Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Шалошников, Регулярность и качественные свойства решений параболических уравнений для мер, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 2, 318–350

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4377>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:44:24

© 2011 г.

ШАПОШНИКОВ С. В.*

РЕГУЛЯРНОСТЬ И КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА
РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МЕР¹⁾

Получены локальные и глобальные оценки плотностей решений параболических уравнений для мер в предположении интегрируемости коэффициента сноса относительно решения и для произвольного начального распределения. В терминах функции Ляпунова описано поведение плотности на бесконечности. Исследовано поведение плотности при приближении к начальному условию.

Ключевые слова и фразы: переходные вероятности, нижние и верхние оценки плотностей, параболические уравнения для мер.

1. Введение. В данной работе исследуются борелевские локально конечные меры μ на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$, удовлетворяющие параболическому уравнению

$$L^* \mu = 0, \quad (1.1)$$

где

$$Lu(x, t) = \partial_t u(x, t) + a^{ij}(x, t) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x, t) + b^i(x, t) \partial_{x_i} u(x, t).$$

Мы предполагаем, что коэффициенты a^{ij} и b^i локально интегрируемы относительно меры μ . Уравнение понимается в смысле интегрального тождества

$$\int_{\mathbf{R}^d \times (0, 1)} Lu \, d\mu = 0$$

для всякой функции $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$.

Уравнение (1.1) выполняется для переходных вероятностей диффузионного процесса с матрицей диффузии A и сносом b , например, для диффузионного процесса, удовлетворяющего стохастическому уравнению

$$d\xi_t = \sigma(\xi_t) dw_t + b(\xi_t) dt, \quad A = \frac{1}{2} \sigma \sigma^*.$$

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: starticle@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 09-01-12157-офи-м, 10-01-00518-а) и проекта SFB 701 при университете Билефельда.

В работе [1] получены достаточные условия для наличия у решения уравнения (1.1) соболевской плотности относительно меры Лебега (см. также обзор [2]). В работах [3] и [4] при широких условиях на коэффициенты доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши в классе вероятностных мер. Ограниченность плотности решения задачи Коши и двусторонние оценки получены в [5]–[8]. Основные классические результаты, касающиеся локальной и глобальной регулярности решения, можно найти в работах [9]–[13]. В частности, в случае ограниченных коэффициентов хорошо известны двусторонние оценки для фундаментальных решений [9], [11] и переходных вероятностей [14]. Основная новизна результатов данной работы состоит в том, что не предполагается локальных и глобальных ограничений роста коэффициента b , а требуется его локальная или глобальная интегрируемость относительно решения μ . Для переформулировки условий интегрируемости функций по мере μ в терминах коэффициентов уравнения используется метод функций Ляпунова.

Мы предполагаем, что матрица диффузии $A = (a^{ij}(x, t))_{1 \leq i, j \leq d}$ является симметричной, а ее коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

(C1) существует такое положительное число λ , что для всех $x, y \in \mathbf{R}^d$ и $t \in (0, 1)$

$$|a^{ij}(x, t) - a^{ij}(y, t)| \leq \lambda |x - y|;$$

(C2) существуют такие числа $m > 0$ и $M > 0$, что для всех $x, y \in \mathbf{R}^d$ и $t \in (0, 1)$

$$m|y|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq d} a^{ij}(x, t) y_i y_j \leq M|y|^2.$$

Если в дополнение к условиям (C1) и (C2) предположить, что $b \in L^p_{\text{loc}}(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$ для некоторого $p > d + 2$, то, как показано в [1], мера μ имеет плотность ϱ относительно меры Лебега. Именно изучение локальных и глобальных свойств плотности ϱ является основной задачей этой работы, состоящей из нескольких пунктов.

Первый пункт — введение. Во втором пункте уточняются результаты о локальной регулярности решения, полученные в работе [1]. Особенно нас интересуют локальные оценки соболевской нормы решения. Применяя локальные оценки, мы доказываем верхние оценки плотности. В частности, в этом пункте получен следующий результат. Пусть $p > d + 2$ и $[T_0, T_1] \subset [0, 1]$. Предположим, что $\mu = \varrho dx dt$ является вероятностным решением уравнения (1.1), т.е. $\mu \geq 0$ и $\mu(\mathbf{R}^d \times (0, 1)) = 1$, и коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условиям (C1) и (C2). Пусть также $b \in L^p(\mu, \mathbf{R}^d \times [T_0, T_1])$ и задана функция $\Phi \in C^{2,1}(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ со следующими свойствами: $\Phi(x, t) \geq C_0 > 0$ и

$$\Phi, |A \nabla \Phi|^p \Phi^{1-p}, |L \Phi|^p \Phi^{1-p} \in L^1(\mu, \mathbf{R}^d \times [T_0, T_1]).$$

Тогда для каждого отрезка $[\tau_0, \tau_1] \subset (T_0, T_1)$ найдется такая константа $C > 0$, что

$$\varrho(x, t) \leq C\Phi(x, t)^{-1}, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^d \times [\tau_0, \tau_1].$$

Более того, если $[T_0, T_1] = [0, 1]$ и

$$\sup_{t \in (0, 1)} \int_{\mathbf{R}^d} \Phi(x, t) \varrho(x, t) dx < \infty,$$

то для всякого числа $0 < \tau < 1$ найдется такая константа $C = C(\tau) > 0$, что

$$\varrho(x, t) \leq Ct^{-d/2}\Phi(x, t)^{-1}, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^d \times (0, \tau).$$

Третий пункт посвящен верхним оценкам решения задачи Коши. Будем говорить, что семейство борелевских вероятностных мер $(\mu_t)_{0 \leq t < 1}$ (т.е. $\mu_t \geq 0$ и $\mu_t(\mathbf{R}^d) = 1$) является решением задачи Коши

$$\begin{cases} L^* \mu_t = 0, \\ \mu_0 = \nu, \end{cases} \quad (1.2)$$

где ν — борелевская вероятностная мера на $\mathbf{R}^d$, если мера $\mu(dx dt) = \mu_t(dx) dt$ удовлетворяет уравнению $L^* \mu = 0$ в указанном выше смысле и для всякой функции $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^d} \zeta(x) d\mu_t = \int_{\mathbf{R}^d} \zeta(x) d\nu.$$

При исследовании задачи Коши нам требуется более сильное условие на матрицу $A = (a^{ij})$, а именно, заменим условие (C1) следующим условием:

(P1) существует такое положительное число λ , что для всех $x, y \in \mathbf{R}^d$ и $t, s \in (0, 1)$

$$|a^{ij}(x, t) - a^{ij}(y, s)| \leq \lambda(|x - y| + \sqrt{|t - s|}).$$

Используя информацию о начальном условии, мы выводим более точные результаты, чем в п. 2. Приведем несколько примеров.

Пусть коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условиям (P1) и (C2). Пусть также $b \in L^p(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$ для некоторого $p > d + 2$. Предположим, что семейство вероятностных мер $(\mu_t)_{0 < t < 1}$ является решением задачи Коши (1.2) с начальным условием $\nu(dy) = \varrho_0(y) dy$, причем $\varrho_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$. Тогда мера $\mu = \mu_t(dx) dt$ имеет плотность ϱ относительно меры Лебега и для всякого $0 < \tau < 1$ справедливо включение $\varrho \in L^\infty(\mathbf{R}^d \times [0, \tau])$, причем существует такая константа $C(\tau) > 0$, что

$$\|\varrho\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d \times [0, \tau])} \leq C(\tau) \|\varrho_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} + C(\tau) t^{(p-d-2)/2} (1 + \|b\|_{L^p(\mu)})^p.$$

Другой пример: пусть a^{ij} удовлетворяют условиям (P1) и (C2), $b \in L^p(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$ и семейство вероятностных мер $(\mu_t)_{0 < t < 1}$ является решением задачи Коши с начальным условием δ_0 , где δ_0 — дираковская мера в нуле. Пусть, кроме того, существует функция $\Phi \in C^2(\mathbf{R}^d)$, для которой выполняются следующие условия:

$$|A\nabla\Phi|^p\Phi^{1-p}, |L\Phi|^p\Phi^{1-p} \in L^1(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1)), \sup_{t \in (0, 1)} \int_{\mathbf{R}^d} \Phi(x, t) \varrho(x, t) dx < \infty.$$

Тогда для всякого $0 < \tau < 1$ найдется такая константа $C = C(\tau) > 0$, что для всех $t \in (0, \tau)$ и $x \in \mathbf{R}^d$ выполнено неравенство

$$\varrho(x, t) \leq C\Phi(x)^{-1} \left(t^{(p-d-2)/2} + t^{-d/2} \exp \left\{ -\frac{K|x|^2}{2t} \right\} \right), \quad K = \tau M^{-1}.$$

Применяя априорные оценки с функцией Ляпунова, мы приходим к следующему результату. Пусть матрица A удовлетворяет условиям (P1) и (C2) и найдутся такие положительные числа $c, c_1, c_2, c_3, c_4, p > d + 2, k \geq 2$, что $c_2 > 2kpc_4, c_2 > ckM$ и

$$(b(x, t), x) \leq c_1 - c_2|x|^k, \quad |b(x, t)| \leq c_3 \exp\{c_4|x|^k\}.$$

Тогда для всякого $0 < \tau < 1$ найдется такая константа $C(\tau) > 0$, что для всех $t \in (0, \tau)$ и $x \in \mathbf{R}^d$ выполняется неравенство

$$\varrho(x, t) \leq C(\tau)t^{-d/2} \exp \left\{ -c|x|^k - \frac{K|x|^2}{2t} \right\} + C(\tau)t^{(p-d-2)/2} \exp\{-c|x|^k\},$$

где $K = \tau M^{-1}$. В частности, такая оценка имеет место в случае оператора

$$Lu = \partial_t u + \Delta u - |x|^{k-2}(x, \nabla u).$$

Отметим, что часть результатов, описанных выше, была анонсирована в работе [15].

В конце второго пункта приводится результат, уточняющий характер сходимости к начальному условию при $t \rightarrow 0$. А именно, показано, что в случае, когда начальное условие задано локально ограниченной плотностью ϱ_0 относительно меры Лебега и для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ выполняется включение $b \in L^p(\mu, U \times (0, 1))$ с $p > d + 2$, то имеет место локальная сходимость во всех L^p , т.е.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_U |\varrho(x, t) - \varrho_0(x)|^p dx = 0.$$

Наконец, четвертый пункт посвящен нижним оценкам решений параболических уравнений для мер. Основные результаты этого пункта без подробных доказательств были анонсированы в статье [16]. В этом

пункте нам будет удобнее рассматривать уравнение (1.1) с оператором $\mathcal{L}$ в дивергентной форме

$$\mathcal{L}u(x, t) := \partial_t u(x, t) + \partial_{x_i}(a^{ij}(x, t)\partial_{x_j}u(x, t)) + b^i(x, t)\partial_{x_i}u(x, t).$$

При этом для матрицы $A = (a^{ij})$ выполняются те же условия (C1) и (C2). Уравнение $\mathcal{L}^*\mu = 0$ понимается так же, как и раньше. Отметим, что при наших условиях на матрицу A запись уравнения в неди-вергентной или дивергентной форме — вопрос исключительно удобства. Действительно, коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условию Липшица по пространственной переменной x , следовательно, имеют ограниченные соболевские производные, а переход от одной записи к другой происходит заменой сноса b^i на снос $b^i - \partial_{x_j}a^{ij}$.

В случае локально ограниченного коэффициента b в [6] были получены оценки плотности ϱ при $|x| \rightarrow +\infty$. Так, например, если $|b(x, t)| \leq W(|x|/\theta)$, где $\theta > 1$ и W — непрерывная положительная возрастающая функция на $[0, \infty)$, то существует такое положительное число $K = K(d, m, M, \theta)$, что непрерывная версия функции ϱ удовлетворяет неравенству

$$\varrho(x, t) \geq \varrho(0, s) \exp \left\{ -K \left(1 + \frac{t-s}{s} W(|x|)^2 + \frac{1}{t-s} |x|^2 \right) \right\}$$

при $0 < s < t < 1$, $x \in \mathbf{R}^d$. Эта оценка выводится из неравенства Харнака для решений параболического уравнения. В п. 4 без предположений о локальной ограниченности или интегрируемости относительно меры Лебега коэффициента b получены похожие оценки вида

$$\varrho(x, t) \geq \exp\{-f(c_1|x|^2 + c_2)\}, \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad t \in J, \quad (1.3)$$

где $J = [\tau_1, \tau_2] \subset (0, 1)$ — произвольный отрезок, $c_1 = c_1(J)$, $c_2 = c_2(J)$ — некоторые положительные константы, а $f \in C^2([0, +\infty))$ удовлетворяет следующим условиям:

(Н1) $f(z) > 0$, $f'(z) > 0$ и $f''(z) > 0$ при $z > 0$;

(Н2) существуют числа $0 < \gamma < 1$ и $z_0 \geq 0$ такие, что функция $e^{-(1-\gamma)f(z)}$ является выпуклой вниз (т.е. $(e^{-(1-\gamma)f})'' \geq 0$) при $z > z_0$.

