Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Морозов, Дифференцируемость целевой функции в задаче максимизации робастной полезности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 2, 374–384

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4381>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:07:41

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2011 г.

МОРОЗОВ И. С.*

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ РОБАСТНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

В задачах максимизации полезности оптимальный способ инвестирования позволяет при начальном капитале x получить ожидаемую полезность $u(x)$. В этом смысле на целевую функцию u можно смотреть как на функцию полезности. Традиционным условием на функцию полезности является дифференцируемость, поэтому естественным образом возникает вопрос о дифференцируемости целевой функции u . При этом в задаче максимизации стандартной полезности целевая функция обычно дифференцируема. Данная статья преследует цель показать, что это не так для задачи максимизации робастной полезности за исключением случаев, когда функция полезности U имеет степенной, экспоненциальный или логарифмический вид.

Ключевые слова и фразы: задача максимизации робастной полезности; дифференцируемость целевой функции; степенная, логарифмическая, экспоненциальная функции полезности.

1. Введение и основные результаты. В литературе задача оптимального инвестирования на финансовом рынке часто рассматривается с точки зрения максимизации ожидаемой полезности от капитала инвестора в заключительный момент времени. Стандартная задача максимизации полезности в абстрактной формулировке может быть поставлена в виде $u(x) := \sup_{k \in \mathcal{K}} \mathbf{E} U(x + k)$, где

- (i) $U: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ — возрастающая вогнутая функция, не равная тождественно $-\infty$, представляющая собой функцию полезности экономического агента;
- (ii) x — начальный капитал;
- (iii) максимизация происходит по (возможно, зависящему от x) выпуклому множеству $\mathcal{K}$, состоящему из случайных величин k на $(\Omega, \mathcal{F})$, которые трактуются как допустимые на финансовом рынке доходы.

В такой постановке задача изучалась многими авторами, однако наиболее существенный вклад в ее исследование внесли Д. Крамков и В. Шахермайер в [1]–[3].

В действительности выбор вероятностной меры $\mathbf{P}$, описывающей будущее состояние рынка, может сам являться элементом неопределенности. Возможным подходом к рассмотрению подобного рода рисков может служить оптимизация наихудшего сценария. Исследования в данном направлении проводились, в частности, в [4]–[7], а также

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: morozovis@gmail.com

в недавних работах [8], [9]. Если будущие сценарии рынка с точки зрения инвестора описываются множеством $\mathcal{Q}$ субъективных мер на $(\Omega, \mathcal{F})$, то задача максимизации робастной полезности может быть поставлена в виде

$$u(x) := \sup_{k \in \mathcal{K}} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q U(x + k), \quad (1)$$

где максимизация по-прежнему происходит по некоторому множеству допустимых доходов. В литературе эту задачу называют также задачей максимизации когерентной робастной полезности, оставляя термин «робастная полезность» для случая, когда к $E_Q U(x + k)$ прибавляется штрафная функция $\gamma(Q)$.

Вне зависимости от конкретной постановки задачи максимизации полезности выбор оптимального способа инвестирования позволяет при начальном капитале x получить ожидаемую полезность $u(x)$. В этом смысле целевая функция u позволяет оценить возможности финансового рынка и поэтому сама может рассматриваться как функция полезности.

Помимо возрастания и вогнутости, традиционными с экономической точки зрения условиями на функцию полезности являются условия Инада и различного рода условия гладкости, в том числе дифференцируемость. Таким образом, при исследовании максимизации полезности важным является вопрос о гладкости целевой функции u , и в первую очередь — вопрос о ее дифференцируемости.

В стандартной постановке задачи при дифференцируемой функции полезности U целевая функция u будет также дифференцируемой (см., например, [1, теорема 2.1 (i)], [3, теорема 2.2 (i)]). Отличие робастного случая от стандартного заключается в том, что даже при дифференцируемой функции полезности U целевая функция u может быть не всюду дифференцируемой. Соответствующий пример в случае робастной полезности со штрафной функцией можно найти в [10]. Если штрафная функция $\gamma(Q)$ строго выпукла, то целевая функция u будет также дифференцируемой (более точно см. [8, теорема 2.2 (ix)]). Однако задаче (1) отвечает штрафная функция, которая обращается в нуль на $\mathcal{Q}$ и равна $+\infty$ вне его, т.е. не является строго выпуклой, если $\mathcal{Q}$ состоит более чем из одного элемента.

Тем не менее, для некоторых функций полезности U целевая функция u будет всюду дифференцируемой при весьма общих предположениях. Будем говорить, что:

- 1) функция U степенная, если для некоторых констант $C_1 > 0$, $C_2 \in \mathbf{R}$, $C_3 \in \mathbf{R}$

$$U(x) = \begin{cases} -\infty, & x < C_2, \\ C_1 \frac{(x - C_2)^\gamma}{\gamma} + C_3, & x \geq C_2, \end{cases} \quad \text{для } \gamma < 1, \gamma \neq 0,$$

или

$$U(x) = \begin{cases} -C_1 |x - C_2|^\gamma + C_3, & x < C_2, \\ C_3, & x \geq C_2, \end{cases} \quad \text{для } \gamma > 1;$$

