \mathbb{E}|g(s, W)|^p ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \mathbb{E} \left[|g(s, W)|^p \mathbb{E} \left[\exp \left(p \int_s^t b'(W_l) dl \right) \middle| \mathcal{F}_s^W \right] \right] ds \right) \\
&\leq C_0 \left(C_4(p\|b\|_\infty) + 1 + \int_0^t (1 + C_4(p\|b\|_\infty)) \mathbb{E}|g(s, W)|^p ds \right). \quad (6)
\end{aligned}$$

Из неравенства Гронуолла следует, что существует такая константа $C_5(p, \|b\|_\infty, \alpha)$, что для каждого $t \in [0, d]$ выполняется неравенство $\mathbb{E}|g(s, W)|^p \leq C_5(p, \|b\|_\infty, \alpha)$.

Следующий шаг состоит в том, чтобы доказать, что для каждого $p_0 \geq 1$ существуют положительные числа $d(\|b\|_\infty, p_0)$ и $C_6(p_0, \|b\|_\infty, \alpha)$ со следующим свойством: для любого $p \in [1, p_0]$ и любой пары чисел $s, t \in [0, d]$ справедливо неравенство $\mathbb{E}|g(t, W) - g(s, W)|^p \leq C_6|t - s|^{1/4}$. Для этого нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Для каждого $p_0 \geq 1$ существуют числа $d(\|b\|_\infty, p_0)$ и $C_7(p_0, \|b\|_\infty, \alpha) > 0$ такие, что для всякого $p \in [1, p_0]$ и всяких чисел $s, t \in [0, d]$ выполняется неравенство

$$\mathbb{E} \left| \exp \left(\int_s^t b'(W_l) dl \right) - 1 \right|^p \leq C_7|t - s|^{1/2}.$$

Доказательство. Заметим, что из теоремы Гирсанова и неравенства Дуба можно получить следующую оценку, которая выполняется при $p \in [1, p_0]$ и $s, t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\max_{\theta \in [s, t]} \exp \left(\int_s^\theta 8pb(W_l) dW_l \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\max_{\theta \in [s, t]} \exp \left(\int_s^\theta 8pb(W_l) dW_l - \int_s^\theta 64p^2b^2(W_l) dl + \int_s^\theta 64p^2b^2(W_l) dl \right) \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[\max_{\theta \in [s, t]} \exp \left(\int_s^\theta 16pb(W_l) dW_l - \frac{1}{2} \int_s^\theta 256p^2b^2(W_l) dl \right) \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\max_{\theta \in [s, t]} \exp \left(\int_s^\theta 128p^2b^2(W_l) dl \right) \right] \leq C_8(p, \|b\|_\infty, \alpha).
\end{aligned}$$

Пользуясь явной формулой для плотности распределения максимума винеровского процесса, мы можем получить, что найдется такое число $d(\|b\|_\infty, p_0) > 0$, для которого имеет место оценка

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(8p_0\|b\|_\infty \max_{\theta \in [s, t]} |W_\theta - W_s| \right) \right] < C_9(p_0, \|b\|_\infty).$$

Применим следующее неравенство Буркхольдера–Дэвиса–Ганди для мартингалов (см., например, [11]): $\mathbb{E}(\max_{s \in [0, t]} |M_s|^{2p}) \leq C(p) \mathbb{E}\langle M \rangle_t^p$, где

$\langle M \rangle$ обозначает квадратическую вариацию мартингала M . Оно показывает, что для всех чисел p , лежащих в отрезке $[1, p_0]$, будут выполняться неравенства

$$\mathbb{E} \left| \int_s^t 2b(W_l) dW_l \right|^{2p} \leq C_{10}(p_0) \mathbb{E} \left| \int_s^t 4b^2(W_l) dl \right|^p \leq C_{10}(p_0) \cdot 4^p \|b\|_\infty^{2p} |t - s|.$$