Для получения оценки (1.3) в дополнение к условиям (C1) и (C2) достаточно потребовать следующее условие:

(C3) $|b| \exp\{\psi(|b|)\} \in L^p(\mu)$, где $p > d+2$ и ψ является неотрицательной, строго возрастающей, непрерывной функцией на $[0, \infty)$, причем для некоторого $N > 0$;

(Н3) $\psi^{-1}(z) \leq N\sqrt{f'(f^{-1}(z))}$ для всех $z > 0$.

Например, условиям (Н1), (Н2) и (Н3) удовлетворяют функции $f(z) = e^z$ и $\psi(z) = z^2$. Отметим также, что представленные в этой работе результаты обобщают достаточные условия строгой положительности непрерывных версий плотностей переходных вероятностей, которые

были получены в статье [17]. Так в [17] было доказано, что для существования строго положительной плотности решения μ достаточно включения $\exp\{\delta|b|^2\} \in L^1(\mu)$. Однако при $f(z) = e^{e^z}$ и $\psi(z) = \delta z^2 |\ln z|^{-\kappa}$, где $0 < \kappa < 1$, получаем более слабое по сравнению с [17] условие на b , гарантирующее строгую положительность плотности решения. Аналогичные результаты в эллиптическом случае получены в работах [18] и [19].

Напомним некоторые обозначения. Для области $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ через $W^{q,1}(\Omega)$ обозначим соболевское пространство функций, принадлежащих $L^q(\Omega)$ вместе с их обобщенными частными производными первого порядка. Пусть $W_0^{q,1}(\Omega)$ — замыкание по стандартной соболевской норме в $W^{q,1}(\Omega)$ класса гладких функций с компактным носителем в Ω . Через $W_{\text{loc}}^{q,1}$ и L_{loc}^q обозначим пространства функций, ограничения которых на каждый шар $U \subset \mathbf{R}^d$ входят в $W^{q,1}(U)$ и $L^q(U)$ соответственно. Для интервала J и области $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ через $\mathbb{H}^{q,1}(\Omega, J)$ обозначим пространство измеримых функций u на $\Omega \times J$ таких, что $u(\cdot, t) \in W^{q,1}(\Omega)$ и

$$\|u\|_{\mathbb{H}^{q,1}(\Omega, J)} := \left(\int_J \|u(\cdot, t)\|_{W^{q,1}(\Omega)}^q dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Кроме того, $\mathbb{H}_0^{q,1}(\Omega, J)$ обозначает замыкание множества функций $C_0^\infty(\Omega \times J)$ относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^{q,1}(\Omega, J)}$. Пусть также $\mathbb{H}_{\text{loc}}^{q,1}(\Omega, J)$ — пространство измеримых функций u , определенных на $\Omega \times J$, таких, что $\varphi u \in \mathbb{H}^{q,1}(\Omega, J)$ для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times J)$. Через $\mathcal{H}^{p,1}(U, J)$ обозначим пространство всех функций $u \in \mathbb{H}^{p,1}(U, J)$, для которых $\partial_t u \in \mathbb{H}^{p,-1}(U, J)$ и конечна норма

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{p,1}(U, J)} = \|\partial_t u\|_{\mathbb{H}^{p,-1}(U, J)} + \|u\|_{\mathbb{H}^{p,1}(U, J)}.$$

Для функций u от (x, t) будем писать

$$\nabla u := \nabla_x u := (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_d} u).$$

Обозначение $U(x, R)$ используется для открытого шара радиуса R с центром в x .

2. Внутренние оценки. При получении внутренних оценок существенно используются идеи и результаты работы [1]. Некоторые из уже известных результатов приводятся с полным доказательством. Это связано с тем, что для наших целей важно знать не просто, что некоторая норма решения ограничена, но и какой именно вид имеет ограничивающая эту норму константа.

Следующая лемма содержит утверждение теоремы 3.7 из [1].

Лемма 2.1. Пусть $q > 1$. Предположим, что для конечной борелевской меры μ с компактным носителем в $Q = U \times J$ имеет место

неравенство

$$\left| \int (\partial_t \varphi + a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi) d\mu \right| \leq N \|\nabla_x \varphi\|_{L^q(Q)} \quad (2.1)$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(Q)$. Пусть коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условиям (C1) и (C2). Тогда мера μ имеет плотность ϱ относительно меры Лебега и

$$\|\varrho\|_{\mathcal{H}^{q',1}(Q)} \leq C N,$$

где C зависит только от λ, m, M, d, q, Q .

Лемма 2.2. Пусть $p > d + 2$. Предположим, что конечная борелевская мера μ на $Q = U \times J$ удовлетворяет неравенству

$$\left| \int (\partial_t \varphi + a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi) d\mu \right| \leq N_1 \int (|\varphi| + |\nabla_x \varphi|) |\beta| d\mu \quad (2.2)$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(U \times J)$. Предположим также, что для коэффициентов a^{ij} выполняются условия (C1), (C2) и $|\beta| \in L^p(\mu)$. Тогда мера μ имеет плотность ϱ относительно меры Лебега и для любой области $Q' = U' \times J', \overline{Q'} \subset Q$

$$\|\varrho\|_{\mathcal{H}^{p,1}(Q')} \leq C \left(\int_Q |\beta|^p d\mu + \mu(Q) \right),$$

где C зависит только от $\lambda, m, M, d, p, Q, Q'$.

Доказательство. Согласно теореме 3.1 из [1], $\mu = \varrho dx dt$ и $\varrho \in L^{r_0}(Q_0)$ для всякой области $Q_0 = U_0 \times J_0, \overline{Q_0} \subset Q$, и любого $r_0 \in (1, (d+2)')$. Более того,

$$\|\varrho\|_{L^{r_0}(Q_0)} \leq C_0 (\|\beta\|_{L^1(\mu)} + \mu(Q_0)),$$

где C_0 зависит только от $\lambda, m, M, d, r, Q, Q_0$. Заметим, что $p' < (d+2)'$, и зафиксируем $r_0 > p'$ и $Q_0 \supset \overline{Q'}$. Предположим, что мы уже доказали, что $\varrho \in L^r(Q_1)$ для некоторого $r > p'$. Пусть $Q' \subset Q_2 \subset Q_1$. Заменяя μ на $\zeta \mu$, где $\zeta \in C_0^\infty(Q_1)$ и $\zeta = 1$ на Q_2 , а также заменяя β на $|\beta| + 1$, можно считать, что мера μ имеет компактный носитель и выполняется неравенство (2.2) с новой константой N_2 , где N_2 зависит только от $\lambda, m, M, \zeta, N_1$. Мы хотим получить оценку (2.1). Повторяя рассуждения из теоремы 2.3 работы [17], получаем

$$\int_{Q_1} (|\varphi| + |\nabla_x \varphi|) |\beta| d\mu \leq \|\beta \varrho\|_{L^{q'}(Q_1)} \|\nabla_x \varphi\|_{L^q(Q_1)},$$

где $q' = pr(p+r-1)^{-1}$ и

$$\|\beta \varrho\|_{L^{q'}(Q_1)} \leq \|\beta\|_{L^p(\mu)} (\|\varrho\|_{L^r(Q_1)})^{(p-1)/p} \leq p^{-1} \|\beta\|_{L^p(\mu)}^p + p'^{-1} \|\varrho\|_{L^r(Q_1)}.$$

Таким образом, неравенство (2.1) имеет место с

$$N = N_2(\|\beta\|_{L^p(\mu)}^p + \|\varrho\|_{L^r(Q_1)}).$$

Следовательно, применима лемма 2.1. Принимая во внимание, что мы рассматриваем $\zeta\varrho$, находим

$$\|\varrho\|_{\mathcal{H}^{q',1}(Q_2)} \leq MN_2(\|\beta\|_{L^p(\mu)}^p + \|\varrho\|_{L^r(Q_1)}).$$

Согласно теореме вложения, $\|\varrho\|_{L^{r_1}(Q_2)} \leq C(r_1, q', d, Q_2)\|\varrho\|_{\mathcal{H}^{q',1}(Q_2)}$ для всякого $r_1 > 1$ такого, что $1/r_1 > 1/q - 1/(d+2)$. Следовательно,

$$\frac{r_1}{r} < \frac{p}{p-1-r(p/(d+2)-1)}.$$

Заметим, что

$$\frac{p}{p-1-r(p/(d+2)-1)} > \frac{p}{p-1} = p' > 1.$$

Поэтому можно выбрать $r_1 > p'r$. Повторяя наши предыдущие рассуждения, устраиваем итерационный процесс. Конец доказательства полностью повторяет доказательство теоремы 2.3 работы [17].

Теорема 2.1. *Предположим, что неотрицательная локально конечная мера μ является решением уравнения (1.1) и коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условиям (C1) и (C2). Предположим также, что $b \in L_{\text{loc}}^p(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$ с $p > d+2$. Тогда мера μ имеет плотность ϱ относительно меры Лебега и для всякого $0 < \theta < 1$ существует константа $C = C(\theta) > 0$ такая, что*

$$\varrho(x, t) \leq C \left(t^{(p-d-2)/2} \int_{\theta t}^{t/\theta} \int_{U(x, \sqrt{t})} |b|^p d\mu + t^{-(d+2)/2} \mu(U(x, \sqrt{t}) \times [\theta t, \theta^{-1}t]) \right)$$

для всех $t \in (0, \theta)$ и $x \in \mathbf{R}^d$.

Доказательство. Легко видеть, что мера μ удовлетворяет неравенству (2.2) с $\beta = |b|$. Следовательно, мера μ имеет плотность ϱ относительно меры Лебега. Зафиксируем x и t и введем новые координаты $\tau = s/t, y = (z-x)/\sqrt{t}$ вместо старых (z, s) . Положим $v(y, \tau) = \varrho(t\tau, x + \sqrt{t}y)$. Тогда новая мера $\sigma = v(y, \tau) dy d\tau$ удовлетворяет уравнению (1.1) с коэффициентами

$$\tilde{a}^{ij}(y, \tau) = a^{ij}(x + \sqrt{t}y, t\tau), \quad \tilde{b}(y, \tau) = \sqrt{t}b(x + \sqrt{t}y, t\tau),$$

где $y \in \mathbf{R}^d, \tau \in (0, 1/t)$. Мера σ удовлетворяет неравенству (2.2) с $\beta = |\tilde{b}|$. Пусть $Q = U(0, 1) \times [\theta, \theta^{-1}]$ и $Q' = U(0, 1/2) \times [\theta', \theta'^{-1}]$, где $0 < \theta < \theta' < 1$. Применяя лемму 2.2 и теорему вложения, получаем

$$\|v\|_{L^\infty(Q')} \leq C \left(\int_Q |\beta|^p d\sigma + \sigma(Q) \right),$$

где C зависит только от $\lambda, m, M, d, p, \theta, \theta'$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \varrho(x, t) &= v(0, 1) \\ &\leq C \left(\int_{\theta}^{1/\theta} \int_{U(0,1)} |\beta(y, \tau)|^p v(y, \tau) dy d\tau + \sigma(U(0, 1) \times [\theta, \theta^{-1}]) \right) \\ &\leq C \left(t^{(p-d-2)/2} \int_{\theta t}^{t/\theta} \int_{U(x, \sqrt{t})} |b|^p d\mu + t^{-(d+2)/2} \mu(U(x, \sqrt{t}) \times [\theta t, \theta^{-1}t]) \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Предположим, что неотрицательная локально конечная мера μ удовлетворяет уравнению (1.1) с

$$Lu(x, t) = \partial_t u(x, t) + a^{ij}(x, t) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x, t) + b^i(x, t) \partial_{x_i} u(x, t) + c(x, t) u(x, t).$$

Пусть выполняются условия (C1), (C2) и $b, c \in L^p_{\text{loc}}(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$ для некоторого $p > d+2$. Тогда, применяя лемму 2 с $\tilde{\beta} = |\tilde{b}| + |\tilde{c}|$, где $\tilde{b} = \sqrt{t}b$, $\tilde{c} = tc$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \varrho(x, t) &\leq C \left(t^{(p-d-2)/2} \int_{\theta t}^{t/\theta} \int_{U(x, \sqrt{t})} |b|^p d\mu + t^{p-(d+2)/2} \int_{\theta t}^{t/\theta} \int_{U(x, \sqrt{t})} |c|^p d\mu \right. \\ &\quad \left. + t^{-(d+2)/2} \mu(U(x, \sqrt{t}) \times [\theta t, \theta^{-1}t]) \right) \end{aligned}$$

для всех $t \in (0, \theta)$ и $x \in \mathbf{R}^d$.

Следующая теорема позволяет оценить L^p -норму ϱ и $\nabla \varrho$.