- 2) функция U экспоненциальная, если для некоторых констант $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $C_3 \in \mathbf{R}$

$$U(x) = -C_1 e^{-C_2 x} + C_3, \quad x \in \mathbf{R};$$

- 3) функция U логарифмическая, если для некоторых констант $C_1 > 0$, $C_2 \in \mathbf{R}$, $C_3 \in \mathbf{R}$

$$U(x) = \begin{cases} -\infty, & x \leq C_2, \\ C_1 \ln(x - C_2) + C_3, & x > C_2. \end{cases}$$

Иными словами, функция U имеет степенной, экспоненциальный или логарифмический вид, если с помощью преобразования $C_1 U(C_2 x + C_3) + C_4$, где $C_1, C_2 > 0$, $C_3, C_4 \in \mathbf{R}$, она приводится к виду

$$U(x) = \begin{cases} -\infty, & x < 0, \\ \frac{x^\gamma}{\gamma}, & x \geq 0, \end{cases} \quad \gamma < 1, \gamma \neq 0, \quad U(x) = \begin{cases} -|x|^\gamma, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases} \quad \gamma > 1,$$

$$U(x) = -e^{-x}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad \text{или} \quad U(x) = \begin{cases} -\infty, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$$

соответственно.

Для таких функций полезности вопрос о дифференцируемости целевой функции (1) решается положительно при весьма общих предположениях. Так, например, если множество $\mathcal{K}$ не зависит от x и является конусом, несложно убедиться, что конечность u хотя бы в одной точке $x \in \text{int dom } U$ влечет $u(x) = A_1 U(x) + A_2$ для всех x из этой области, где $A_1 \geq 0$, $A_2 \in \mathbf{R}$ — константы. Здесь $\text{int dom } U$ обозначает внутренние точки области конечности $\text{dom } U := \{x \in \mathbf{R}: U(x) > -\infty\}$. Подобная ситуация имеет место и при других предположениях.

Основная цель данной статьи состоит в доказательстве того, что для любой другой функции полезности, не из перечисленных выше классов, всегда найдется простая модель рынка, для которой функция ожидаемой полезности (1) не будет всюду дифференцируемой. А именно, мы покажем, что такая ситуация может быть реализована в одношаговой модели рынка с двумя рисковыми активами на конечном вероятностном пространстве, состоящем из четырех элементарных исходов.

Итак, перейдем к описанию модели рынка и предположим следующее:

(i) Функция полезности $U: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ возрастает, вогнута, полунепрерывна сверху, не равна тождественно $-\infty$ и не является линейной. Совокупность $\text{int dom } U$ внутренних точек области конечности U обозначим $(a, +\infty)$, где $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$.

З а м е ч а н и е 1. Случай линейной функции полезности тривиален: если целевая функция конечна хотя бы в одной точке, то она также будет линейной. Данная ситуация исключена для удобства последующего изложения.

(ii) Пространство элементарных событий Ω дискретно и состоит из четырех исходов: $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Сигма-алгебра $\mathcal{F}$ есть 2^Ω . Вероятностные меры и случайные величины тогда можно отождествить с четырехмерными векторами.

(iii) Зафиксируем произвольные $r_1, r_2 \in (0, 1)$ и зададим процессы (дисконтированных) цен двух рисковых активов $(S_t^i)_{t=0,1}$ для $i = 1, 2$ равенствами $S_0^1 := S_0^2 := 1$,

$$S_1^1 := (2 - r_1, 1 - r_1, 1, 1), \quad S_1^2 := (1, 1, 2 - r_2, 1 - r_2). \quad (2)$$

Множество $\mathcal{K}$ допустимых доходов определим стандартным образом как $\mathcal{K} := \{\lambda_1(S_1^1 - S_0^1) + \lambda_2(S_1^2 - S_0^2) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\}$.

(iv) Зафиксируем произвольные $q_1, q_2 \in (0, 1)$, две вероятностные меры зададим равенствами $\mathbf{Q}_1 := (q_1, 1 - q_1, 0, 0)$, $\mathbf{Q}_2 := (0, 0, q_2, 1 - q_2)$ и положим множество субъективных мер $\mathcal{Q}$ равным выпуклой оболочке $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$: $\mathcal{Q} := \{\mathbf{Q}^\beta := \beta \mathbf{Q}_1 + (1 - \beta) \mathbf{Q}_2 : 0 \leq \beta \leq 1\}$.

Обозначим $u'_-(x)$ левую производную u в точке x . Отметим также, что в силу возрастания и вогнутости целевая функция $u(x)$ либо конечна на $(a, +\infty)$, либо обращается в бесконечность в каждой точке этого множества.

Теорема 1. Следующие условия эквивалентны:

1. Для любой рассматриваемой модели рынка целевая функция $u(x)$ в случае конечности дифференцируема на $(a, +\infty)$ и при $a > -\infty$ удовлетворяет условию Инада на левом конце: $\lim_{x \downarrow a} u'_-(x) = +\infty$.

2. Функция полезности $U(x)$ имеет степенной, экспоненциальный или логарифмический вид.

А именно, если функция $U(x)$ имеет один из указанных видов, то для любых параметров $r_1, r_2, q_1, q_2 \in (0, 1)$ целевая функция $u(x)$ в случае конечности будет дифференцируемой на $(a, +\infty)$ и при $a > -\infty$ будет удовлетворять условию Инада на левом конце. Если же функция $U(x)$ имеет иной вид, то всегда можно подобрать такие $r_1, r_2, q_1, q_2 \in (0, 1)$, что либо целевая функция $u(x)$ будет недифференцируемой по крайней мере в одной точке, либо не будет выполнено условие Инада на левом конце $a > -\infty$.