Из доказанных выше оценок и цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \exp \left(\int_s^t b'(W_l) dl \right) - 1 \right|^p &\leq \mathbb{E} \left[\max_{\theta \in [s, t]} \exp \left(p \int_s^\theta b'(W_l) dl \right) \left| \int_s^t b'(W_l) dl \right|^p \right] \\ &\leq \left(\mathbb{E} \left[\max_{\theta \in [s, t]} \exp \left(2p \int_s^\theta b'(W_l) dl \right) \right] \right)^{1/2} \left(\mathbb{E} \left| \int_s^t b'(W_l) dl \right|^{2p} \right)^{1/2} \\ &\leq C_{11}(p, \|b\|_\infty, \alpha) \left(\mathbb{E} \left[\exp \left(8p \|b\|_\infty \max_{\theta \in [s, t]} |W_\theta - W_s| \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \left[\max_{\theta \in [s, t]} \exp \left(\int_s^\theta 8pb(W_l) dW_l \right) \right] \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\mathbb{E} (2\|b\|_\infty |w_t - w_s|)^{2p} + \mathbb{E} \left| \int_s^t 2b(W_l) dW_l \right|^{2p} \right)^{1/2} \\ &\leq C_7(p_0, \|b\|_\infty, \alpha) |t - s|^{1/2} \end{aligned}$$

следует утверждение леммы.

Наконец, используя интегральное равенство для g , мы получаем, что если t и s лежат в отрезке $[0, d(\|b\|_\infty, p_0)]$ и $p \in [1, p_0/8]$ (где $d(\|b\|_\infty, p_0)$ — то же, что и в лемме), то выполняется неравенство $\mathbb{E}|g(t, W) - g(s, W)|^p \leq (12 + 12|\alpha|)^p (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)$, где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_0^s pb'(W_u) du \right) \left| \exp \left(\int_s^t b'(W_l) dl \right) - 1 \right|^p \right] \\ &\leq \left(\mathbb{E} \exp \left(\int_0^s 2pb'(W_u) du \right) \right)^{1/2} \left(\mathbb{E} \left| \exp \left(\int_s^t b'(W_l) dl \right) - 1 \right|^{2p} \right)^{1/2} \\ &\leq C_{12}(p_0, \|b\|_\infty, \alpha) |t - s|^{1/4}, \\ \Delta_2 &= \mathbb{E} \left| \int_s^t g(u, W) du \right|^p \leq |t - s|^{p/2} \mathbb{E} \int_0^1 (1 + |g(u, W)|^{2p}) du \\ &\leq |t - s|^{p/2} \left(1 + \int_s^t \mathbb{E} |g(u, W)|^{2p} du \right) \\ &\leq |t - s|^{p/2} (1 + C_5) \leq |t - s|^{1/2} (1 + C_5), \\ \Delta_3 &= \mathbb{E} \left| \int_0^t g(u, W) \exp \left(\int_u^t b'(W_l) dl \right) du \right. \\ &\quad \left. - \int_0^s g(u, W) \exp \left(\int_u^s b'(W_l) dl \right) du \right|^p \\ &\leq 2^p \left(\mathbb{E} \left| \int_0^s g(u, W) \exp \left(\int_u^s b'(W_l) dl \right) \left(\exp \left(\int_s^t b'(W_l) dl \right) - 1 \right) du \right|^p \right. \end{aligned}$$

$$+ \mathbb{E} \left| \int_s^t g(u, W) \exp \left(\int_u^t b'(W_l) dl \right) du \right|^p \leq C_{13}(p_0, \|b\|_\infty, \alpha) |t - s|^{1/4}.$$

Поскольку $f' = g$, то из оценки (6) для $\mathbb{E}|g(t, W)|^p$ мы получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|f(t, W) - f(s, W)|^p &\leq C_{14}(p_0, \|b\|_\infty, \alpha) |t - s|^{1/2} \\ &\times \mathbb{E} \left(1 + \int_s^t |g(u, W)|^{2p} du \right) \leq C_{15}(p_0, \|b\|_\infty, \alpha) |t - s|^{1/2}, \\ \mathbb{E}|f(t, W)|^p &\leq C_{16}(p_0, \|b\|_\infty, \alpha). \end{aligned}$$

Временно зафиксируем $a \in [0, d(\|b\|_\infty, p_0)]$. Пусть $k_{i,j}(s, \alpha X + Y)$ обозначают коэффициенты матрицы $M_a M_s^{-1}$, т.е.