Теорема 2.2. Предположим, что неотрицательная локально конечная мера μ является решением уравнения (1.1) и коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условиям (C1) и (C2). Предположим также, что $b \in L^p_{\text{loc}}(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$, где $p > d+2$. Тогда мера μ имеет плотность ϱ относительно меры Лебега и для любых чисел $\delta \in (0, 1)$ и $\theta, \theta' \in (0, 1)$, $\theta < \theta'$, существует константа $C = C(\theta, \theta', \delta) > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} &t^{(p-d-2)/(2p)} \|\nabla \varrho\|_{L^p(U(x, \delta\sqrt{t}), [\theta't, \theta'^{-1}t])} + t^{-(d+2)/(2p)} \|\varrho\|_{L^p(U(x, \delta\sqrt{t}), [\theta't, \theta'^{-1}t])} \\ &\leq C \left(t^{(p-d-2)/2} \int_{\theta t}^{t/\theta} \int_{U(x, \sqrt{t})} |b|^p d\mu + t^{-(d+2)/2} \mu(U(x, \sqrt{t}) \times [\theta t, \theta^{-1}t]) \right) \end{aligned}$$

для всех $t \in (0, \theta)$ и $x \in \mathbf{R}^d$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем x и t и введем новые координаты $\tau = s/t$, $y = (z - x)/\sqrt{t}$ вместо старых (z, s) . Положим $v(y, \tau) = \varrho(t\tau, x + \sqrt{t}y)$. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, мера $\sigma = v(y, \tau) dy d\tau$ удовлетворяет неравенству (2.2). Пусть $Q = U(0, 1) \times [\theta, \theta^{-1}]$ и $Q' = U(0, \delta) \times [\theta', \theta'^{-1}]$. Применяя лемму 2.2, получаем

$$\|\nabla v\|_{L^p(Q')} + \|v\|_{L^p(Q')} \leq 2\|v\|_{\mathcal{H}^{p,1}(Q')} \leq C \left(\int_Q |\tilde{\beta}|^p d\sigma + \sigma(Q) \right),$$

где C зависит только от $\lambda, m, M, d, p, \theta, \theta', \delta$. Возвращаясь к прежним координатам получаем требуемую оценку. Теорема доказана.

Утверждение, аналогичное замечанию 2.1, справедливо и для этой теоремы. Если мера μ удовлетворяет уравнению со слагаемым вида $c\mu$ и $c \in L^p_{\text{loc}}(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$, то выполняется аналогичная оценка, отличающаяся от уже полученной добавлением в правую часть неравенства слагаемого

$$Ct^{p-(d+2)/2} \int_{\theta t}^{t/\theta} \int_{U(x, \sqrt{t})} |c|^p d\mu.$$

Теперь применим полученные оценки для исследования поведения плотности решения ϱ при $x \rightarrow \infty$.

Следствие 2.1. Пусть $p > d + 2$ и $[T_0, T_1] \subset [0, 1]$. Предположим, что вероятностная мера μ (т.е. $\mu \geq 0$ и $\mu(\mathbf{R}^d \times (0, 1)) = 1$) является решением уравнения (1.1) и коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условиям (C1) и (C2).

(i) Пусть $b \in L^p(\mu, \mathbf{R}^d \times [T_0, T_1])$. Тогда мера μ имеет плотность ϱ относительно меры Лебега и $\varrho \in L^\infty(\mathbf{R}^d \times [\tau_0, \tau_1])$ для всякого отрезка $[\tau_0, \tau_1] \subset (T_0, T_1)$. Более того, если $[T_0, T_1] = [0, 1]$ и для почти всех $t \in (0, 1)$ функции $x \mapsto \varrho(x, t)$ являются вероятностными плотностями, то для всякого числа $0 < \tau < 1$ найдется такая константа $C(\tau) > 0$, что

$$\varrho(x, t) \leq C(\tau)t^{-d/2}, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^d \times (0, \tau).$$

(ii) Пусть $b \in L^p(\mu, \mathbf{R}^d \times [T_0, T_1])$ и задана функция $\Phi \in C^{2,1}(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ со следующими свойствами: $\Phi(x, t) \geq C_0 > 0$ и

$$\Phi, |A\nabla\Phi|^p\Phi^{1-p}, |L\Phi|^p\Phi^{1-p} \in L^1(\mu, \mathbf{R}^d \times [T_0, T_1]).$$

Тогда для каждого отрезка $[\tau_0, \tau_1] \subset (T_0, T_1)$ найдется такая константа $C > 0$, что

$$\varrho(x, t) \leq C\Phi(x, t)^{-1}, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^d \times [\tau_0, \tau_1].$$

Более того, если $[T_0, T_1] = [0, 1]$ и $\sup_{t \in (0, 1)} \int_{\mathbf{R}^d} \Phi(x, t) \varrho(x, t) dx < \infty$, то для всякого числа $\tau \in (0, 1)$ найдется такая константа $C(\tau) > 0$, что

$$\varrho(x, t) \leq C(\tau)t^{-d/2}\Phi(x, t)^{-1}, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^d \times (0, \tau).$$

Доказательство. Утверждение (i) немедленно следует из теоремы 2.1. Достаточно заметить, что для $\theta = \max\{\tau_1/T_1, T_0/\tau_0\}$ выполняются неравенства

$$\int_{\theta t}^{t/\theta} \int_{U(x, \sqrt{t})} |b|^p d\mu \leq \|b\|_{L^p(\mu, \mathbf{R}^d \times [T_0, T_1])}^p \quad \text{и} \quad \mu(U(x, \sqrt{t}) \times [\theta t, \theta^{-1}t]) \leq 1.$$

В случае $[T_0, T_1] = [0, 1]$ отметим, что так как функция $x \mapsto \varrho(x, t)$ является вероятностной плотностью для почти всех t , то

$$\int_{U(x, \sqrt{t})} \varrho(x, t) dx \leq 1,$$

следовательно, для $\theta = \tau$ имеем $\mu(U(x, \sqrt{t}) \times [\theta t, \theta^{-1}t]) \leq (\tau^{-1} - \tau)t$.

Для доказательства пункта (ii) рассмотрим новую меру $\sigma = \Phi\mu$. Мера σ удовлетворяет уравнению (1.1) с оператором $\tilde{L}$ вида

$$\tilde{L}u = \partial_t u + a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + (b^i + \Phi^{-1} a^{ij} \partial_{x_j} \Phi) \partial_{x_i} u + (\Phi^{-1} L \Phi) u.$$

Теперь применим к мере σ замечание 2.1 и повторим рассуждения, которые использовали при доказательстве (i). Следствие доказано.

Следствие 2.2. Пусть $p > d + 2$ и $[T_0, T_1] \subset [0, 1]$. Предположим, что μ является вероятностным решением уравнения (1.1) и коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условиям (C1) и (C2). Пусть $b \in L^p(\mu, \mathbf{R}^d \times [T_0, T_1])$ для некоторого $p > d + 2$. Тогда мера μ имеет плотность ϱ и для всякого отрезка $[\tau_0, \tau_1] \subset (T_0, T_1)$ выполняется включение $\varrho \in \mathbb{H}^{p,1}(\mathbf{R}^d, [\tau_0, \tau_1])$.

Доказательство. Выберем $0 < t < 1$ и $0 < \theta < \theta' < 1$ так, что $T_0 < \theta t < \theta' t < \tau_0$ и $\tau_1 < \theta'^{-1}t < \theta^{-1}t < T_1$. Положим

$$g(x) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{U(x, \delta\sqrt{t})} [|\nabla \varrho(y, s)|^p + \varrho^p(y, s)] dy ds,$$

$$f(x) = \int_{T_0}^{T_1} \int_{U(x, \sqrt{t})} |b|^p d\mu + \mu(U(x, \sqrt{t}) \times [T_0, T_1]).$$

По условию найдется такое число $M > 0$, что $\sup_{x \in \mathbf{R}^d} f(x) \leq M$. Из теоремы 2.2 немедленно вытекает неравенство $g(x) \leq C f(x)^p$ для некоторого числа $C > 0$. Получаем оценку $g(x) \leq C M^{p-1} f(x)$. По теореме Фубини $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Следовательно, $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Опять применяя теорему Фубини, получаем

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{\mathbf{R}^d} [|\nabla \varrho(y, s)|^p + \varrho^p(y, s)] dy ds < \infty.$$

Последнее по определению означает, что $\varrho \in \mathbb{H}^{p,1}(\mathbf{R}^d, [\tau_0, \tau_1])$. Следствие доказано.

3. Задача Коши. Результаты, приведенные в предыдущем пункте, не использовали информацию о распределении при $t = 0$. Оказывается, можно существенно уточнить верхние оценки, если исследовать не произвольное вероятностное решение уравнения (1.1), а решение задачи Коши (1.2). В этом пункте мы также предполагаем, что

выполнены условия (C1), (C2) и $b \in L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ для некоторого $p > d + 2$. При этих условиях решение уравнения μ обладает плотностью $\varrho \in \mathbb{H}^{p,1}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ относительно меры Лебега. Более того, у плотности ϱ есть непрерывная версия, и мы всюду ниже будем предполагать, что выбрана именно такая версия. Нам будет полезна следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть вероятностная мера $\mu = \mu_t(dx) dt$ является решением задачи Коши (1.2), где коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условиям (C1), (C2) и $b \in L^p_{\text{loc}}(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$. Тогда для всякой функции $\eta \in C^\infty(\mathbf{R}^d \times (0, 1)) \cap C(\mathbf{R}^d \times [0, 1))$ такой, что для некоторого $R > 0$ имеем $\eta(x, s) = 0$ для всех $s \in (0, 1)$ при $|x| > R$, выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} \eta(x, t) d\mu_t - \int_{\mathbf{R}^d} \eta(x, 0) d\nu \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbf{R}^d} [\partial_t \eta(x, \tau) + a^{ij}(x, \tau) \partial_{x_i} \partial_{x_j} \eta(x, \tau) \\ & \quad + b^i(x, \tau) \partial_{x_i} \eta(x, \tau)] d\mu_\tau d\tau \end{aligned} \quad (3.1)$$

для почти всех $t \in (0, 1)$.

Доказательство. Для всякой функции $\varphi \in C^\infty_0(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ выполняется следующее равенство:

$$\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} [\varrho \partial_t \varphi + a^{ij} \varrho \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi + b^i \varrho \partial_{x_i} \varphi] dx dt = 0. \quad (3.2)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \omega_r(s) &:= r^{-1} \omega(sr^{-1}), \quad \text{где } 0 \leq \omega \leq 1, \quad \omega \in C^1_0(\mathbf{R}^1), \\ \text{supp } \omega &\subset \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right], \quad \int_0^1 \omega(s) ds = 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

и

$$\varrho_r(x, t) := \int_0^1 \omega_r(t-s) \varrho(x, s) ds, \quad t > r, \quad (3.4)$$

где ϱ — плотность μ относительно меры Лебега. Тогда функция ϱ_r является непрерывно дифференцируемой по t . Согласно (3.2), функция ϱ_r удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} [-\varphi \partial_t \varrho_r + (a^{ij} \varrho) * \omega_r \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi + (b^i \varrho) * \omega_r \partial_{x_i} \varphi] dx dt = 0 \quad (3.5)$$

для всякой функции $\varphi \in C^\infty_0(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ такой, что $\varphi = 0$, если $t \in (0, r]$. Следовательно, равенство (3.5) имеет место для функций $\varphi \in \mathbb{H}^{2,1}(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ таких, что для некоторого $R > 0$ при $|x| > R$ имеем $\varphi(x, s) = 0$ для всех s . Заметим, что свертка $(b\varrho) * \omega_r$ определена, так как по теореме Фубини $b(x, \cdot) \varrho(x, \cdot) \in L^1[\delta, 1 - \delta]$ для почти всех x и всех

$\delta > 0$. Пусть $r < s < t < 1$. Подставим в равенство (3.5) функцию $\varphi = I_{[s,t]}\eta$, где $I_{[s,t]}$ — индикатор отрезка $[s, t]$, и применим формулу Ньютона–Лейбница. Получаем равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} \eta(t, x) \varrho_r(t, x) dx - \int_{\mathbf{R}^d} \eta(s, x) \varrho_r(s, x) dx \\ &= \int_s^t \int_{\mathbf{R}^d} [\varrho_r \partial_t \eta + (a^{ij} \varrho) * \omega_r \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi + (b^i \varrho) * \omega_r \partial_{x_i} \varphi] dx dt. \end{aligned}$$

Устремляя r и s к нулю, получаем искомое равенство. Лемма доказана.

Заменим условие (C1) на следующее более сильное условие (P1):

$$|a^{ij}(x, t) - a^{ij}(y, s)| \leq \lambda(|t - s|^{1/2} + |x - y|)$$

для всех $t, s \in [0, 1]$ и $x, y \in \mathbf{R}^d$.

Положим

$$Z_{x,t}(y, s) = (2\pi s)^{-d/2} (\det A(x, t))^{-1/2} \exp \left[-\frac{(A(x, t)^{-1}y, y)}{2s} \right],$$

где A^{-1} — обратная матрица к $A = (a^{ij})$. Ясно, что

$$\int_{\mathbf{R}^d} Z_{x,t}(y, s) dy = 1.$$

Для функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ положим

$$Q(y, s) = \int_{\mathbf{R}^d} Z_{x,t}(y - z, \tau - s) \varphi(z) dz.$$

Заметим, что $\partial_s Q(y, s) + a^{ij}(x, t) \partial_{y_i} \partial_{y_j} Q(y, s) = 0$ и $Q(y, \tau) = \varphi(y)$.

