Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Сенатов, Об одном асимптотическом разложении в центральной предельной теореме, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 2, 384–391

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4382>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:39:23

2. Kramkov D., Schachermayer W. Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. — Ann. Appl. Probab., 2003, v. 13, № 4, p. 1504–1516.
3. Schachermayer W. Optimal investment in incomplete markets when wealth may become negative. — Ann. Appl. Probab., 2001, v. 11, № 3, p. 694–734.
4. Schied A., Wu C.-T. Duality theory for optimal investments under model uncertainty. — Statist. Decisions, 2005, v. 23, № 3, p. 199–217.
5. Burgert C., Rüschendorf L. Optimal consumption strategies under model uncertainty. — Statist. Decisions, 2005, v. 23, № 1, p. 1–14.
6. Gundel A. Robust utility maximization for complete and incomplete market models. — Finance Stoch., 2005, v. 9, № 2, p. 151–176.
7. Föllmer H., Gundel A. Robust projections in the class of martingale measures. — Illinois J. Math., 2006, v. 50, № 2, p. 439–472.
8. Гуцин А. А. Двойственная характеристика цены в задаче максимизации робастной полезности. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 4, с. 680–704.
9. Морозов И. С. Расширение класса допустимых стратегий в задаче максимизации робастной полезности с конечной на $\mathbf{R}$ функцией полезности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 5, с. 617–635.
10. Schied A. Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences: a duality approach. — Finance Stoch., 2007, v. 11, № 1, p. 107–129.
11. Гуцин А. А. О расширении понятия f -дивергенции. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 468–489.

Поступила в редакцию
5.III.2011

© 2011 г.

СЕНАТОВ В. В.*

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ¹⁾

Получено асимптотическое разложение, из которого следуют неравномерные оценки как для центральной предельной теоремы, так и для одного из известных асимптотических разложений.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, асимптотические разложения, точность аппроксимации, многочлены Чебышева–Эрмита.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным моментом $\beta_4 = \mathbf{E}|X_1|^4$. Предположим, что характеристическая функция f распределения P этих случайных величин такова, что для некоторого числа $\nu > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt < \infty. \quad (1)$$

При выполнении этого условия у распределения нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ для $n \geq \nu$ существует непрерывная ограниченная плотность p_n , которую

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: v.senatov@yandex.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 09-01-12170фи.м).

можно вычислять по формуле обращения

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Кроме того, из выполнения условия (1) следует, что $f(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$ и величина $\alpha(T) = \max\{|f(t)|: |t| \geq T\}$ строго меньше единицы для любого $T > 0$.

Нам понадобится пара (μ, T) , где функция $\mu(t)$, $e^{-t^2/2} \leq \mu(t) \leq 1$, и число $T > 0$ таковы, что

$$|f(t)| \leq \mu(t) \quad \text{при всех } |t| \leq T. \quad (2)$$

С помощью этой пары определим числа

$$B_{k,n-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^{n-j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt,$$

$k > 0$, $n \geq 3$, $0 \leq j \leq n-2$. (Строго говоря, при определении $B_{k,n-j}$ надо было бы использовать третий индекс, скажем n или j , но мы этого делать не будем.) Для распределения P с конечным четвертым моментом пару (μ, T) можно подобрать так, что

$$B_{k,n-j} \rightarrow B_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \varphi(x) dx$$

при $n \rightarrow \infty$ для любых фиксированных k и j , где φ — плотность стандартного нормального закона.

Основная цель этой работы — получить следующее утверждение, которое мы прокомментируем после его доказательства.

Теорема. При $n \geq \nu + 2$ для всех действительных x

$$x^2(p_n(x) - \varphi(x)) = \frac{\alpha_3}{3! \sqrt{n}} x^2 H_3(x) \varphi(x) + \frac{1}{2n} \left(\frac{\alpha_3}{3!}\right)^2 x^2 H_6(x) \varphi(x) + R,$$

где $\alpha_3 = \mathbf{E} X_1^3$ — третий момент распределения P , а

$$\begin{aligned} |R| \leq & \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_4}{n} + \frac{9}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{n}{n-2}\right)^{3/2} \frac{1}{n-2} + \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{B_{4,n-2} + B_{6,n-3}}{n} \\ & + \frac{3}{\pi} \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + \frac{|\alpha_3|}{12} \frac{B_{5,n-2} + B_{7,n-3}}{n^{3/2}} + \frac{4}{3\pi} \frac{|\alpha_3| \beta_4}{n^{3/2}} + \frac{304}{27\pi} \frac{|\alpha_3|^3}{n^{3/2}} \\ & + \frac{5}{12\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_4^2}{n^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!}\right)^2 \frac{B_{6,n-1} + B_{8,n-2}}{n^2} \\ & + \frac{n^{3/2}}{\pi} \left(\alpha^{n-\nu-2}(T) \int_T^\infty |f(t)|^\nu dt + \frac{1}{T(n-2)} e^{-T^2(n-2)/2} \right), \end{aligned}$$

величина $T > 0$ — та же, что в (2).