$$M_a M_s^{-1} = \begin{pmatrix} k_{1,1}(s, \alpha X + Y) & k_{1,2}(s, \alpha X + Y) \\ k_{2,1}(s, \alpha X + Y) & k_{2,2}(s, \alpha X + Y) \end{pmatrix}.$$

Докажем, что для каждого $p_0 \geq 1$ найдется такая константа $C_{17}(p_0, \|b\|_\infty, \alpha)$, что для всякого $p \in [1, p_0]$ и всякой пары точек $s, t \in [0, d(\|b\|_\infty, p_0)]$ справедливы неравенства

$$\mathbb{E}|k_{i,j}(t, W) - k_{i,j}(s, W)|^p \leq C_{17} |t - s|^{1/16}, \quad \mathbb{E}|k_{i,j}(s, W)|^p \leq C_{17}.$$

Доказательство основано на двух приводимых ниже предложениях.

Предложение 3. Если для случайных функций φ и ψ величины $\mathbb{E}|\varphi(t) - \varphi(s)|^{2p}$, $\mathbb{E}|\psi(t) - \psi(s)|^{2p}$, $\mathbb{E}|\varphi(s)|^{2p}$, $\mathbb{E}|\psi(s)|^{2p}$ конечны, то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\varphi(t)\psi(t) - \varphi(s)\psi(s)|^p &\leq 2^p \left(\mathbb{E}|\varphi(t)|^{2p} \right)^{1/2} \left(\mathbb{E}|\psi(t) - \psi(s)|^{2p} \right)^{1/2} \\ &+ 2^p \left(\mathbb{E}|\psi(s)|^{2p} \right)^{1/2} \left(\mathbb{E}|\varphi(t) - \varphi(s)|^{2p} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Доказательство. Обоснование несложно — надо воспользоваться оценкой $\mathbb{E}|\varphi(t)\psi(t) - \varphi(s)\psi(s)|^p \leq 2^p \mathbb{E}|\varphi(t)\psi(t) - \varphi(t)\psi(s)|^p + 2^p \mathbb{E}|\varphi(t)\psi(s) - \varphi(s)\psi(s)|^p$.

Предложение 4. Выполнено равенство

$$\det M_s(W) = \exp \left(\int_0^s b'(W_l) dl \right).$$

Доказательство. Данное равенство вытекает непосредственно из формулы Лиувилля для определителя фундаментальной матрицы решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения.

Используя явную формулу для коэффициентов обратной матрицы, полученные выше оценки для $\{f_i\}$ и $\{g_i\}$, предложения 3, 4 и лемму 1, нетрудно получить требуемое утверждение для функций $\{k_{i,j}\}$. Далее, воспользовавшись неравенством (5), мы получаем, что для каждого $p_0 \geq 1$ найдется константа $C_{18}(p_0, \|b\|_\infty, \alpha)$, для которой выполняется следующее условие: для всякого $p \in [1, p_0]$ и всякой пары точек $s, t \in [0, d(\|b\|_\infty, p_0)]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|k_{i,j}(t, \alpha X + Y) - k_{i,j}(s, \alpha X + Y)|^p &\leq C_{18}|t - s|^{1/64}, \\ \mathbb{E}|k_{i,j}(s, \alpha X + Y)|^p &\leq C_{18}. \end{aligned}$$

Выше мы получили выражение (формула (4)) для производной вдоль вектора h от функционалов $X_a(w), Y_a(w)$:

$$\begin{pmatrix} \partial_h X_a \\ \partial_h Y_a \end{pmatrix} = \int_0^a M_a M_s^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ h'(s) \end{pmatrix} ds.$$

Следовательно, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} D_s X_a &= I_{(0,a)}(s)(k_{1,1}(s, \alpha X + Y) + k_{1,2}(s, \alpha X + Y)), \\ D_s Y_a &= I_{(0,a)}(s)(k_{2,1}(s, \alpha X + Y) + k_{2,2}(s, \alpha X + Y)). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^a \int_0^a \frac{|k_{i,j}(t) - k_{i,j}(s)|^2}{|t - s|^{1+1/64}} dt ds &= \int_0^a \int_0^a \frac{\mathbb{E}|k_{i,j}(t) - k_{i,j}(s)|^2}{|t - s|^{1+1/64}} dt ds \leq C_{18}a^2, \\ \mathbb{E} \int_0^a k_{i,j}(s)^2 ds &= \int_0^a \mathbb{E}(k_{i,j}(s)^2) ds \leq C_{18}a, \end{aligned}$$