2. Описание в двойственных терминах. Современный подход к решению задач максимизации полезности состоит в переходе к двойственной оптимизационной задаче с подходящим образом определенной целевой функцией $v(y)$.

При самых общих предположениях задача максимизации робастной полезности со штрафной функцией была рассмотрена в недавней работе [8]. Основная часть указанной статьи имеет дело со случаем конечной на $(0, +\infty)$ функции полезности, к которому сводится случай функции полезности, конечной на произвольной полупрямой $(a, +\infty)$, $a > -\infty$. Ситуация всюду конечной функции полезности рассматривается кратко в [8, п. 2.5] в предположении, что возможные доходы ограничены снизу. Отказ от этого предположения приводит к существенно более сложной задаче, которая изучалась в [9].

В рассматриваемой нами модели рынка благодаря конечности вероятностного пространства дуальная характеристика целевой функции существенно упрощается.

А именно, положим

$$V(y) := \sup_{x \in \mathbf{R}} [U(x) - xy], \quad y \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

т.е. $V(y)$ есть преобразование Фенхеля от $-U(-x)$ и поэтому является выпуклой полунепрерывной снизу функцией с $\text{dom } V := \{y \in \mathbf{R}: V(y) < +\infty\} \subseteq \mathbf{R}_+$. Определим также $\mathcal{R}$ как множество таких вероятностных мер R , что $E_R k \leq 0$ для всех $k \in \mathcal{K}$, т.е. таких, что $E_R(S_1^i - S_0^i) = 0$ для $i = 1, 2$. Иначе говоря, $\mathcal{R}$ есть множество мартингальных мер.

Если вероятностные меры R_1 и R_2 определить равенствами $R_1 := (r_1, 1 - r_1, 0, 0)$, $R_2 := (0, 0, r_2, 1 - r_2)$, то непосредственно из (2) вытекает следующее представление.

Лемма 1. *Множество $\mathcal{R}$ совпадает с выпуклой оболочкой мер R_1 и R_2 , т.е. $\mathcal{R} = \{R^\alpha := \alpha R_1 + (1 - \alpha) R_2: 0 \leq \alpha \leq 1\}$.*

Таким образом, несложно проверить, что определенная в [8] двойственная целевая функция имеет вид

$$v(y) := \inf_{\substack{R \in \mathcal{R}, Q \in \mathcal{Q} \\ R \ll Q}} E_Q V\left(y \frac{dR}{dQ}\right) = \inf_{\alpha, \beta \in [0, 1]: R^\alpha \ll Q^\beta} E_{Q^\beta} V\left(y \frac{dR^\alpha}{dQ^\beta}\right), \quad y \geq 0.$$

Решение двойственной задачи позволяет охарактеризовать решение исходной и найти ее цену. Основным связующим звеном при таком переходе являются минимаксные соотношения: $u(x) = \min_{y \geq 0} [v(y) + xy]$, $x > a$, и $v(y) = \sup_{x > a} [u(x) - xy]$, $y \geq 0$. Выпуклый анализ для таких функций устанавливает прямую связь между дифференцируемостью первой и строгой выпуклостью второй.

Предложение 1 (см. [11, предложение 4(v)]). *Функция $u(x)$ в случае конечности дифференцируема на $(a, +\infty)$ и при $a > -\infty$ удовлетворяет условию Инада на левом конце тогда и только тогда, когда функция $v(y)$ строго выпукла на $\text{dom } v := \{y \in \mathbf{R}: v(y) < +\infty\}$.*

С помощью прямого вычисления несложно установить взаимно однозначное соответствие между видом функции U и видом функции V .

Предложение 2. *Следующие соответствия являются взаимно однозначными между видом функции полезности U и видом двойственной функции V :*

- 1) U степенная, $V(y) = C_1(\gamma(\gamma - 1))^{-1}y^\gamma + C_2y + C_3$, $y > 0$, где $\gamma \neq 0$, $\gamma \neq 1$;
- 2) U экспоненциальная, $V(y) = C_1y(\ln y - 1) + C_2y + C_3$, $y \geq 0$;
- 3) U логарифмическая, $V(y) = -C_1 \ln y + C_2y + C_3$, $y > 0$

для некоторых констант $C_1 > 0$, $C_2 \in \mathbf{R}$, $C_3 \in \mathbf{R}$.

Иными словами, функция U имеет степенной, экспоненциальный или логарифмический вид тогда и только тогда, когда двойственная функция V с точностью до преобразования $C_1V(C_2y) + C_3y + C_4$, где $C_1, C_2 > 0$, $C_3, C_4 \in \mathbf{R}$, представляется как

$V(y) = y^\gamma / (\gamma(\gamma - 1))$, $y > 0$, где $\gamma \neq 0$, $\gamma \neq 1$, $V(y) = y \ln y$, $y \geq 0$, или $V(y) = -\ln y$, $y > 0$, соответственно.

Доказательство предложения 2. Из (3) видно, что после замены $U(x)$ на $C_1 U(C_2 x + C_3) + C_4$, где $C_1, C_2 > 0$, $C_3, C_4 \in \mathbf{R}$, двойственная функция $V(y)$ примет вид

$$C_1 V\left(\frac{y}{C_1 C_2}\right) + \frac{C_3}{C_1 C_2} y + C_4.$$

Далее достаточно воспользоваться прямым вычислением.