Лемма 3.2. Пусть $\varphi \geq 0$, $\varphi = 0$ вне шара $|y - y_0| < R$ и

$$M_1 = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} |\nabla \varphi(x)| \varphi(x)^{1-p}, \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} |\nabla^2 \varphi(x)| \varphi(x)^{1-p}$$

для некоторого $p > 1$. Тогда

$$|\nabla Q(y, s)| \leq M_1 Q(y, s)^{(p-1)/p}, \quad |\nabla^2 Q(y, s)| \leq M_2 Q(y, s)^{(p-1)/p},$$

$$|y - y_0| |\nabla^2 Q(y, s)| \leq (R + N\sqrt{\tau - s}) M_2 Q(y, s)^{(p-1)/p},$$

где число N зависит только от p, m, M, d .

Доказательство. Применяя неравенство Гёльдера с весом $Z_{x,t}$, получаем

$$\begin{aligned} |\nabla Q(y, s)| &\leq \int_{\mathbf{R}^d} Z_{x,t}(y - z, \tau - s) |\nabla \varphi(z)| dz \\ &\leq M_1 \int_{\mathbf{R}^d} Z_{x,t}(y - z, \tau - s) |\varphi(z)|^{p-1} dz \leq M_1 Q(y, s)^{(p-1)/p}. \end{aligned}$$

Второе неравенство доказывается аналогично. Перейдем к третьей оценке:

$$\begin{aligned} |y - y_0| |\nabla^2 Q(y, s)| &\leq \int_{|z - y_0| < R} |y - y_0| Z_{x,t}(y - z, \tau - s) |\nabla^2 \varphi(z)| dz \\ &\leq \int_{|z - y_0| < R} |z - y_0| Z_{x,t}(y - z, \tau - s) |\nabla^2 \varphi(z)| dz \\ &\quad + \int_{|z - y_0| < R} |y - z| Z_{x,t}(y - z, \tau - s) |\nabla^2 \varphi(z)| dz. \end{aligned}$$

Первое слагаемое оценивается через $RM_2Q(y, s)^{(p-1)/p}$, а второе слагаемое оценивается выражением

$$M_2 \sqrt{\tau - s} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |z|^p Z_{x,t}(z, 1) dy \right)^{1/p} Q(y, s)^{(p-1)/p},$$

что завершает доказательство.

Следующая лемма играет ключевую роль в этом пункте.

Лемма 3.3. *Предположим, что мера μ , заданная семейством вероятностных мер $(\mu_t)_{0 < t < 1}$, является решением задачи Коши (1.2) и для коэффициентов a^{ij} выполняются условия (P1) и (C2). Пусть также для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ имеет место включение $b \in L^p(\mu, U \times (0, 1))$, где $p > d + 2$. Тогда для всяких $\theta \in (0, 1)$ и $\kappa > 1$ найдется такое число $C > 0$, что*

$$\begin{aligned} \mu(U(x, \sqrt{t}) \times [\theta t, \theta^{-1}t]) \\ \leq C \left[\sigma(U(x, \kappa\sqrt{t}) \times [\theta^{-1}t, \theta^{-1}t]) + t^{p/2} (1 + \|b\|_{L^p(\mu, U(x, 2) \times (0, 1))})^p \right] \end{aligned}$$

для всех $t \in (0, \theta)$ и $x \in \mathbf{R}^d$, где мера σ задана плотностью

$$\int_{|y-z| < 2} Z_{x,t}(z - y, s) \nu(dz)$$

относительно меры Лебега на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$.

Доказательство. Зафиксируем x и t . Пусть неотрицательная функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ такова, что $\varphi(y) = 1$ при $|y - x| \leq \sqrt{t}$ и $\varphi = 0$ при $|y - x| \geq \kappa\sqrt{t}$, причем существует такая константа K , что

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^d} |\nabla \varphi(x)| \varphi(x)^{1-p} \leq K t^{-1/2}, \quad \sup_{x \in \mathbf{R}^d} |\nabla^2 \varphi(x)| \varphi(x)^{1-p} \leq K t^{-1}.$$

Для заданной функции φ и $\theta t < T < \theta^{-1}t$ определим, как и выше, функцию Q формулой

$$Q(y, s) = \int_{\mathbf{R}^d} Z_{x,t}(y - z, T - s) \varphi(z) dz.$$

Пусть $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ — неотрицательная функция, причем $\zeta(y) = 1$ при $|x - y| < 1$ и $\zeta(y) = 0$ при $|x - y| > 2$. Более того, найдется константа K_1 такая, что

$$|\zeta(y)| \leq K_1, \quad |\nabla \zeta(y)| \zeta(y)^{1-1/p} \leq K_1, \quad |\nabla^2 \zeta(y)| \zeta(y)^{1-1/p} \leq K_1.$$

Подставляя в равенство (3.1) функцию $\eta(y, s) = Q(y, s)\zeta(y)$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} Q(y, s)\zeta(y) d\mu_s - \int_{\mathbf{R}^d} Q(y, 0)\zeta(y) d\nu \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^s \int_{\mathbf{R}^d} \left[(a^{ij}(y, \tau) - a^{ij}(x, t)) \partial_{y_i} \partial_{y_j} Q(y, \tau) \zeta(y) \right. \\ & \quad + a^{ij}(y, \tau) \partial_{y_i} Q(y, \tau) \partial_{y_j} \zeta(y) + a^{ij} \partial_{y_i} \partial_{y_j} \zeta(y) Q(y, \tau) \\ & \quad \left. + b^i(y, \tau) \partial_{y_i} Q(y, \tau) \zeta(y) + b^i(y, \tau) \partial_{y_i} \zeta(y) Q(y, \tau) \right] d\mu_\tau d\tau. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Согласно условию (P1), имеем $|a^{ij}(y, \tau) - a^{ij}(x, t)| \leq \lambda(|\tau - t|^{1/2} + |x - y|)$. Пусть $s \in [\theta t, T]$. Применяя лемму 3.2, оцениваем правую часть (3.6) следующим выражением:

$$C_1 t^{-1/2} (1 + \|b\|_{L^p(\mu, U(x, 2) \times (0, 1))}) \left(\int_0^s \int_{\mathbf{R}^d} Q(y, \tau) \zeta(y) d\mu_\tau d\tau \right)^{(p-1)/p},$$

где число C_1 зависит только от θ, m, M, K, K_1, d . Положим

$$h(s) = \int_0^s \int_{\mathbf{R}^d} Q(y, \tau) \zeta(y) d\mu_\tau, \quad D_0 = \int_{\mathbf{R}^d} Q(y, 0) \zeta(y) d\nu,$$

$$D_1 = C_1 t^{-1/2} (1 + \|b\|_{L^p(\mu, U(x, 2) \times (0, 1))}).$$

Тогда

$$h'(s) \leq D_0 + D_1 h(s)^{1-1/p}, \quad h(0) = 0.$$

Последнее неравенство влечет оценку $h(s) \leq C(p)D_0 + C(p)D_1^p s^{p-1}$. Напомним, что $Q(y, T) = \varphi(y)$. Получаем неравенство

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(y) \zeta(y) d\mu_T \leq C(p) \int_{\mathbf{R}^d} Q(y, 0) \zeta(y) d\nu + C(p)D_1^p T^{p-1}.$$

Так как $\zeta(y)\varphi(y) = 1$ при $|y - x| \leq \sqrt{t}$, то имеем

$$\begin{aligned} & \mu(U(x, \sqrt{t}) \times [\theta t, \theta^{-1}t]) \leq \int_{\theta t}^{t/\theta} \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(y) d\mu_T dT \\ & \leq C_2 \left(\int_{\theta t}^{t/\theta} \int_{\mathbf{R}^d} Q(y, 0) \zeta(y) d\nu dT + t^{p/2} (1 + \|b\|_{L^p(\mu, U(x, 2) \times (0, 1))})^p \right). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства применим теорему Фубини и воспользуемся тем, что $\zeta(y)\varphi(y) = 0$ при $|y - x| \geq \kappa\sqrt{t}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} Q(y, 0)\zeta(y) d\nu &= \int_{\mathbf{R}^d} \zeta(y) \int_{\mathbf{R}^d} Z_{x,t}(y - z, T)\varphi(z) dz \nu(dy) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} Z_{x,t}(y - z, T)\zeta(y) \nu(dy)\varphi(z) dz \\ &\leq \int_{U(x, \kappa\sqrt{t})} \int_{|x-y|<2} Z_{x,t}(y - z, T)\nu(dy) dz. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Объединяя лемму 3.3 и теорему 2.1, приходим к следующему результату.

Теорема 3.1. *Предположим, что мера μ , заданная семейством вероятностных мер $(\mu_t)_{0<t<1}$, является решением задачи Коши (1.2) и коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условиям (P1) и (C2). Предположим также, что $b \in L^p(\mu, U \times (0, 1))$ для некоторого $p > d+2$ и всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$. Тогда мера μ имеет плотность ϱ относительно меры Лебега и для любых $0 < \theta < 1$ и $\kappa > 1$ существует число $C = C(\theta, \kappa) > 0$ такое, что*

$$\begin{aligned} \varrho(x, t) &\leq C \left(t^{(p-d-2)/2} (1 + \|b\|_{L^p(\mu, U(x, 2) \times (0, 1))})^p \right. \\ &\quad \left. + t^{-(d+2)/2} \sigma(U(x, \kappa\sqrt{t}) \times [\theta t, \theta^{-1}t]) \right) \end{aligned}$$

для всех $t \in (0, \theta)$ и $x \in \mathbf{R}^d$, где мера σ задана плотностью

$$\int_{|x-z|<2} Z_{x,t}(z - y, s) \nu(dz)$$

относительно меры Лебега на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$.

З а м е ч а н и е 3.1. Мера σ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \partial_s \sigma - a^{ij}(x, t) \partial_{y_i} \partial_{y_j} \sigma = 0, \\ \sigma|_{s=0} = \tilde{\nu}, \end{cases}$$

где $\tilde{\nu} = I_{\{|x-y|<2\}}\nu$ и $I_{\{|x-y|<2\}}$ — индикатор шара $U(x, 2)$. Таким образом, из теоремы 3.1 следует, что в случае, когда для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ имеем $b \in L^p(\mu, U \times (0, 1))$ с $p > d+2$, при установлении верхних оценок надо исследовать решение задачи Коши с более простым уравнением без коэффициента b .

З а м е ч а н и е 3.2. Предположим, что мера μ удовлетворяет задаче Коши (1.2) с оператором L вида

$$Lu(x, t) = \partial_t u(x, t) + a^{ij}(x, t) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x, t) + b^i(x, t) \partial_{x_i} u(x, t) + c(x, t)u(x, t).$$

Пусть коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условиям (P1), (C2) и для всякого шара U из $\mathbf{R}^d$ имеем $b, c \in L^p(\mu, U \times (0, 1))$ для некоторого $p > d + 2$. Тогда утверждение теоремы остается в силе со следующей оценкой плотности:

$$\varrho(x, t) \leq C \left(t^{(p-d-2)/2} (1 + \|b\|_{L^p(\mu, U(x, 2) \times (0, 1))} + \|c\|_{L^p(\mu, U(x, 2) \times (0, 1))})^p + t^{-(d+2)/2} \sigma(U(x, \kappa\sqrt{t}) \times [\theta t, \theta^{-1}t]) \right)$$

для всех $t \in (0, \theta)$ и $x \in \mathbf{R}^d$.

Приведем пример непосредственного применения теоремы 3.1.

П р и м е р 3.1. Пусть матрица A удовлетворяет условиям (P1), (C2) и имеет место включение $b \in L^p(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$. Предположим, что начальное распределение ν является дираковской мерой в нуле. Тогда плотность меры σ совпадает с функцией

$$(2\pi s)^{-d/2} (\det A)^{-1/2} \exp \left(-\frac{A^{-1}y, y}{2s} \right).$$

Пусть $0 < \theta < 1$ и $1 < \kappa < 2$. Имеем

$$\sigma \left(U(x, \kappa\sqrt{t}) \times \left[\theta t, \frac{t}{\theta} \right] \right) \leq C_1 \int_{\theta t}^{t/\theta} \int_{|x-y| \leq \kappa\sqrt{t}} (2\pi s)^{-d/2} \exp \left(-\frac{|y|^2}{2Ms} \right) dy ds.$$

Заметим, что из $|x - y| \leq \kappa\sqrt{t}$ следует $|y|^2 \geq 2^{-1}|x|^2 - 2\kappa^2 t$. Поэтому

$$\int_{\theta t}^{t/\theta} \int_{|x-y| \leq \kappa\sqrt{t}} (2\pi s)^{-d/2} \exp \left(-\frac{|y|^2}{2Ms} \right) dy ds \leq C_2 t \exp \left(-\frac{\theta|x|^2}{2Mt} \right),$$

где C_2 зависит только от d, κ, m, M, θ . Тогда плотность ϱ оценивается так:

$$\varrho(x, t) \leq C t^{(p-d-2)/2} (1 + \|b\|_{L^p(\mu)})^p + C t^{-d/2} \exp \left(-\frac{K|x|^2}{2t} \right)$$

для всех $t \in (0, \theta)$ и $x \in \mathbf{R}^d$, причем $K = \theta M^{-1}$.