то из следствия 1 мы получаем, что семейства функционалов $\{X_a^n\}, \{Y_a^n\}$ ($a \in [0, d]$) образуют относительно компактные множества в $L^2(\mu)$.

Применяя диагональную процедуру, мы можем выбрать такую подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, что для каждого $t \in \mathbf{Q} \cap [0, d]$ последовательность $(X_t^{n_k}, Y_t^{n_k})$ будет сходиться к некоторой паре элементов (X_t^{00}, Y_t^{00}) из $L^2(\mu)$. Нетрудно заметить, что для этой подпоследовательности сходимость $(X_t^{n_k}, Y_t^{n_k})$ в $L^2(\mu)$ будет иметь место не только для рациональных t , а вообще для всех вещественных $t \in [0, d]$. Это вытекает из следующих неравенств, которые выполняются для решений уравнений вида (1):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|Y_t - Y_s|^2 &\leq 2\mathbb{E}\left(\int_s^t b(\alpha X_s + Y_s) ds\right)^2 + 2\mathbb{E}|W_t - W_s|^2 \\ &\leq 2\|b\|_\infty^2(t - s)^2 + 2|t - s|, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^2 = \mathbb{E}\left|\int_s^t Y_u du\right|^2 \leq |t - s| \int_s^t \mathbb{E}|Y_u|^2 du. \quad (8)$$

Из приведенных выше оценок также вытекает, что последовательность двумерных процессов (X^{n_k}, Y^{n_k}) сходится в $L^2([0, d] \times C[0, 1], \mathcal{B}\mathcal{F}, \lambda \otimes \mu)$, где $\mathcal{B}\mathcal{F}$ обозначает сигма-алгебру прогрессивно измеримых относительно потока $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ множеств; при этом мы можем считать, что для почти всех по мере $\lambda \otimes \mu$ пар (t, w) имеет место равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_t^{n_k}, Y_t^{n_k})[w] = (X_t^0, Y_t^0)[w]$, где (X^0, Y^0) — «предельный» прогрессивно измеримый процесс. Поскольку для каждого $t \in [0, d]$ имеет место сходимость $(X_t^{n_k}, Y_t^{n_k})$ в $L^2(\mu)$, то для почти всех t почти наверное справедливо равенство $(X_t^{00}, Y_t^{00}) = (X_t^0, Y_t^0)$. Теперь докажем, что для λ -почти всех t из отрезка $[0, d]$ для пары процессов (X^0, Y^0) почти наверное выполняются соотношения

$$X_t^0 = x_0 + \int_0^t Y_s^0 ds, \quad Y_t^0 = y_0 + \int_0^t b(\alpha X_s^0 + Y_s^0) ds + W_t. \quad (9)$$

Рассмотрим $t \in [0, d]$, для которого $\{(X_t^{n_k}, Y_t^{n_k})\}$ сходится в среднем квадратическом к (X_t^0, Y_t^0) . Для упрощения обозначений будем считать, что выбранная подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ совпадает с исходной последовательностью $\{1, 2, 3, \dots\}$. Поскольку при каждом n пара процессов (X^n, Y^n) является решением уравнения (1) со сносом b_n , то справедливы следующие равенства:

$$X_t^n = x_0 + \int_0^t Y_s^n ds, \quad Y_t^n = y_0 + \int_0^t b_n(\alpha X_s^n + Y_s^n) ds + W_t. \quad (10)$$

Для доказательства равенств (9) оценим сумму квадратов L^2 -норм разностей правых и левых частей соотношений (9) и (10). В первом случае указанные нормы оцениваются с помощью выражения $2(\mathbb{E}|X_t^n - X_t^0|^2 + \mathbb{E} \int_0^t |Y_t^n - Y_t^0|^2 dt)$, которое стремится к 0, когда n стремится к бесконечности. Для оценки квадрата L^2 -нормы разности

$$\int_0^t b_n(\alpha X_s^n + Y_s^n) ds - \int_0^t b(\alpha X_s^0 + Y_s^0) ds \quad (11)$$