С учетом представленных выше двух предложений теорема 1 может быть переформулирована в эквивалентном виде.

Теорема 2. *Функция v строго выпукла на $\text{dom } v$ для любой модели рынка тогда и только тогда, когда функция V имеет одно из представлений 1)–3) предложения 2.*

3. Доказательство. Двойственный подход позволяет свести вопрос о дифференцируемости к более простому вопросу о строгой выпуклости. Поэтому доказывать мы будем двойственную теорему 2, эквивалентную теореме 1.

Ситуация $\mathbf{R}^\alpha \not\ll \mathbf{Q}^\beta$ возможна только при $\beta = 0$ или 1 и $\alpha \neq \beta$. Поэтому для $\beta = 0$ доопределим по непрерывности

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^\beta} V\left(y \frac{d\mathbf{R}^\alpha}{d\mathbf{Q}^\beta}\right) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^\varepsilon} V\left(y \frac{d\mathbf{R}^\alpha}{d\mathbf{Q}^\varepsilon}\right),$$

а для $\beta = 1$ доопределим

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^\beta} V\left(y \frac{d\mathbf{R}^\alpha}{d\mathbf{Q}^\beta}\right) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^{1-\varepsilon}} V\left(y \frac{d\mathbf{R}^\alpha}{d\mathbf{Q}^{1-\varepsilon}}\right).$$

Зададим вспомогательные функции v_1 и v_2 , положив для $i = 1, 2$

$$v_i(y) := \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_i} V\left(y \frac{d\mathbf{R}_i}{d\mathbf{Q}_i}\right) = q_i V\left(y \frac{r_i}{q_i}\right) + (1 - q_i) V\left(y \frac{1 - r_i}{1 - q_i}\right).$$

Так как

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^\beta} V\left(y \frac{d\mathbf{R}^\alpha}{d\mathbf{Q}^\beta}\right) = \beta \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_1} V\left(y \frac{\alpha}{\beta} \frac{d\mathbf{R}_1}{d\mathbf{Q}_1}\right) + (1 - \beta) \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_2} V\left(y \frac{1 - \alpha}{1 - \beta} \frac{d\mathbf{R}_2}{d\mathbf{Q}_2}\right),$$

то двойственная целевая функция может быть переписана в виде

$$v(y) = \inf_{\alpha, \beta \in [0, 1]} \left[\beta v_1\left(y \frac{\alpha}{\beta}\right) + (1 - \beta) v_2\left(y \frac{1 - \alpha}{1 - \beta}\right) \right]. \quad (4)$$

Определим $\hat{v}$ как наибольшую выпуклую функцию, которая меньше v_1 и v_2 .

Лемма 2. *Функции v и $\hat{v}$ совпадают.*

Доказательство. Подставив в выражение (4) вместо (α, β) пары $(1, 1)$ и $(0, 0)$, получим, что $v(y) \leq v_1(y)$ и $v(y) \leq v_2(y)$. Но функция v выпукла, поэтому $v(y) \leq \hat{v}(y)$. Далее, для любых $\alpha, \beta \in [0, 1]$ в силу определения $\hat{v}$

$$\beta v_1\left(y \frac{\alpha}{\beta}\right) + (1 - \beta) v_2\left(y \frac{1 - \alpha}{1 - \beta}\right) \geq \beta \hat{v}\left(y \frac{\alpha}{\beta}\right) + (1 - \beta) \hat{v}\left(y \frac{1 - \alpha}{1 - \beta}\right) \geq \hat{v}(y),$$

а значит, и $v(y) \geq \hat{v}(y)$. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 2.

($\Leftarrow$) Если функция V имеет одно из представлений 1)–3) предложения 2, то из явного вида функций v_1 и v_2 становится понятным, что в любом из трех случаев либо

$v_1 \geq v_2$, либо $v_2 \geq v_1$ на $\mathbf{R}$. Но, как следует из леммы 2, в этом случае $v = v_1$ или $v = v_2$. Поскольку функции V , имеющие представления 1)–3), строго выпуклы, то этим свойством обладают и функции v_1, v_2 , а значит, и функция v .

($\Rightarrow$) Предположим теперь обратное, т.е. что для любых параметров рынка функция v строго выпукла на множестве $\text{dom } v$, и покажем, что выполнено одно из свойств 1)–3).

Для моделей рынков с параметрами $r_1 = q_1$ и $r_2 = q_2$ целевая функция $v(y)$ совпадает с $V(y)$ для всех y . Поэтому сама V также обязана быть строго выпуклой. Данный факт будет неоднократно использоваться в последующем.

Из соображений выпуклости множество $\text{dom } V$ имеет вид промежутка (с открытыми или закрытыми концами) от c до d , где $0 \leq c \leq d \leq +\infty$, а поскольку случай линейной функции U был исключен, то c строго меньше d .

Лемма 3. *Случай $0 < c < d < +\infty$ невозможен.*

Доказательство. Предположим, что $0 < c < d < +\infty$, и заметим, что при $r_i < q_i$

$$\text{int dom } v_i = \left(\frac{q_i}{r_i} c, \frac{1 - q_i}{1 - r_i} d \right), \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

где интервал считается пустым, если его левый конец превосходит правый.