Если, более того, найдется функция $\Phi \in C^2(\mathbf{R}^d)$, для которой выполняются условия

$$|A\nabla\Phi|^p \Phi^{1-p}, |L\Phi|^p \Phi^{1-p} \in L^1(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1)), \sup_{t \in (0, 1)} \int_{\mathbf{R}^d} \Phi(x) \varrho(x, t) dx < \infty,$$

то найдется такая константа $C > 0$, что

$$\varrho(x, t) \leq C \Phi(x)^{-1} \left(t^{(p-d-2)/2} + t^{-d/2} \exp \left(-\frac{K|x|^2}{2t} \right) \right).$$

Следствие 3.1. Пусть коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условиям (P1) и (C2). Предположим, что мера μ , заданная семейством вероятностных мер $(\mu_t)_{0 < t < 1}$, является решением задачи Коши (1.2) с начальным условием $\nu(dy) = \varrho_0(y) dy$, причем $\varrho_0 \in L^\infty(U)$ для всякого шара U . Пусть также для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ мы имеем $b \in L^p(\mu, U \times (0, 1))$, где $p > d + 2$. Тогда мера μ имеет плотность ϱ относительно меры Лебега и для всякого шара U и числа $0 < \tau < 1$ справедливо включение $\varrho \in L^\infty(U \times [0, \tau])$.

Доказательство. Утверждение немедленно следует из теоремы 3.1, если заметить, что

$$\int_{U(x,2)} Z_{x,t}(y-z,s) \nu(dz) \leq \|\varrho_0\|_{L^\infty(U(x,2))}.$$

Таким образом, плотность меры σ ограничена, следовательно, верна оценка

$$\sigma(U(x, \kappa\sqrt{t}) \times [\theta t, \theta^{-1}t]) \leq C(\theta, \kappa, d) \|\varrho_0\|_{L^\infty(U(x,2))} t^{(d+2)/2},$$

которая влечет утверждение следствия.

Следствие 3.2. Пусть коэффициенты a^{ij} удовлетворяют условиям (P1) и (C2). Предположим, что мера μ , заданная семейством вероятностных мер $(\mu_t)_{0 < t < 1}$, является решением задачи Коши (1.2) с начальным условием $\nu(dy) = \varrho_0(y) dy$, причем $\varrho_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$. Пусть также $b \in L^p(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$ для некоторого $p > d + 2$. Тогда мера μ имеет плотность ϱ относительно меры Лебега и для всякого $0 < \tau < 1$ имеем $\varrho \in L^\infty(\mathbf{R}^d \times [0, \tau])$, причем

$$\|\varrho\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d \times [0, \tau])} \leq C \|\varrho_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} + C t^{(p-d-2)/2} (1 + \|b\|_{L^p(\mu)})^p.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\int_{\mathbf{R}^d} Z_{x,t}(y-z,s) \nu(dz) \leq \|\varrho_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}.$$

Таким образом, плотность меры σ ограничена, следовательно, верна оценка

$$\sigma(U(x, \kappa\sqrt{t}) \times [\theta t, \theta^{-1}t]) \leq C(\theta, \kappa, d) \|\varrho_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} t^{(d+2)/2}.$$

По теореме 3.1 для всех $t \in (0, \theta)$ и $x \in \mathbf{R}^d$ имеем

$$\varrho(x, t) \leq C \|\varrho_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} + C t^{(p-d-2)/2} (1 + \|b\|_{L^p(\mu)})^p.$$

Следствие 3.3. Пусть a^{ij} удовлетворяют условиям (P1) и (C2). Предположим, что вероятностная мера μ , заданная плотностью ϱ

относительно меры Лебега, является решением задачи Коши (1.2) с начальным условием $\nu(dx) = \varrho_0(y) dx$. Пусть для некоторого $p > d + 2$ имеем $b \in L^p(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$ и задана функция $\Phi \in C^2(\mathbf{R}^d)$ со следующими свойствами: $\Phi(x) \geq C_0 > 0$, $\Phi \varrho_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^d) \cap L^1(\mathbf{R}^d)$ и

$$|A \nabla \Phi|^p \Phi^{1-p}, |L \Phi|^p \Phi^{1-p} \in L^1(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1)), \sup_{t \in (0, 1)} \int_{\mathbf{R}^d} \Phi(x) \varrho(x, t) dx < \infty.$$

Тогда для всякого $0 < \tau < 1$ найдется такое число $C = C(\tau) > 0$, что

$$\varrho(x, t) \leq C \Phi(x)^{-1}, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^d \times [0, \tau].$$

Доказательство. Рассмотрим новую меру $\chi = \Phi \mu$, которая удовлетворяет задаче Коши с начальным условием $\Phi \nu$ и оператором $\tilde{L}$ вида

$$\tilde{L}u = \partial_t u + a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + (b^i + \Phi^{-1} a^{ij} \partial_{x_j} \Phi) \partial_{x_i} u + (\Phi^{-1} L \Phi) u.$$

Остается применить замечание 3.1 и повторить рассуждения из доказательства предыдущего следствия.

Во всех основных результатах этого и предыдущего пунктов предполагалась интегрируемость некоторой функции относительно решения μ . Используя функцию Ляпунова, можно переформулировать это требование в виде условий на коэффициенты уравнения. Следующий результат доказан в [3].

Лемма 3.4. Если мера μ на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$, заданная семейством вероятностных мер $(\mu_t)_{0 \leq t < 1}$, удовлетворяет задаче Коши (1.2) с начальным распределением ν и существует такая неотрицательная функция $\Psi \in C^2(\mathbf{R}^d)$, что для некоторой константы N имеем

$$\Psi \in L^1(\nu), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \Psi(x) = +\infty, \quad L\Psi \leq N + N\Psi,$$

то найдется такое число $C > 0$, что выполняется следующая оценка:

$$\sup_{t \in [0, 1]} \int_{\mathbf{R}^d} \Psi(x) d\mu_t \leq C + C \int_{\mathbf{R}^d} \Psi(x) d\nu.$$

Пример 3.2. Пусть $A = (a^{ij})$ удовлетворяет условиям (P1), (C2) и $\Psi(x) = \exp(c|x|^k)$, где $k \geq 2$. Для выполнения условий леммы достаточно иметь оценку $(b(x, t), x) \leq c_1 - c_2|x|^k$, $c_2 > ckM$. Действительно,

$$\begin{aligned} L\Psi(x) &= ck(\operatorname{tr} A + (k-2)(Ax, x)|x|^{-2} + ck|x|^k(Ax, x) + (b, x))|x|^{k-2}\Psi(x) \\ &\leq C + C\Psi(x). \end{aligned}$$

Предположим, что $|b(x, t)| \leq c_3 \exp(c_4 |x|^k)$, $c_2 > 2kpc_4$, $p > d + 2$. Тогда все условия предыдущего примера выполняются и мы получаем оценку

$$\varrho(x, t) \leq Ct^{-d/2} \exp \left\{ -c|x|^k - \frac{K|x|^2}{2t} \right\} + Ct^{(p-d-2)/2} \exp\{-c|x|^k\},$$

где $K = \theta M^{-1}$.

Данная оценка точно описывает поведение решения. Действительно, рассмотрим задачу Коши (1.2) с оператором $L = \Delta + (b(x, t), \nabla)$, где $b(x, t) = -2x/(2-t)$, и начальным условием ν — дираковской меры в нуле. Тогда функция

$$\varrho(x, t) = C(t(2-t))^{-d/2} \exp \left(-\frac{|x|^2}{2t} - \frac{|x|^2}{2-t} \right)$$

задает решение $\mu = \varrho(x, t) dx dt$ задачи Коши.

Наконец, приведем еще один результат, уточняющий поведение решения при $t \rightarrow 0$.

Теорема 3.2. *Предположим, что вероятностная мера μ , заданная плотностью ϱ относительно меры Лебега, является решением задачи Коши (1.2) с начальным условием $\nu(dx) = \varrho_0(y) dx$, где плотность ϱ_0 локально ограничена. Пусть a^{ij} удовлетворяют условиям (P1), (C2) и для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ имеем $b \in L^p(\mu, U \times (0, 1))$, где $p > d + 2$. Тогда для всякого шара U имеем*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_U |\varrho(x, t) - \varrho_0(x)|^2 dx = 0.$$

Доказательство. Всюду ниже мы работаем с непрерывной в $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ версией плотности ϱ . Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \omega(x\varepsilon^{-1})$, где $\omega \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$, $\omega \geq 0$ и $\omega(x) = 0$ при $|x| > 1$, причем

$$\int_{\mathbf{R}^d} \omega dx = 1.$$

Функция $\varrho_\varepsilon = \varrho * \omega_\varepsilon$ является гладкой по переменной x и удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \varrho_\varepsilon = (a^{ij} \varrho) * \partial_{x_i} \partial_{x_j} \omega_\varepsilon + (b^i \varrho) * \partial_{x_i} \omega_\varepsilon. \quad (3.7)$$

Так как a^{ij} ограничены и $\varrho, b^i \varrho \in L^1(U \times (0, 1))$ для всякого шара U , то функция ϱ_ε абсолютно непрерывна. Кроме того, для всех x при $t \rightarrow 0$ имеем

$$\varrho_\varepsilon(x, t) = \int_{\mathbf{R}^d} \omega_\varepsilon(x - y) \varrho(y, t) dy \rightarrow \int_{\mathbf{R}^d} \omega_\varepsilon(x - y) \varrho_0(y) dy = \varrho_{0, \varepsilon}(x).$$

Перепишем уравнение (3.7) в виде

$$\partial_t \varrho_\varepsilon(x, t) = \partial_{x_i} (a^{ij}(x, t) \partial_{x_j} \varrho_\varepsilon(x, t)) + \partial_{x_i} ((a^{ij} - a^{ij}(x, t)) \varrho) * \partial_{x_j} \omega_\varepsilon + (b^i \varrho) * \partial_{x_i} \omega_\varepsilon. \quad (3.8)$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$. Умножая равенство (3.8) на $\psi^2 \varrho_\varepsilon$ и интегрируя по частям, получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} \psi^2(x) \varrho_\varepsilon^2(x, t) dx - \int_{\mathbf{R}^d} \psi^2(x) \varrho_\varepsilon^2(x, 0) dx + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} (A \nabla \varrho_\varepsilon, \nabla \varrho_\varepsilon) \psi^2 dx d\tau \\ = I + J + K, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} I(t, \varepsilon) &= 2 \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \varrho_\varepsilon \psi a^{ij} \partial_{x_i} \psi \partial_{x_j} \varrho_\varepsilon dx d\tau, \\ J(t, \varepsilon) &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} [-((a^{ij} - a^{ij}(x, \tau)) \varrho) * \partial_{x_j} \omega_\varepsilon \partial_{x_i} \varrho_\varepsilon \psi^2 \\ &\quad - 2((a^{ij} - a^{ij}(x, \tau)) \varrho) * \partial_{x_j} \omega_\varepsilon \partial_{x_i} \psi \varrho_\varepsilon] dx d\tau, \\ K(t, \varepsilon) &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} [(b^i \varrho) * \omega_\varepsilon \partial_{x_i} \varrho_\varepsilon \psi^2 + \psi (b^i \varrho) * \omega_\varepsilon \partial_{x_i} \psi \varrho_\varepsilon] dx d\tau. \end{aligned}$$

Наша первая задача состоит в доказательстве того, что $|\nabla \varrho| \psi \in L^2(\mathbf{R}^d \times [0, \tau])$ для всякого $0 < \tau < 1$. Пусть носитель функции ψ содержится в шаре $U(0, R)$. Согласно следствию 3.1, существует такое число $\Lambda > 0$, что $\varrho(x, t) \leq \Lambda$, когда $t \in [0, \tau]$ и $x \in U(0, R + 2)$. Следовательно, $\varrho_\varepsilon(x, t) \leq \Lambda$ для всех $t \in [0, \tau]$ и $x \in U(0, R)$. Используя условия (P1) и (C2) и применяя неравенство Коши, получаем оценку

$$I(t, \varepsilon) \leq \delta \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho_\varepsilon|^2 \psi^2 dx d\tau + C(\delta, \lambda, M, \Lambda) |U(0, R)| \sup_{x \in U(0, R)} |\nabla \psi(x)|^2.$$

Оценим K . Так как $\|b \varrho\|_{L^2(U(0, R+2) \times [0, \tau])} \leq \sqrt{\Lambda} \|b\|_{L^2(\mu, U(0, R+2) \times (0, 1))}$, то

$$\int_0^t \int_{U(0, R)} |(b^i \varrho) * \omega_\varepsilon|^2 dx d\tau \leq \Lambda \|b\|_{L^2(\mu, U(0, R+2) \times (0, 1))}^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} K(t, \varepsilon) &\leq \delta \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho_\varepsilon|^2 \psi^2 dx d\tau \\ &\quad + C(\delta, M, \lambda, \Lambda) \|b\|_{L^2(\mu, U(0, R+2) \times (0, 1))}^2 \sup_{x \in U(0, R)} [|\psi(x)| + |\nabla \psi(x)|]^2. \end{aligned}$$

Оценим, наконец, J . Для этого заметим, что

$$|(a^{ij} - a^{ij}(x, \tau)) \varrho) * \partial_{x_j} \omega_\varepsilon| \leq \lambda \Lambda \int_{\mathbf{R}^d} |x| \omega(x) dx = \Lambda_1.$$