нам потребуется еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Для каждого $t \in [0, d]$, для которого имеет место сходимость $\{(X_t^n, Y_t^n)\}$ к (X_t^0, Y_t^0) в $L^2(\mu)$, распределение вектора (X_t^0, Y_t^0) совпадает с распределением вектора $(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t)$, где $\tilde{Y}_t = y_0 + W_t$, $\tilde{X}_t = x_0 + \int_0^t \tilde{Y}_s ds$, относительно меры

$$\varrho d\mathbb{P} = \exp \left(\int_0^d b(\alpha \tilde{X}_t + \tilde{Y}_t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^d b^2(\alpha \tilde{X}_t + \tilde{Y}_t) dt \right) d\mathbb{P}.$$

Доказательство. Заметим, что если в утверждении леммы заменить b на b_n и соответственно (X_t^0, Y_t^0) на (X_t^n, Y_t^n) , а $(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t)$ на

$(\tilde{X}_t^n, \tilde{Y}_t^n)$, то аналогичное равенство будет выполняться в силу уже упоминавшегося ранее утверждения о слабых решениях рассматриваемого уравнения (которые можно построить с помощью теоремы Гирсанова). Теперь заметим, что так как по предположению векторы $\{(X_t^n, Y_t^n)\}$ сходятся к (X_t^0, Y_t^0) в $L^2(\mu)$, то их распределения слабо сходятся к распределению (X_t^0, Y_t^0) . Заметим, что из сходимости последовательности $\{\varrho_n\}$ к ϱ в $L^1(\mathbb{P})$ вытекает слабая сходимость распределений векторов $(\tilde{X}_t^n, \tilde{Y}_t^n)$ к распределению $(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t)$ (в этом нетрудно убедиться, используя определение слабой сходимости и теорему о замене переменных в интеграле Лебега). Напомним, что по построению $\{b_n\}$ — последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbf{R})$, которая почти всюду по мере Лебега сходится к функции b , и при этом выполняется условие $\|b_n\|_\infty \leq \|b\|_\infty$. Тогда по теореме Лебега об ограниченной сходимости мы получаем, что последовательность процессов $b_n(\alpha\tilde{X}_t + \tilde{Y}_t)$ сходится в $L^2([0, d] \times C[0, 1], \mathcal{B}\mathcal{F}, \lambda \otimes \mu)$ к процессу $b(\alpha\tilde{X}_t + \tilde{Y}_t)$, откуда нетрудно получить, что последовательность $\{\varrho_n\}$ сходится к ϱ по вероятности. Наконец, поскольку найдется такое $C_{18}(d, \|b\|_\infty)$, что $\mathbb{E}\varrho_n^2 \leq C_{18}$, то мы получаем, что последовательность $\{\varrho_n\}$ равномерно интегрируема, откуда с учетом полученной сходимости по вероятности и вытекает требуемое утверждение.

Теперь докажем, что L^2 -норма разности (11) стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности. Зафиксируем число $\eta \in (0, 1)$. В силу доказанной леммы и теоремы о мажорируемой сходимости можно найти номер $m_0(\eta)$ такой, что для каждого $m \geq m_0(\eta)$ выполняется неравенство

$$\Lambda_1(m) = \mathbb{E} \int_0^t |b(\alpha X_s^0 + Y_s^0) - b_m(\alpha X_s^0 + Y_s^0)|^2 ds \leq \eta.$$

Так как последовательность $\{(X_t^n, Y_t^n)\}$ сходится по вероятности к (X_t^0, Y_t^0) не только для данного t , но и для почти всех $s \in [0, d]$, то $\Lambda_2(m, n)$ стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности, где

$$\Lambda_2(m, n) = \mathbb{E} \int_0^t |b_m(\alpha X_s^0 + Y_s^0) - b_m(\alpha X_s^n + Y_s^n)|^2 ds.$$