Зафиксируем произвольные числа $0 < q_1 < q_2 < 1$, и пусть $r_i \downarrow q_i c / (q_i c + (1 - q_i) d)$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\frac{q_i}{r_i} c \uparrow q_i c + (1 - q_i) d \quad \text{и} \quad \frac{1 - q_i}{1 - r_i} d \downarrow q_i c + (1 - q_i) d,$$

поэтому с некоторого момента $\text{int dom } v_1 \subset (c, C)$ и $\text{dom } v_2 \subset (D, d)$ для некоторых констант $c < C < D < d$. Отсюда легко видеть, что функция $\hat{v}$, по крайней мере на интервале (C, D) , будет линейной. Но $\hat{v} = v$, что приводит к противоречию. Лемма доказана.

Представим на время, что мы доказали невозможность случая $c = 0$, $d < +\infty$. Тогда можно сразу получить следующее.

Лемма 4. *Случай $c > 0$, $d = +\infty$ невозможен.*

Доказательство. Рассмотрим задачу максимизации робастной полезности в предположениях п. 1 с новой функцией полезности $\tilde{U}$, двойственная к которой задается соотношением $\tilde{V}(y) := yV(y^{-1})$ и параметрами $\tilde{r}_1 := q_1$, $\tilde{r}_2 := q_2$, $\tilde{q}_1 := r_1$, $\tilde{q}_2 := r_2$.

Легко видеть, что в этом случае $\tilde{v}_1(y) = yv_1(y^{-1})$, $\tilde{v}_2(y) = yv_2(y^{-1})$ и $\tilde{v}(y) = yv(y^{-1})$. Поэтому если v строго выпукла на $\text{dom } v$, то $\tilde{v}$ строго выпукла на $\text{dom } \tilde{v}$. Но сделанное перед леммой предположение исключает возможность $\text{int dom } \tilde{V} = (0, \tilde{d})$, $\tilde{d} < +\infty$, что эквивалентно $\text{int dom } V = (\tilde{d}^{-1}, +\infty)$. Таким образом, лемма доказана.

Остается рассмотреть случай $c = 0$, когда $\text{int dom } V = (0, d)$ и $d \leq +\infty$.

Определим

$$v_{rq}(y) := qV\left(y \frac{r}{q}\right) + (1 - q)V\left(y \frac{1 - r}{1 - q}\right),$$

так что $v_{r_1 q_1} = v_1$ и $v_{r_2 q_2} = v_2$.

Если для некоторой модели рынка найдется точка $y \in \text{int dom } v_1 \cap \text{int dom } v_2$, в которой v_1 и v_2 дифференцируемы, и $v_1(y) = v_2(y)$, $v'_1(y) \neq v'_2(y)$, то наибольшая выпуклая функция $\hat{v}$, меньшая v_1 и v_2 , будет линейной на некотором интервале, содержащем y , и, значит, функция $v = \hat{v}$ не будет строго выпуклой.

Обозначим $D(V)$ множество точек дифференцируемости V и зафиксируем некоторые числа $y \in \mathbf{R}_+$ и $b \in \mathbf{R}$. Из последнего соображения тогда вытекает, что для всех $r, q \in (0, 1)$ таких, что $yr/q, y(1 - r)/(1 - q) \in D(V)$ и

$$v_{rq}(y) = b, \quad (6)$$

выполняется

$$v'_{rq}(y) = rV'\left(y \frac{r}{q}\right) + (1-r)V'\left(y \frac{1-r}{1-q}\right) = C(y, b), \quad (7)$$

где $C(y, b)$ — константа, зависящая только от y и b и не зависящая от r и q .

З а м е ч а н и е 2. При $b < V(y)$ множество соответствующих r и q будет пустым.

Сделаем замену переменных. Для z_1 и z_2 таких, что $0 < z_1 < y < z_2 < d$, положим

$$r = \frac{z_1}{y} \frac{z_2 - y}{z_2 - z_1}, \quad q = \frac{z_2 - y}{z_2 - z_1}. \quad (8)$$

Легко видеть, что $r, q \in (0, 1)$ и

$$v_{r(z_1, z_2), q(z_1, z_2)}(y) = \frac{z_2 - y}{z_2 - z_1} V(z_1) + \frac{y - z_1}{z_2 - z_1} V(z_2).$$

Последнее в свою очередь означает, что условие (6) эквивалентно принадлежности точек $(z_1, V(z_1))$, (y, b) и $(z_2, V(z_2))$ одной прямой, что можно выразить формулой

$$\frac{V(z_2) - V(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{V(z_2) - b}{z_2 - y} \quad (9)$$

или

$$b = b(y, z_1, z_2) = \frac{z_2 - y}{z_2 - z_1} V(z_1) + \frac{y - z_1}{z_2 - z_1} V(z_2). \quad (10)$$

В новых переменных условие (7) примет вид

$$r(z_1, z_2)V'(z_1) + (1 - r(z_1, z_2))V'(z_2) = C(y, b(y, z_1, z_2)) \quad (11)$$

для любых $0 < z_1 < y < z_2 < d$ таких, что $z_1, z_2 \in D(V)$.

Далее отдельно будут рассмотрены случай конечного $V(0) = \lim_{y \downarrow 0} V(y)$ и случай обращения $V(0)$ в бесконечность.