Действуя так же, как и выше, получаем

$$J(t, \varepsilon) \leq \delta \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varrho_\varepsilon|^2 \psi^2 dx d\tau + C(\delta, M, \lambda, \Lambda, \Lambda_1) \sup_{x \in U(0, R)} [|\psi(x)|^2 + |\nabla \psi(x)|].$$

Согласно условию (C2), имеем $(A\nabla \varrho, \nabla \varrho) \geq m|\nabla \varrho|^2$. Выбирая $\delta = m/4$, получаем требуемую оценку для $|\nabla \varrho_\varepsilon| \psi$. Остается устремить ε к нулю. Отметим, что ψ — произвольная гладкая функция с компактным носителем. Следовательно, $|\nabla \varrho| \in L^2(U \times [0, \tau])$ для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ и $0 < \tau < 1$. Зафиксируем $0 < \tau < 1$. Покажем, что в равенстве (3.9) можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого прежде всего отметим, что для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ мы имеем $\varrho, \nabla \varrho, a^{ij} \nabla \varrho, b^i \varrho \in L^2(U \times [0, \tau])$. Кроме того, $\varrho(\cdot, t) \in L^2(U)$ для всех $t \in [0, \tau]$. Напомним, что для всякой функции $f \in L^2(U)$ или $f \in L^2(U \times [0, \tau])$ выполняется соотношение $\|f - f_\varepsilon\|_{L^2} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где L^2 -норма берется на U' или на $U' \times [0, \tau]$, $U' \subset U$. Применяя последние замечания, можно перейти к пределу в I и K . Чтобы перейти к пределу в слагаемом J , надо заметить, что

$$((a^{ij} - a^{ij}(x, \tau))\varrho) * \partial_{x_j} \omega_\varepsilon = ((a^{ij} - a^{ij}(x, \tau))\partial_{y_i} \varrho) * \omega_\varepsilon + (\varrho \partial_{y_i} a^{ij}) * \omega_\varepsilon.$$

Устремляя в (3.9) ε к нулю, получаем равенство

$$\int_{\mathbf{R}^d} \psi^2(x) \varrho^2(x, t) dx - \int_{\mathbf{R}^d} \psi^2(x) \varrho_0^2(x) dx + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} (A\nabla \varrho, \nabla \varrho) \psi^2 dx d\tau = \widehat{I} + \widehat{K},$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{I}(t) &= 2 \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} [\varrho \psi a^{ij} \partial_{x_i} \psi \partial_{x_j} \varrho - \varrho^2 \psi \partial_{x_i} a^{ij} \partial_{x_j} \psi] dx d\tau, \\ \widehat{K}(t) &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} [(b^i \varrho) \partial_{x_i} \varrho \psi^2 + \psi (b^i \varrho) \partial_{x_i} \psi \varrho] dx d\tau. \end{aligned}$$

Итак,

$$\int_{\mathbf{R}^d} \psi^2(x) \varrho^2(x, t) dx - \int_{\mathbf{R}^d} \psi^2(x) \varrho_0^2(x) dx = C(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} C(t) = 0.$$

Таким образом, $\|\psi \varrho(\cdot, t)\|_{L^2} \rightarrow \|\psi \varrho_0\|_{L^2}$ и $\psi \varrho(\cdot, t) \rightarrow \psi \varrho_0$ слабо в L^2 , что дает требуемое утверждение.

З а м е ч а н и е 3.3. Так как в условиях теоремы плотность ϱ ограничена на $U \times [0, \tau]$ для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ и $0 < \tau < 1$, то локально имеет место сходимости к начальному условию во всех L^p , т.е. для всякого шара U имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_U |\varrho(x, t) - \varrho_0(x)|^p dx = 0.$$

4. Нижние оценки. В данном пункте мы рассматриваем уравнение (1.1) с оператором $\mathcal{L}$ в дивергентной форме. Начнем с априорных оценок. Прежде всего заметим, что так как ψ — возрастающая функция, то для всяких $\alpha \geq e^{\psi(0)}$, $\beta \geq 0$ выполняется неравенство

$$\alpha \beta \leq \alpha \psi^{-1}(\ln \alpha) + \beta e^{\psi(\beta)}. \quad (4.1)$$

Согласно условиям (Н1) и (Н3), $f'(y) \rightarrow \infty$, следовательно, существует такое число $y_0 > \max\{z_0, 1\}$, что $f'(y) \geq 1$ и $(f'(y))^{-1/2} e^{f(y)} \geq e^{\psi(0)}$ при $y > y_0$. Кроме того, положим $\omega_0 = e^{-f(\ln y_0)}$. Тогда $0 < \omega_0 < 1$. При $s \in (0, \omega_0)$ и $q \geq 0$ положим

$$h_q(s) = -\frac{1}{s f'(f^{-1}(|\ln s|))} e^{2q f^{-1}(|\ln s|)}.$$

Тогда $h_q(s) = H'_q(s)$, где

$$H_q(s) = \begin{cases} (2q)^{-1} e^{2q f^{-1}(|\ln s|)} & \text{при } q > 0, \\ f^{-1}(|\ln s|) & \text{при } q = 0. \end{cases}$$

Лемма 4.1. Если выполнены условия (Н1), (Н2) и (Н3), $y > y_0$ и $s \in (0, \omega_0)$, то

(i) выполняется неравенство

$$\frac{\gamma}{s^2 |f'(f^{-1}(|\ln s|))|^2} e^{2q f^{-1}(|\ln s|)} \leq h'_q(s) \leq \frac{2 + 2q - \gamma}{s^2 f'(f^{-1}(|\ln s|))} e^{2q f^{-1}(|\ln s|)},$$

(ii) имеет место оценка

$$\frac{h_q^2(s)}{h'_q(s)} \leq \gamma^{-1} \exp(2q f^{-1}(|\ln s|)).$$

Доказательство. Находим

$$\frac{d}{ds} h_q(s) = \frac{f'(f^{-1}(|\ln s|)) - f''(f^{-1}(|\ln s|))/f'(f^{-1}(|\ln s|)) + 2q}{s^2 [f'(f^{-1}(|\ln s|))]^2} e^{2q f^{-1}(|\ln s|)}.$$

По условию (Н2) имеем $f'(y) - f''(y)/f'(y) \geq \gamma f'(y) \geq \gamma$, что дает левую часть неравенства (i). Опять же по условию (Н2) находим $f''(y)/f'(y) \leq (1 - \gamma)f'(y)$, что вместе с неравенством $f' \geq 1$ дает правую часть неравенства (i). Оценка (ii) немедленно следует из (i). Лемма доказана.

Согласно (С3), $|b| \in L^p(\mu, \mathbf{R}^d \times (0, 1))$, где $p > d + 2$. Как показано в следствии 2.1, решение μ задается непрерывной плотностью ϱ относительно меры Лебега; кроме того, $\varrho \in \mathbb{H}_{\text{loc}}^{p,1}(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$. Зафиксируем отрезок $[T_0, T_1] \subset (0, 1)$.

По доказанному ранее плотность ϱ ограничена в полосе $\mathbf{R}^d \times [T_0, T_1]$, т.е. $\|\varrho\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d \times [T_0, T_1])} < \infty$. Пусть $\Lambda = \min\{\omega_0(2\|\varrho\|_{L^\infty})^{-1}, 1\}$. Положим $\varrho_k = \Lambda\varrho + 1/k$, $\xi_k = f^{-1}(|\ln \varrho_k|)$. Тогда $\varrho_k < \omega_0$ для всякого натурального числа $k > 1/(2\omega_0)$. Поэтому при подстановке ϱ_k вместо s в h_q выполняются все утверждения леммы 4.1.

Пусть $Q \subset \mathbf{R}^d$ — куб с ребром длины 2.

Лемма 4.2. Пусть $\mu = \varrho dx dt$ — решение уравнения (1.1), коэффициенты a^{ij} , b^i удовлетворяют условиям (C1), (C2) и (C3) и выполнены все условия (H1), (H2) и (H3). Пусть $s > 1$ и $s' = s/(s-1)$, причем $2s' \leq p$. Пусть задана функция $\eta \in C_0^1(Q \times (T_0, T_1))$ и $T_0 < \tau_1 < \tau_2 < T_1$. Тогда выполняются следующие неравенства.

Если $q = 0$ и $\eta(t, x) = \eta_0(x)$ при $t \in [\tau_1, \tau_2]$, то

$$\begin{aligned} & \int_Q [\xi_k(x, \tau_2) \eta_0^2(x) - \xi_k(x, \tau_1) \eta_0^2(x)] dx + \frac{m\gamma}{3} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |\nabla \xi_k|^2 \eta_0^2 dx dt \\ & \leq N_1 \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |\nabla \eta|^2 dx dt + (2 - \gamma) \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q \eta^2 dx dt \right)^{1/s} \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Если $q > 0$, то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2q} \int_Q [e^{2q\xi_k(x, \tau_2)} \eta^2(x, \tau_2) - e^{2q\xi_k(x, \tau_1)} \eta^2(x, \tau_1)] dx \\ & + \frac{m\gamma}{3q^2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |\nabla e^{q\xi_k}|^2 \eta^2 dx dt \leq 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_\Omega |\eta| |\eta_t| e^{2q\xi_k} dx dt \\ & + N_1 \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |\nabla \eta|^2 e^{2q\xi_k} dx dt \right. \\ & \left. + (2 + 2q - \gamma) \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q e^{2sq\xi_k} \eta^2 dx dt \right)^{1/s} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь N_1 зависит только от следующих величин:

$$s, N, \omega_0, m, M, \gamma, d, \|\varrho\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d \times [T_0, T_1])}, \int_{T_0}^{T_1} \int_{\mathbf{R}^d} |b|^{2s'} \exp\{2s'\psi(|b|)\} \varrho dx dt.$$

Доказательство. Для всякой функции $\varphi \in \mathbb{H}_0^{2,1}(Q, (0, 1))$ выполняется следующее неравенство:

$$\int_0^1 \int_Q [-\partial_t \varphi \varrho + (A \nabla \varrho, \nabla \varphi)] dx dt = \int_0^1 \int_Q (b, \nabla \varphi) \varrho dx dt. \quad (4.4)$$

Пусть функции $\omega_r(s)$ и $\varrho_r(x, t)$ определены так же, как в (3.3), (3.4). Тогда ϱ_r непрерывно дифференцируема по t . Согласно (4.4), функция ϱ_r удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1 \int_Q \psi \partial_t \varrho_r + ((A \nabla \varrho) * \omega_r, \nabla \psi) dx dt = \int_0^1 \int_Q ((b \varrho) * \omega_r, \nabla \psi) dx dt \quad (4.5)$$

для всякой функции $\psi \in \mathbb{H}_0^{2,1}(Q, (0, 1))$ такой, что $\psi = 0$, если $t \in (0, r]$. Заметим, что свертка $(b \varrho) * \omega_r$ определена, так как по теореме Фубини $b(x, \cdot) \varrho(x, \cdot) \in L^1[\delta, 1 - \delta]$ для почти всех x и всех $\delta > 0$.

Зафиксируем $k > 0$ и выберем $\alpha_0 > 0$ так, что $[T_0, T_1] \subset [\alpha_0, 1 - \alpha_0]$ и $\eta(x, t) = 0$ при $t \notin [\alpha_0, 1 - \alpha_0]$. Далее мы предполагаем, что $r < \alpha_0$. Положим

$$\varrho_{r,k} := \Lambda \varrho_r + k^{-1}, \quad \psi := I_{[\tau_1, \tau_2]} h_q(\varrho_{r,k}) \eta^2,$$

где $I_{[\tau_1, \tau_2]}$ — индикатор отрезка $[\tau_1, \tau_2]$. Подставляя такое ψ в (4.5) и применяя формулу Ньютона–Лейбница, находим

$$\begin{aligned} & \int_Q [H_q(\varrho_{r,k}(x, \tau_2)) \eta^2(x, \tau_2) - H_q(\varrho_{r,k}(x, \tau_1)) \eta^2(x, \tau_1)] dx \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q ((A \nabla \varrho) * \omega_r, \nabla \varrho_{r,k}) h'_q(\varrho_{r,k}) \eta^2 dx dt \\ & = I(r, k) + J(r, k) + L(r, k) + N(r, k), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I(r, k) &= -2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q ((A \nabla \varrho) * \omega_r, \nabla \eta) h_q(\varrho_{r,k}) \eta dx dt, \\ L(r, k) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q ((b \varrho) * \omega_r, \nabla \varrho_{r,k}) h'_q(\varrho_{r,k}) \eta^2 dx dt, \\ J(r, k) &= 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q ((b \varrho) * \omega_r, \nabla \eta) h_q(\varrho_{r,k}) \eta dx dt, \\ N(r, k) &= 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q H_q(\varrho_{r,k}) \eta \partial_t \eta dx dt. \end{aligned}$$

На носителе η функция $|H(\varrho_{r,k})|$ равномерно ограничена относительно $r \leq \alpha_0$. Поэтому по теореме Лебега об ограниченной сходимости при $r \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_Q H_q(\varrho_{r,k}(x, \tau_i)) \eta^2(x, \tau_i) dx &\rightarrow \int_Q H_q(\varrho_k(x, \tau_i)) \eta^2(x, \tau_i) dx, \quad i = 1, 2, \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q H_q(\varrho_{r,k}) \eta \partial_t \eta dx dt &\rightarrow \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q H_q(\varrho_k) \eta \partial_t \eta dx dt. \end{aligned}$$