Наконец, при $n \geq m_0(\eta)$ оценим величину

$$\Lambda_3(m, n) = \mathbb{E} \int_0^t |b_m(\alpha X_s^n + Y_s^n) - b_n(\alpha X_s^n + Y_s^n)|^2 ds.$$

Для этого снова воспользуемся теоремой Фубини и неравенством (5):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_0^t |b_m(\alpha X_s^n + Y_s^n) - b_n(\alpha X_s^n + Y_s^n)|^2 ds \\ &= \int_0^t \mathbb{E} |b_m(\alpha X_s^n + Y_s^n) - b_n(\alpha X_s^n + Y_s^n)|^2 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_3 \int_0^t \left(\mathbb{E} |b_m(\alpha x_0 + y_0 + W_s) - b_n(\alpha x_0 + y_0 + W_s)|^8 \right)^{1/4} ds \\
&\leq C_3 \int_\eta^t \left(\mathbb{P} \{ |b_m(\alpha x_0 + y_0 + W_s) - b_n(\alpha x_0 + y_0 + W_s)| \geq \eta \} \right. \\
&\quad \left. \times (2\|b\|_\infty)^8 + \eta^8 \right)^{1/4} ds + C_3 (2\|b\|)^2 \eta.
\end{aligned}$$

Так как последовательность $\{b_n\}$ сходится почти всюду относительно меры Лебега, то с учетом полученного неравенства (при необходимости увеличивая $m_0(\eta)$) мы можем считать, что выполняется неравенство

$$\mathbb{E} \int_0^t |b_m(\alpha X_s^n + Y_s^n) - b_n(\alpha X_s^n + Y_s^n)|^2 ds \leq C_3 (4 + 4\|b\|)^2 \eta.$$

Поскольку искомая разность (11) оценивается числом $8(\Lambda_1(m_0(\eta)) + \Lambda_2(m_0(\eta), n) + \Lambda_3(m_0(\eta), n))$, то мы получаем требуемое утверждение.

Определим прогрессивно измеримый относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ процесс $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t)$ на отрезке $[0, d]$ следующим образом:

$$\hat{X}_t = x_0 + \int_0^t Y_s^0 ds, \quad \hat{Y}_t = y_0 + \int_0^t b(\alpha X_s^0 + Y_s^0) ds + W_t. \quad (12)$$

В силу сказанного выше мы получаем, что для почти всех точек t с вероятностью единица справедливо равенство $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t) = (X_t^0, Y_t^0)$. Следовательно, для почти всех t почти наверное выполняются равенства

$$\hat{X}_t = x_0 + \int_0^t \hat{Y}_s ds, \quad \hat{Y}_t = y_0 + \int_0^t b(\alpha \hat{X}_s + \hat{Y}_s) ds + W_t, \quad (13)$$

а так как в (13) обе части представляют собой процессы с почти наверное непрерывными траекториями, то на множестве полной меры эти процессы совпадают. Итак, мы построили сильное решение уравнения (1) на отрезке $[0, d(\|b\|_\infty)]$.

З а м е ч а н и е 4. Из неравенств (7) и (8) нетрудно получить, что процесс (X_t^{00}, Y_t^{00}) стохастически непрерывен, поэтому для каждого $t \in [0, d]$ почти наверное выполняется равенство $(X_t^{00}, Y_t^{00}) = (\hat{X}_t, \hat{Y}_t)$. Так как X_t^{00} и Y_t^{00} являются пределами в $L^2(\mu)$ последовательностей функционалов, ограниченных в совокупности по норме пространства $\mathbb{D}^{1,2}(W)$, то функционалы $\hat{X}_t$ и $\hat{Y}_t$ также принадлежат $\mathbb{D}^{1,2}(W)$.