Предположим, что $V(0) = +\infty$.

Из наглядных соображений понятно, что при фиксированных $y \in (0, d)$, $b > V(y)$ и достаточно малых z_1 соотношение (9) задает неявную функцию $z_2 = z_2(z_1)$.

Поскольку множество $(\text{dom } V) \setminus D(V)$ не более чем счетно, можно устремить z_1 к нулю таким образом, что z_1 и $z_2(z_1)$ будут принадлежать $D(V)$. В дальнейшем все пределы без явного на то указания будут браться именно по этому множеству. Тогда

$$z_2(z_1) \downarrow y, \quad V'(z_2(z_1)) \rightarrow V'_+(y), \quad r(z_1, z_2(z_1)) \rightarrow 0, \quad (12)$$

где V'_+ обозначает правую производную функции V .

Для эквивалентных функций f и g будем использовать символ $\sim$:

$$f \sim g, \quad \text{если} \quad \lim_{z \downarrow 0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1.$$

Тогда с учетом (8) и (9)

$$\begin{aligned} r(z_1, z_2)V'(z_1) &= \frac{z_1}{y} \frac{z_2 - y}{z_2 - z_1} V'(z_1) \sim \frac{z_1}{y^2} (z_2 - y) V'(z_1) \\ &= \frac{z_1}{y^2} \frac{V(z_2) - b}{V(z_1) - b} (z_1 - y) V'(z_1) \sim \frac{b - V(y)}{y} \frac{z_1 V'(z_1)}{V(z_1)}, \end{aligned}$$

поэтому из (11) получаем

$$C(y, b) = V'_+(y) + \frac{b - V(y)}{y} \lim_{z_1 \rightarrow 0} \frac{z_1 V'(z_1)}{V(z_1)}. \quad (13)$$

Поскольку константа $C(y, b)$ конечна, то существует конечный предел

$$\theta := \lim_{z_1 \rightarrow 0} \frac{z_1 V'(z_1)}{V(z_1)},$$

который зависит только от вида самой функции V .

Варьируя таким образом y , из (11) и (13) получаем, что

$$r(z_1, z_2, y)V'(z_1) + (1 - r(z_1, z_2, y))V'(z_2) = V'_+(y) + \theta \frac{b(z_1, z_2, y) - V(y)}{y} \quad (14)$$

для любых $0 < z_1 < y < z_2 < d$, где функция $r(z_1, z_2, y)$ задана соотношением (8), а $b(z_1, z_2, y)$ — соотношением (10).

Отсюда сразу следует, что правая производная V'_+ непрерывна, т.е. сама функция V непрерывно-дифференцируема на $(0, d)$. Отсюда в свою очередь следует непрерывная дифференцируемость $V'_+ = V'$, поэтому выражение (14) можно продифференцировать по y . Так как

$$r'_y = \frac{-z_1 z_2}{y^2(z_2 - z_1)},$$

то

$$\begin{aligned} \frac{-z_1 z_2}{z_2 - z_1} (V'(z_1) - V'(z_2)) &= y^2 V''(y) + \theta y b'(z_1, z_2, y) \\ &\quad - \theta y V'(z_1, z_2, y) - \theta b(z_1, z_2, y) + \theta V(y). \end{aligned}$$

Из этого соотношения, в частности, следует, что вторая производная V'' непрерывно дифференцируема, поэтому повторное дифференцирование по y приводит к $2yV''' + y^2V'''' - \theta yV''' = 0$.

Обозначив $f := V''$, получим стандартное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $yf' = (\theta - 2)f$. Поскольку V строго выпукла, то $f > 0$ и решение будет иметь вид $f(y) = C_1 y^{\theta-2}$ с произвольной положительной константой C_1 .

Сама функция V , таким образом, будет выглядеть следующим образом:

- 1) при $\theta \neq 1, \theta \neq 0$: $V(y) = \frac{C_1}{\theta(\theta-1)} y^\theta + C_2 y + C_3$ (представление 1 из предложения 2),
- 2) при $\theta = 1$: $V(y) = C_1 y(\ln y - 1) + C_2 y + C_3$ (представление 2 из предложения 2),
- 3) при $\theta = 0$: $V(y) = -C_1 \ln y + C_2 y + C_3$ (представление 3 из предложения 2),

где константы $C_1 > 0$, $C_2 \in \mathbf{R}$, $C_3 \in \mathbf{R}$. В действительности в силу предположения о бесконечности $V(0)$ первый случай при $\gamma > 0$ и второй здесь невозможны.

Рассмотрим теперь случай конечного значения $V(0)$.

Неявная функция $z_2 = z_2(z_1)$, задаваемая соотношением (9), будет определена только при таких $y \in (0, d)$, для которых $V(y) < b < V(0) + y(V(d) - V(0))/d$ (где при $d = +\infty$ имеется в виду соответствующий предел). Если b определяется соотношением (10), то это условие, очевидно, выполнено.