Заметим, что $|h'_q(\varrho_{r,k})| \leq C(k)$ для некоторого числа $C(k)$ и всех $r \in (0, 1)$. Функции $A \nabla \varrho$, $b \varrho$ и $\nabla \varrho_{r,k}$ принадлежат $L^2(Q \times [T_0, T_1])$ при $r < \alpha_0$. Следовательно, при $r \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned} \|(A \nabla \varrho) * \omega_r - A \nabla \varrho\|_{L^2(Q \times [T_0, T_1])} &\rightarrow 0, \quad \|(b \varrho) * \omega_r - b \varrho\|_{L^2(Q \times [T_0, T_1])} \rightarrow 0, \\ \|\nabla \varrho_{r,k} - \nabla \varrho_k\|_{L^2(Q \times [T_0, T_1])} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поэтому выражения $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q ((A \nabla \varrho) * \omega_r, \nabla \varrho_{r,k}) h'_q(\varrho_{r,k}) \eta^2 dx dt$ и $I(r, k)$, $J(r, k)$, $L(r, k)$ сходятся при $r \rightarrow 0$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \int_Q [H_q(\varrho_k(x, \tau_2)) \eta^2(x, \tau_2) - H_q(\varrho_k(x, \tau_1)) \eta^2(x, \tau_1)] dx \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q (A \nabla \varrho, \nabla \varrho) h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx dt = I(k) + J(k) + L(k) + N(k), \quad (4.6) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I(k) &= -2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q (A \nabla \varrho, \nabla \eta) h_q(\varrho_k) \eta \, dx \, dt, \\ L(k) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q (b \varrho, \nabla \varrho) h'_q(\varrho_k) \eta^2 \, dx \, dt, \\ J(k) &= 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q (b \varrho, \nabla \eta) h_q(\varrho_k) \eta \, dx \, dt, \\ N(k) &= 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q H_q(\varrho_k) \eta \eta_t \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (4.6) по отдельности. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$I(k) \leq \varepsilon \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |\nabla \varrho|^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 \, dx \, dt + \varepsilon^{-1} M^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |\nabla \eta|^2 \frac{h_q^2(\varrho_k)}{h'_q(\varrho_k)} \, dx \, dt.$$

Неравенство (ii) леммы 4.1 дает

$$I(k) \leq \varepsilon \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |\nabla \varrho|^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 \, dx \, dt + \varepsilon^{-1} \gamma^{-1} M^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q e^{2q\xi_k} |\nabla \eta|^2 \, dx.$$

Оценим $J(k)$. Имеем

$$J(k) \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |\nabla \eta|^2 \frac{h_q^2(\varrho_k)}{h'_q(\varrho_k)} \, dx \, dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |b|^2 \varrho^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 \, dx \, dt.$$

Первое слагаемое оценивается так же, как и выше. Рассмотрим второе слагаемое. Используя оценку (i) леммы 4.1 и неравенство Гёльдера с показателями s' и s , имеем

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |b|^2 \varrho^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 \, dx \, dt &\leq (2 + 2q - \gamma) \\ &\times \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |b|^{2s'} \varrho^{2s'} |f'(\xi_k)|^{-s'} e^{2s'f(\xi_k)} \eta^2 \, dx \, dt \right)^{1/s'} \\ &\times \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q e^{2qs\xi_k} \eta^2 \, dx \, dt \right)^{1/s}. \end{aligned}$$

Оценим каждый множитель по отдельности. Согласно неравенству (4.1) и условию (H3), имеем

$$\begin{aligned} \varrho |b| |f'(\xi_k)|^{-1/2} e^{f(\xi_k)} &\leq \varrho [|b| e^{\psi(|b|)} + |f'(\xi_k)|^{-1/2} e^{f(\xi_k)} \psi^{-1}(f(\xi_k))] \\ &\leq |b| e^{\psi(|b|)} \varrho + N/\Lambda. \end{aligned}$$

Используя неравенства $(x + y)^{2s'} \leq 2^{2s'}(x^{2s'} + y^{2s'})$ и $\eta^2 \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |b|^{2s'} \varrho^{2s'} |f'(\xi_k)|^{-s'} e^{2s' f(\xi_k)} \eta^2 dx dt \\ & \leq 4^{s'} \|\varrho\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d \times [T_0, T_1])}^{2s'-1} \int_{\mathbf{R}^d \times [T_0, T_1]} |b|^{2s'} e^{2s' \psi(|b|)} \varrho dx dt \\ & \quad + \left(\frac{2N}{\Lambda} \right)^{2s'} |Q|(T_1 - T_0). \end{aligned}$$

Следовательно, существует такое число $C_1 > 0$, зависящее только от указанных в условии леммы величин, что

$$J \leq C_1(2 + 2q - \gamma) \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |\nabla \eta|^2 e^{2q\xi_k} dx dt + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q e^{2sq\xi_k} \eta^2 dx dt \right)^{1/s} \right].$$

Рассмотрим L . Имеем

$$L(k) \leq \varepsilon \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |\nabla \varrho|^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx dt + 4\varepsilon^{-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |b|^2 \varrho^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx dt.$$

Оценивая второе слагаемое так же, как и выше, находим

$$\begin{aligned} L(k) & \leq \varepsilon \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |\nabla \varrho|^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx dt \\ & \quad + 4\varepsilon^{-1}(2 + 2q - \gamma)C_1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q e^{2sq\xi_k} \eta^2 dx dt \right)^{1/s}. \end{aligned}$$

Заметим, что по условию (C2) выполняется неравенство

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_\Omega (A \nabla \varrho, \nabla \varrho) h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx \geq m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_\Omega |\nabla \varrho|^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx.$$

Применяя неравенство (i) леммы 4.1, получаем

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q (A \nabla \varrho, \nabla \varrho) h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx dt \geq m\gamma \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q \frac{|\nabla \varrho|^2}{\varrho_k^2 |f'(\xi_k)|^2} e^{2q\xi_k} \eta^2 dx dt.$$

Суммируя полученные неравенства и полагая $\varepsilon := m\gamma/3$, находим

$$\begin{aligned} & \int_Q (H_q(\varrho_k) \eta^2)|_{\tau_1}^{\tau_2} dx + 3^{-1}m\gamma \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q \frac{|\nabla \varrho|^2}{\varrho_k^2 |f'(\xi_k)|^2} e^{2q\xi_k} \eta^2 dx dt \\ & \leq 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_\Omega H_q(\varrho_k) \eta \eta_t dx dt \\ & \quad + N_1(2 + 2q - \gamma) \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q |\nabla \eta|^2 e^{2q\xi_k} dx dt \right. \\ & \quad \left. + (2 + 2q - \gamma) \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_Q e^{2sq\xi_k} \eta^2 dx dt \right)^{1/s} \right]. \end{aligned}$$

В случае, когда $q = 0$ и $\eta(x, t) = \eta_0(x)$ для всех $t \in [\tau_1, \tau_2]$, имеем $\partial_t \eta = 0$ на $[\tau_1, \tau_2]$ и $N(k) = 0$. Лемма доказана.

Следующие леммы можно найти в [12], [20] или [21].

Пусть Ω — произвольная ограниченная область в $\mathbf{R}^d$ и $J \subset (0, 1)$ — произвольный интервал. Обозначим через $V^2(\Omega, J)$ пространство функций $u \in \mathbb{H}^{2,1}(\Omega, J)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V^2} = \|u\|_{\mathbb{H}^{2,1}(\Omega, J)} + \sup_{t \in J} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Лемма 4.3. Пусть $d > 2$. Предположим, что $v \in V^2(\Omega, J)$ и для почти всех $t \in J$ функция $x \mapsto v(x, t)$ имеет компактный носитель в Ω . Тогда

$$\|v\|_{L^{2(d+2)/d}(\Omega \times J)} \leq C \|v\|_{V^2(\Omega, J)},$$

где C зависит только от d и объема $|\Omega|$ области Ω .

Для всякого куба $Q(r) = Q(y, r) = \prod_{i=1}^d [y_i - r, y_i + r]$ определим функцию ψ_Q следующим образом:

$$\psi_Q(x) = \prod_{i=1}^d \chi_i(x_i), \quad x = (x_1, \dots, x_d), \quad (4.7)$$

где $\chi_i \in C^1([y_i - 2r, y_i + 2r])$, $\chi_i(x_i) = 1$, если $|x_i - y_i| \leq r$, и $\chi_i(x_i) = 0$, если $|x_i - y_i| \geq 2r$. Пусть также $0 \leq \psi_Q \leq 1$ и $|\nabla \psi_Q| \leq cr^{-1}$ для некоторого положительного числа c .

Лемма 4.4. Предположим, что $v \in V^2(Q(R) \times (T_0, T_1))$ и для всякой функции $\psi \in C_0^1(Q(R))$ функция

$$t \mapsto \int_{Q(R)} v(x, t) \psi^2(x) dx$$

является абсолютно непрерывной. Предположим, что существуют неотрицательная функция $g \in L^1(T_0, T_1)$ и константы $A_1, A_2 > 0$ такие, что для каждого куба $Q(r) \subset Q(R)$ и почти всех $t \in (T_0, T_1)$ выполняется неравенство

$$\frac{d}{dt} \int_{Q(2r)} v(x, t) \psi_Q^2(x) dx + A_1 \int_{Q(2r)} |\nabla v|^2 \psi_Q^2 dx dt \leq A_2 g(t) |Q(r)|^{1-2/d}.$$

Тогда для всех чисел $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ из отрезка $[T_0, T_1]$ существуют такие числа $\lambda > 0$ и $\sigma > 0$ зависящие только от $s_1, s_2, t_1, t_2, d, A_1, A_2$ и $\|g\|_{L^1(T_0, T_1)}$, что

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_{Q(R)} e^{-\lambda v} dx dt \int_{t_1}^{t_2} \int_{Q(R)} e^{\lambda v} dx dt \leq \sigma.$$

Зафиксируем куб $Q = Q(y, 1/2)$ и числа $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ такие, что $s_1, s_2, t_1, t_2 \in [T_0, T_1]$, где $[T_0, T_1] \subset (0, 1)$. Положим $K^- := Q \times [s_1, s_2]$ и $K^+ := Q \times [t_1, t_2]$.

Теорема 4.1. Пусть $\mu = \varrho dx dt$ — решение уравнения (1.1), коэффициенты a^{ij}, b^i удовлетворяют условиям (C1), (C2) и (C3) и выполнены условия (H1), (H2) и (H3). Тогда

$$\sup_{K^+} e^{f^{-1}(|\ln \Lambda \varrho|)} \leq C \left(\int_{K^-} e^{-\lambda f^{-1}(|\ln \Lambda \varrho|)} dx dt \right)^{-1/\lambda},$$

где C зависит только от следующих величин: s_1, s_2, t_1, t_2 ,

$$p, N, \omega_0, m, M, \gamma, d, \|\varrho\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d \times [T_0, T_1])}, \int_{T_0}^{T_1} \int_{\mathbf{R}^d} |b|^p \exp\{p\psi(|b|)\} \varrho dx dt.$$

Доказательство. Пусть $n \geq 0$ и

$$Q_n := Q(2^{-1} + 2^{-n-1}), \quad \tau_n = t_1 - (t_1 - s_2) \cdot 2^{-n-1}.$$

1) Согласно лемме 4.1 с $q = 0$ и $s = p/(p-2)$, для всех $T_0 < \tau_1 < \tau_2 < T_1$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{Q_0} [\xi_k(x, \tau_2) \eta_0^2(x) - \xi_k(x, \tau_1) \eta_0^2(x)] dx + \frac{m\gamma}{3} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{Q_0} |\nabla \xi_k|^2 \eta_0^2 dx dt \\ & \leq N_1(2 - \gamma) \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{Q_0} |\nabla \eta|^2 dx dt + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{Q_0} \eta^2 dx dt \right)^{(p-2)/p} \right] \quad (4.8) \end{aligned}$$

для любой функции $\eta \in C_0^\infty(Q_0 \times (T_0, T_1))$ такой, что $\eta(x, \tau) = \eta_0(x)$ при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$. Согласно равенству (4.6), функция

$$t \mapsto \int_{Q_0} \xi_k(x, t) \eta_0^2(x) dx$$

абсолютно непрерывна на всяком внутреннем интервале в $[T_0, T_1]$. Для всякого куба $Q(r)$ такого, что $Q(2r) \subset Q_0$, при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ положим $\eta(x, \tau) = \eta_0(x) := \psi_Q(x)$, где функция ψ_Q определена в (4.7). Так как $s = p/(p-2) < d/(d-2)$, то ввиду (4.8) найдутся такие числа A_1, A_2 , что

$$\frac{d}{dt} \int_{Q(2r)} \xi_k(x, t) \psi_Q^2(x) dx + A_1 \int_{Q(2r)} |\nabla \xi_k(x, t)|^2 \psi_Q^2(x) dx \leq A_2 |Q(r)|^{1-2/d}.$$

Таким образом, условия леммы 4.4 выполнены. Следовательно, существуют такие числа $\lambda, \sigma > 0$, зависящие только от указанных выше величин, что