Теперь докажем, что сильное решение существует на всем временном промежутке $[0, \infty)$. Пусть $(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t)$ — слабое решение уравнения (1) на некотором вероятностном пространстве. В работе [1] доказано, что в этом случае $(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t)$ будет однородным и строго марковским, при этом указано, что данное утверждение является следствием слабой единственности. Используя этот факт и теорему 3.1 из [4], мы получаем, что утверждение о единственности будет выполняться и для трехмерного

процесса $(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t, \tilde{W}_t)$, следовательно, он будет однородным и строго марковским (однако нам потребуется лишь однородность и марковость). Поскольку сильное решение $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t)$ на отрезке $[0, d]$ было получено как предел решений уравнений с гладкими коэффициентами, то найдутся заданные на $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times [0, d] \times C[0, \infty)$ борелевские отображения (прогрессивно измеримые по переменным t и w) — которые мы будем для удобства обозначать $X^{000}(x_0, y_0, t, w)$ и $Y^{000}(x_0, y_0, t, w)$ — со следующим свойством: для почти всех относительно меры $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda \otimes \mu$ наборов аргументов выполнено равенство

$$(\hat{X}_t, \hat{Y}_t) = (X^{000}(x_0, y_0, t, w), Y^{000}(x_0, y_0, t, w)).$$

Определим «вспомогательный» процесс $(\hat{X}_t^0, \hat{Y}_t^0)$ для $t \in [d, 2d]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (\hat{X}_t^0, \hat{Y}_t^0) &= (X^{000}(\hat{X}_d, \hat{Y}_d, t-d, W_{d \leq \cdot \leq 2d} - W_d), \\ &\quad Y^{000}(\hat{X}_d, \hat{Y}_d, t-d, W_{d \leq \cdot \leq 2d} - W_d)), \end{aligned}$$

где $W_{d \leq \cdot \leq 2d}$ обозначает траекторию винеровского процесса на отрезке $[d, 2d]$. Чтобы получить искомым процесс на отрезке $[0, d]$, достаточно применить ту же процедуру, которую мы применяли для построения процесса $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t)$ по процессу (X_t^0, Y_t^0) . Индуктивно продолжая указанную конструкцию, мы получим прогрессивно измеримый относительно потока $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ процесс $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t)$ на $[0, \infty)$, для которого

$$\text{Law}(\hat{X}_t, \hat{Y}_t, W_t) = \text{Law}(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t, \tilde{W}_t),$$

следовательно, $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t)$ и является искомым сильным решением уравнения (1). Так как для решений уравнения (1) выполняется единственность в смысле распределения, то, применяя теорему 3.2 из работы [4] и уже доказанное существование сильного решения, мы получаем, что для решений рассматриваемого уравнения выполняется потраекторная единственность.

Автор выражает благодарность В. И. Богачеву и А. Ю. Веретенникову за полезные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abourashchi N., Veretennikov A. Yu. On stochastic averaging and mixing. — Theory Stoch. Process., 2010, v. 16(32), № 1, p. 111–129.
2. Campillo F., Pardoux E. Numerical methods in ergodic optimal stochastic control and application. — Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 1992, v. 177, p. 59–73.
3. Campillo F. Optimal ergodic control for a class of nonlinear stochastic systems: application to semi-active vehicle suspensions. — Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control (Tampa, 1989, New York: IEEE, 1989, p. 1190–1195).

4. Черный А. С. О сильной и слабой единственности для стохастических дифференциальных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 483–497.
5. Meyer-Brandis T., Proske F. Construction of strong solutions of SDE's via Malliavin calculus. — J. Funct. Anal., 2010, v. 258, № 11, p. 3922–3953.
6. Nualart D. The Malliavin calculus and related topics. Berlin: Springer-Verlag, 2006, 382 p.
7. Bogachev V. I. Gaussian Measures. Providence: Amer. Math. Soc., 1998, 433 p.
8. Bogachev V. I. Differentiable Measures and the Malliavin Calculus. Providence: Amer. Math. Soc., 2010, 488 p.
9. Da Prato G., Malliavin P., Nualart D. Compact families of Wiener functionals. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1992, v. 315, № 12, p. 1287–1291.
10. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975, 480 с.
11. Ikeda N., Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Amsterdam/Tokyo: North-Holland/Kodansha, 1989, 555 p.
12. Bally V., Sausseureau B. A relative compactness criterion in Wiener–Sobolev spaces and application to semi-linear stochastic PDEs. — J. Funct. Anal., 2004, v. 210, № 2, p. 465–515.

Поступила в редакцию
22.XI.2010