При стремлении z_1 к нулю (так, что $z_1, z_2(z_1) \in D(V)$) точка $z_2(z_1)$ будет стремиться к некоторому конечному пределу $s = s(y, b) > y$, и вместо (12) будем иметь следующее:

$$\begin{aligned} z_2(z_1) \downarrow s, \quad V'(z_2(z_1)) &\rightarrow V'_+(s), \quad r(z_1, z_2(z_1)) \rightarrow 0, \\ r(z_1, z_2(z_1))V'(z_1) &= \frac{z_1}{y} \frac{z_2 - y}{z_2 - z_1} V'(z_1) \sim z_1 V'(z_1) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{s} \right). \end{aligned}$$

Из (11) теперь следует равенство

$$C(y, b) = V'_+(s) + \theta \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{s} \right),$$

где $\theta := \lim_{z_1 \rightarrow 0} z_1 V'(z_1)$, как и прежде, есть некоторая константа, зависящая только от вида самой функции V .

Зафиксируем z_1 и z_2 , а в качестве независимой переменной будем рассматривать $s \in (z_1, z_2)$. Тогда (14) превратится в

$$r(s)V'(z_1) + (1 - r(s))V'(z_2) = V'_+(s) + \theta \left(\frac{1}{y(s)} - \frac{1}{s} \right), \quad (15)$$

а точка (y, b) будет определяться как пересечение отрезков $[(z_1, V(z_1)), (z_2, V(z_2))]$ и $[(0, V(0)), (s, V(s))]$, т.е. к условию (10) добавится

$$\frac{b(s) - V(0)}{y(s)} = \frac{V(s) - V(0)}{s}. \quad (16)$$

Решая эту линейную систему из двух уравнений и обозначая $k := k(z_1, z_2) := (V(z_2) - V(z_1))/(z_2 - z_1)$, находим, что

$$y(s) = \frac{z_1 z_2}{z_2 - z_1} \left(\frac{V(0) - V(z_2)}{z_2} - \frac{V(0) - V(z_1)}{z_1} \right) \frac{s}{V(s) - V(0) - ks}, \quad (17)$$

где не равенство знаменателя $V(s) - V(0) - ks$ нулю следует из строгой выпуклости V . Отсюда также видно, что функция $y(s)$ непрерывна по s .

Поскольку все члены в (15), кроме, быть может, $V'_+(s)$, непрерывны по s , то и сама V непрерывно дифференцируема. Применительно к (17) это дает непрерывную дифференцируемость $y(s)$, а из (15) теперь следует непрерывная дифференцируемость V' .

Так как

$$y'(s) = \frac{z_1 z_2}{z_2 - z_1} \left(\frac{V(0) - V(z_2)}{z_2} - \frac{V(0) - V(z_1)}{z_1} \right) \frac{V(s) - V(0) - sV'(s)}{(V(s) - V(0) - ks)^2},$$

то в силу строгой выпуклости V выполнено $y'(s) \neq 0$ для любого $s \in (z_1, z_2)$ и

$$\frac{y(s)}{y'(s)} = s \frac{V(s) - V(0) - ks}{V(s) - V(0) - sV'(s)}.$$

Продифференцировав (15) по s и домножив на y^2/y' , получим

$$\frac{z_1 z_2}{z_2 - z_1} (V'(z_2) - V'(z_1)) = y(s) \frac{y(s)}{y'(s)} \left(V''(s) + \frac{\theta}{s^2} \right) - \theta.$$

Повторное дифференцирование по s дает

$$y'(s) \frac{y(s)}{y'(s)} \left(V''(s) + \frac{\theta}{s^2} \right) + y(s) \left(\frac{y(s)}{y'(s)} \left(V''(s) + \frac{\theta}{s^2} \right) \right)' = 0,$$

т.е.

$$V''(s) + \frac{\theta}{s^2} + \left(\frac{y(s)}{y'(s)} \left(V''(s) + \frac{\theta}{s^2} \right) \right)' = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим вспомогательные функции $W(s) := V(s) - V(0) - ks$ и $f(s) := W(s) - sW'(s) = V(s) - V(0) - sV'(s)$. Поскольку

$$\frac{y}{y'} = \frac{sW}{W - sW'} = \frac{sW}{f} \quad \text{и} \quad W'' + \frac{\theta}{s^2} = \frac{\theta - sf'}{s^2},$$

выражение (18) принимает вид

$$\frac{\theta - sf'}{s^2} + \left(\frac{(\theta - sf')W}{sf} \right)' = 0.$$

Раскрывая производную, получаем

$$\frac{\theta - sf'}{s^2} + \left(\frac{W'}{sf} - \frac{W}{s^2 f} - \frac{f'W}{sf^2} \right) (\theta - sf') + \frac{W}{sf} (-f' - sf'') = 0,$$

что после упрощения дает

$$(\theta - sf') \frac{f'W}{sf^2} + \frac{(f' + sf'')W}{sf} = 0$$

или, после умножения на sf^2/W , $-s(f')^2 + ff' + sff'' = -\theta f'$, что в свою очередь равносильно равенству $(sf'/f)' = -\theta(1/f)'$.

Итак,

$$sf' = -\theta + C_1 f, \quad (19)$$

где C_1 — произвольная константа.

Поскольку существует конечный предел $\theta = \lim_{z_1 \rightarrow 0} z_1 V'(z_1)$ и $V(0)$ конечно, то существует конечный предел $\lim_{s \downarrow 0} f(s) = -\theta$. Если $C_1 = 0$, то $f(s) = -\theta \ln s + C_2$, поэтому единственно возможным решением здесь может быть $f(s) = C_2$ при $\theta = 0$. Удовлетворяет же уравнению $V - V(0) - sV' = C_2$ может только линейная функция.