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_{Q_0} e^{-\lambda \xi_k} dx dt \int_{\tau_0}^{t_2} \int_{Q_0} e^{\lambda \xi_k} dx dt \leq \sigma. \quad (4.9)$$

2) Пусть $\eta \in C_0^1(Q_0 \times (T_0, T_1))$. По лемме 1 с $q > 0$ для всех $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2q} \int_{Q_0} [e^{2q\xi_k(x, \tau_2)} \eta^2(x, \tau_2) - e^{2q\xi_k(x, \tau_1)} \eta^2(x, \tau_1)] dx \\ & + \frac{m\gamma}{3q^2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{Q_0} |\nabla e^{q\xi_k}|^2 \eta^2 dx dt \\ & \leq \frac{1}{q} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{Q_0} |\eta| |\eta_t| e^{2q\xi_k} dx dt \\ & + N_1(2 + 2q - \gamma) \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{Q_0} |\nabla \eta|^2 e^{2q\xi_k} dx dt \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{Q_0} e^{2sq\xi_k} \eta^2 dx dt \right)^{1/s} \right]. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Пусть η_n — такая неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция, что

$$\begin{aligned} \eta_n(x, t) &= 1 \quad \text{при } (x, t) \in Q_{n+1} \times (\tau_{n+1}, t_2), \\ \eta_n(x, t) &= 0 \quad \text{при } (x, t) \notin Q_n \times (\tau_n, T_1), \end{aligned}$$

$|\eta(x, t)| \leq 1$, $|\partial_t \eta_n(x, t)| \leq c_1 \cdot 2^n$, $|\nabla_x \eta_n(x, t)| \leq c_2 \cdot 2^n$, где c_1, c_2 — некоторые положительные числа. Применяя неравенство Гёльдера с показателями s и s' , выводим из (4.10) следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\nabla(e^{q\xi_k} \eta_n)\|_{L^2(Q_{n+1} \times (\tau_{n+1}, t_2))}^2 &\leq C_1 \cdot 4^n q^2 \|e^{q\xi_k}\|_{L^{2s}(Q_n \times (\tau_n, t_2))}^2, \\ \sup_{t \in (\tau_{n+1}, t_2)} \|e^{q\xi_k(\cdot, t)} \eta_n(\cdot, t)\|_{L^2(Q_{n+1})}^2 &\leq C_1 \cdot 4^n q^2 \|e^{q\xi_k}\|_{L^{2s}(Q_n \times (\tau_n, t_2))}^2. \end{aligned}$$

По лемме 4.3 существует такая константа $C_2 > 0$, что

$$\|e^{q\xi_k}\|_{L^{2(d+2)/d}(Q_{n+1} \times (\tau_{n+1}, t_2))}^2 \leq C_2 q^3 \cdot 4^n \|e^{q\xi_k}\|_{L^{2s}(Q_n \times (\tau_n, t_2))}^2.$$

При $\alpha > 0$ положим

$$F(\alpha, Q_n \times (\tau_n, t_2)) = \left(\int_{\tau_n}^{t_2} \int_{Q_n} e^{\alpha\xi_k} dx dt \right)^{1/\alpha}.$$

Пусть $s = p/(p-2)$. Так как $p > d+2$, то $\beta = (d+2)d^{-1}s^{-1} > 1$. Положим $q_0 = \lambda/2$, $q_n = \beta^n \lambda/2$. Тогда $q_{n+1} = \beta q_n$ и $q_n \rightarrow \infty$. Подставляя q_n вместо q , находим $F(q_{n+1}, Q_{n+1} \times (\tau_{n+1}, t_2)) \leq C_3^{n\beta^{-n}} F(q_n, Q_n \times (\tau_n, t_2))$. Так как $\sum_n n\beta^{-n} < \infty$, то существует такое число C_4 , что для всех $n \geq 0$

$$F(q_{n+1}, Q_{n+1} \times (\tau_{n+1}, t_2)) \leq C_4 F(\lambda, Q_0 \times (\tau_0, t_2)).$$

Учитывая (4.9), получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

Теорема 4.2. Пусть $\mu = \varrho dx dt$ — решение уравнения (1.1), коэффициенты a^{ij}, b^i удовлетворяют условиям (C1), (C2) и (C3) и выполнены условия (H1), (H2) и (H3). Пусть дан отрезок $J = [\tau_1, \tau_2] \subset (T_0, T_1)$. Тогда существуют такие положительные числа c_1 и c_2 , что

$$\varrho(x, t) \geq \exp\{-f(c_1|x|^2 + c_2)\}, \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad t \in J.$$

Доказательство. Пусть $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}^d \times (0, 1)$, $0 < l < 1$ и

$$v(x, t) = \varrho(x_0 + lx, t_0 + l^2(t - t_0)).$$

Тогда мера $v(x, t) dx dt$ удовлетворяет на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ уравнению (1.1) с коэффициентами

$$\begin{aligned} \widehat{a}^{ij}(x, t) &= a^{ij}(x_0 + lx, t_0 + l^2(t - t_0)), \\ \widehat{b}(x, t) &= lb(x_0 + lx, t_0 + l^2(t - t_0)). \end{aligned}$$

Для применения полученных выше результатов важно иметь оценку величины

$$\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} |\widehat{b}|^p \exp\{p\psi(|\widehat{b}|)\} v dx dt.$$

Сделаем замену координат $y = x_0 + lx$ и $s = t_0 + l^2(t - t_0)$. Получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} |\widehat{b}|^p \exp\{p\psi(|\widehat{b}|)\} v dx dt \\ = l^{p-d-2} \int_{t_0(1-l^2)}^{t_0(1-l^2)+l^2} \int_{\mathbf{R}^d} |b|^p \exp\{p\psi(l|b|)\} \varrho dy ds. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $p > d + 2$, $0 < l < 1$ и ψ — возрастающая функция, имеем

$$\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} |\widehat{b}|^p \exp\{p\psi(|\widehat{b}|)\} v dx dt \leq \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} |b|^p \exp\{p\psi(|b|)\} \varrho dy ds.$$

Положим $w = e^{\lambda f^{-1}(|\ln \Lambda v|)}$. Тогда по теореме 4.1 для всякого куба $Q = Q(0, 1/2)$ имеем

$$\sup_{[5/8, 7/8] \times Q} w(x, t) \leq C \left(\int_{1/8}^{3/8} \int_Q \frac{1}{w(y, s)} dy ds \right)^{-1}.$$

Пусть h — вектор, длина которого меньше $1/2$. При замене куба $Q(0, 1/2)$ на куб $\widehat{Q} = Q(0, 1/2) \cap Q(h, 1/2)$ правая часть неравенства только увеличивается. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{[5/8, 7/8] \times Q} w(x, t) &\leq C \left(\int_{1/8}^{3/8} \int_{\widehat{Q}} \frac{1}{w(y, s)} dy ds \right)^{-1} \\ &\leq C \sup_{[1/8, 3/8] \times \widehat{Q}} w(x, t) \leq C \sup_{[1/8, 3/8] \times Q(h, 1/2)} w(x, t). \end{aligned}$$

Положим $u = e^{\lambda f^{-1}(|\ln \Lambda \varrho|)}$. Пусть $\tau_0 = t_0(1 - l^2) + 3l^2/4$. Возвращаясь от v к ϱ , приходим к оценке

$$\sup_{[\tau_0 - l^2/8, \tau_0 + l^2/8] \times Q(x_0, l/2)} u(x, t) \leq C \sup_{[\tau_0 + l^2/2 - l^2/8, \tau_0 + l^2/2 + l^2/8] \times Q(x_0 + lh, l/2)} u(x, t).$$

Зафиксируем $s \in (T_0, \tau_1)$ и $R = \max\{1, 1/\sqrt{2(s - T_0)}\}$. Положим

$$C_0 = \sup_{(x, t) \in U(0, R) \times (T_0, \tau_1)} u(x, t).$$

Для $t \in (\tau_1, \tau_0)$ и $|x| > R$ положим

$$N = 2 \left\lceil \frac{|x|^2}{t - s} \right\rceil,$$

где $\lceil \cdot \rceil$ — целая часть числа. Пусть

$$h = -\frac{x}{2|x|}, \quad l = \frac{2|x|}{N}.$$

Положим

$$x_{k+1} = x_k + lh, \quad x_0 = x, \quad t_{k+1} = t_k - \frac{l^2}{2}, \quad t_0 = t.$$

Тогда $x_N = x - Nlh = 0$ и $t_N = t - Nl^2/2 = t - 2|x|^2/N$, причем $T_0 < t_N < \tau_1$. Применяя полученные выше неравенства, находим

$$\sup_{[t_k - l^2/8, t_k + l^2/8] \times Q(x_k, l/2)} u(x, t) \leq C \sup_{[t_{k+1} - l^2/8, t_{k+1} + l^2/8] \times Q(x_{k+1}, l/2)} u(x, t)$$

для всякого $0 \leq k \leq N$. Следовательно, выполняется неравенство

$$u(x, t) \leq C^N C_0.$$

Итак, существуют такие числа $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$, что $u(x, t) \leq e^{\alpha_1 |x|^2 + \alpha_2}$. Заметим, что $\varrho = \Lambda^{-1} e^{-f(\Lambda^{-1} \ln u)}$ и f — строго возрастающая функция, а число Λ^{-1} не меньше единицы. Теорема доказана.

Приведем следующий пример применения доказанной теоремы.

Пример 4.1. Пусть выполняются условия (C1) и (C2) и мера $\mu = \varrho dx dt$ является решением уравнения (1.1). Если для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет место включение $\exp\{\varepsilon |b|^4\} \in L^1(\mu)$, то для всякого отрезка $[\tau_1, \tau_2]$ найдутся такие положительные числа N и K , что

$$\varrho(x, t) \geq N \exp\{-K|x|^4\} \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbf{R}^d \times [\tau_1, \tau_2].$$

Действительно, для вывода последнего неравенства достаточно в теореме 4.2 положить $f(z) = z^2$ и $\psi(z) = \delta z^4$ с $0 < \delta < (2p)^{-1}\varepsilon$.

Автор выражает глубокую благодарность В.И. Богачеву за плодотворные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M.* On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions. — *Comm. Partial Differential Equations*, 2001, v. 26, № 11–12, p. 2037–2080.
2. *Богачев В. И., Крылов Н. В., Рёкнер М.* Эллиптические и параболические уравнения для мер. — *Успехи матем. наук*, 2009, т. 64, № 6, с. 5–116.
3. *Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M.* Existence of solutions to weak parabolic equations for measures. — *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2004, v. 88, № 3, p. 753–774.
4. *Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M., Stannat W.* Uniqueness of solutions to weak parabolic equations for measures. — *Bull. Lond. Math. Soc.*, 2007, v. 39, № 4, p. 631–640.
5. *Богачев В. И., Рёкнер М., Шапошников С. В.* Глобальная регулярность и оценки решений параболических уравнений. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, т. 50, в. 4, с. 652–674.
6. *Богачев В. И., Рёкнер М., Шапошников С. В.* Оценки плотностей стационарных распределений и переходных вероятностей диффузионных процессов. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, т. 52, в. 2, с. 240–270.
7. *Metafune G., Pallara D., Rhandi A.* Global properties of transition probabilities of singular diffusions. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, т. 54, в. 1, с. 116–148.
8. *Spina C.* Kernel estimates for a class of Kolmogorov semigroups. — *Arch. Math.*, 2008, v. 91, № 3, p. 265–279.
9. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968, 427 с.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.
11. *Порпер Ф. О., Эйдельман С. Д.* Двусторонние оценки фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их приложения. — *Успехи матем. наук*, 1984, т. 39, № 3, с. 107–156.
12. *Aronson D. G., Serrin J.* Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations. — *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1967, v. 25, p. 81–122.
13. *Денисов В. Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени. — *Успехи матем. наук*, 2005, т. 60, № 4, с. 145–212.
14. *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* *Multidimensional Diffusion Processes*. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1979, 338 p.
15. *Шапошников С. В.* Оценки решений параболических уравнений для мер. — *Докл. РАН*, 2010, т. 434, № 4, с. 454–458.
16. *Шапошников С. В.* Нижние оценки плотностей решений параболических уравнений для мер. — *Докл. РАН*, 2009, т. 428, № 6, с. 1–5.
17. *Богачев В. И., Рёкнер М., Шапошников С. В.* Положительные плотности переходных вероятностей диффузионных процессов. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, т. 53, в. 2, с. 213–239.
18. *Богачев В. И., Рёкнер М., Шапошников С. В.* Нижние оценки плотностей решений эллиптических уравнений для вероятностных мер. — *Докл. РАН*, 2009, т. 426, № 2, с. 1–6.
19. *Агафонцев Б. В., Богачев В. И., Шапошников С. В.* Условия положительности плотности инвариантной меры. — *Докл. РАН*, 2011 (в печати).
20. *Trudinger N. S.* Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations. — *Comm. Pure Appl. Math.*, 1968, v. 21, p. 205–226.
21. *Moser J.* A Harnack inequality for parabolic differential equations. — *Comm. Pure Appl. Math.*, 1964, v. 17, p. 101–134.

Поступила в редакцию
2.II.2011