Если $C_1 \neq 0$, то применяя к (19) стандартные приемы решения дифференциальных уравнений, получаем $f(s) = \theta/C_1 + C_2 s^{C_1}$ с некоторой константой C_2 . Случай $C_2 = 0$ приводит к линейному виду V . В противном случае, так как предел $\lim_{s \downarrow 0} f(s)$ конечен и равен $-\theta$, необходимым образом $C_1 > 0$ и $\theta = 0$.

Итак, на функцию V мы имеем линейное неоднородное уравнение первого порядка $sV' - V = -V(0) - C_2 s^{C_1}$, решая которое, несложно получить либо представление 1) с $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$, либо представление 2).

Итак, мы доказали, что для того, чтобы функция v была строго выпуклой при любых параметрах модели, функция V должна удовлетворять одному из представлений 1)–3) на эффективной области $(0, d)$, $0 < d \leq +\infty$. Заметим, что для любого из этих представлений $V(y) < +\infty$ при всех $y > 0$, поэтому для завершения доказательства достаточно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 5. Если $0 < d < +\infty$ и $V(d) < +\infty$, то найдутся такие значения $r_1, r_2, q_1, q_2 \in (0, 1)$, для которых целевая функция v не будет строго выпуклой на $\text{dom } v$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $d = 1$, поскольку при необходимости можно рассмотреть функцию $V(y/d)$.

Зададим значения y_1, y_2, y_3, y_4 в соответствии со следующей схемой:

1) $0 < y_1 < y_2 < d = 1$;

2) $y_3 \in (y_1, y_2)$;

поскольку функция V строго выпукла, абсцисса z пересечения отрезков $[(y_1, V(y_1)), (y_2, V(y_2))]$ и $[(y_3, V(y_3)), (d, V(d))]$ будет лежать внутри интервала (y_3, y_2) ;

3) $y_4 \in (y_3, z)$.

Определим теперь модель финансового рынка следующими параметрами q_1, q_2, r_1, r_2 :

$$q_1 := \frac{1 - y_4}{1 - y_3} \in (0, 1), \quad q_2 := \frac{y_2 - y_4}{y_2 - y_1} \in (0, 1), \quad r_1 := \frac{y_3}{y_4} q_1 \in (0, q_1), \quad r_2 := \frac{y_1}{y_4} q_2 \in (0, q_2),$$

так что

$$\frac{1 - q_1}{1 - r_1} = y_4, \quad \frac{1 - q_2}{1 - r_2} = \frac{y_4}{y_2} > y_4.$$

Но для целевых функций $v_1 = v_{r_1 q_1}$ и $v_2 = v_{r_2 q_2}$ из (5) мы имеем $\text{int dom } v_1 = (0, y_4)$ и $\text{int dom } v_2 = (0, y_4/y_2)$, а значит, $\text{int dom } v_1 \subset \text{int dom } v_2$. Кроме того, $v_1(y_4) < v_2(y_4)$ в силу выбора y_4 . Отсюда несложно понять, что функция $\hat{v} = v$ не будет строго выпуклой. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2 закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kramkov D., Schachermayer W. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. — Ann. Appl. Probab., 1999, v. 9, №3, p. 904–950.

2. Kramkov D., Schachermayer W. Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. — Ann. Appl. Probab., 2003, v. 13, № 4, p. 1504–1516.
3. Schachermayer W. Optimal investment in incomplete markets when wealth may become negative. — Ann. Appl. Probab., 2001, v. 11, № 3, p. 694–734.
4. Schied A., Wu C.-T. Duality theory for optimal investments under model uncertainty. — Statist. Decisions, 2005, v. 23, № 3, p. 199–217.
5. Burgert C., Rüschendorf L. Optimal consumption strategies under model uncertainty. — Statist. Decisions, 2005, v. 23, № 1, p. 1–14.
6. Gundel A. Robust utility maximization for complete and incomplete market models. — Finance Stoch., 2005, v. 9, № 2, p. 151–176.
7. Föllmer H., Gundel A. Robust projections in the class of martingale measures. — Illinois J. Math., 2006, v. 50, № 2, p. 439–472.
8. Гуцин А. А. Двойственная характеристика цены в задаче максимизации робастной полезности. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 4, с. 680–704.
9. Морозов И. С. Расширение класса допустимых стратегий в задаче максимизации робастной полезности с конечной на $\mathbf{R}$ функцией полезности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 5, с. 617–635.
10. Schied A. Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences: a duality approach. — Finance Stoch., 2007, v. 11, № 1, p. 107–129.
11. Гуцин А. А. О расширении понятия f -дивергенции. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 468–489.

Поступила в редакцию
5.III.2011

© 2011 г.

СЕНАТОВ В. В.*

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ¹⁾

Получено асимптотическое разложение, из которого следуют неравномерные оценки как для центральной предельной теоремы, так и для одного из известных асимптотических разложений.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, асимптотические разложения, точность аппроксимации, многочлены Чебышева–Эрмита.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным моментом $\beta_4 = \mathbf{E}|X_1|^4$. Предположим, что характеристическая функция f распределения P этих случайных величин такова, что для некоторого числа $\nu > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt < \infty. \quad (1)$$

При выполнении этого условия у распределения нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ для $n \geq \nu$ существует непрерывная ограниченная плотность p_n , которую

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: v.senatov@yandex.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 09-01-12170фи.м).