Здесь и далее мы обозначаем $H_k(x) = (-1)^k \varphi^{(k)}(x)/\varphi(x)$, $k = 0, 1, \dots$, многочлены Чебышёва–Эрмита. Явный вид тех многочленов Чебышёва–Эрмита, которые нам понадобятся, указан к концу доказательства теоремы.

Доказательство. Разность $p_n(x) - \varphi(x)$ для $n \geq \nu$ можно записать в виде

$$p_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right) dt.$$

Умножив это равенство на $(-ix)$ и проинтегрировав по частям, мы видим, что

$$\begin{aligned} ix(p_n(x) - \varphi(x)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left(f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-t^2/2} \right)' dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left(n f^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + t e^{-t^2/2} \right) dt. \end{aligned}$$

Существование производных функций f вплоть до четвертого порядка гарантируется условием $\beta_4 < \infty$. Действуя аналогично, мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} -x^2(p_n(x) - \varphi(x)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left((n-1) f^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left(f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + f^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) f'' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - (t^2 - 1) e^{-t^2/2} \right) dt. \end{aligned}$$

При доказательстве этого равенства следует учесть, что $f^{n-1}(t/\sqrt{n})f'(t/\sqrt{n}) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$, поскольку $|f'(t/\sqrt{n})| \leq \mathbf{E}|X_1| \leq 1$ при всех действительных t .

Запишем правую часть последнего равенства в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left((n-1) g^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left(f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^2 - t^2 e^{-t^2/2} \right) dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left(g^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) f'' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) + e^{-t^2/2} \right) dt + R, \end{aligned} \quad (3)$$

где $g(t) = e^{-t^2/2} e^{\alpha_3(it)^3/3!}$ и

$$\begin{aligned} |R| &\leq \frac{n-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| \left| f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right|^2 dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| \left| f'' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt. \end{aligned}$$

Так как $|f'(t/\sqrt{n})| \leq 1$ и $|f''(t/\sqrt{n})| \leq 1$ при всех действительных t , то

$$\begin{aligned} |R| &\leq \frac{n-1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} \left| f^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| \left| f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right|^2 dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} \left| f^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt \\ &+ \frac{n}{\pi} \left(\int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \left| f^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt + \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \left| g^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где величина T — та же, что в (2). Очевидно, что последнее слагаемое не превосходит

$$\begin{aligned} &\frac{n}{\pi} \left(\sqrt{n} \alpha^{n-2-\nu}(T) \int_T^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt + \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} e^{-(n-2)t^2/(2n)} dt \right) \\ &\leq \frac{n^{3/2}}{\pi} \left(\alpha^{n-2-\nu}(T) \int_T^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt + \frac{1}{T(n-2)} e^{-T^2(n-2)/2} \right). \end{aligned}$$

Правая часть этого неравенства при росте n убывает экспоненциально быстро.

Для оценки двух первых слагаемых в правой части (4) воспользуемся хорошо известным равенством

$$a^n - b^n = \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j-1} b^j (a - b),$$

справедливым для любых натуральных n и комплексных a и b . С помощью этого равенства мы можем второе слагаемое в правой части (4) оценить величиной

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} \left| f^{n-j-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) g^j \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| \left| f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt \\ & \leq \frac{n-1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} \mu^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left| f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt. \end{aligned}$$

Известно, что при всех действительных t

$$\left| f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| \leq \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 + \frac{|\alpha_3|}{12} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^5 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^6 e^{-t^2/(2n)},$$

это неравенство неоднократно используется в [1, гл. 4]. Поэтому второе слагаемое в правой части (4) не превосходит

$$\frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{B_{4,n-2}}{n} + \frac{|\alpha_3|}{12} \frac{B_{5,n-2}}{n^{3/2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n-1}}{n^2}.$$

С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме легко проверить, что $|f'(t/\sqrt{n})| \leq |t/\sqrt{n}|$ при всех действительных t . Поэтому первое слагаемое в правой части (4) не превосходит

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} t^2 \left| f^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt \\ & \leq \frac{n-2}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} t^2 \mu^{n-3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left| f \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt \\ & \leq \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{B_{6,n-3}}{n} + \frac{|\alpha_3|}{12} \frac{B_{7,n-3}}{n^{3/2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 \frac{B_{8,n-2}}{n^2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что первое слагаемое в (3) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left(ng^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left(f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^2 - t^2 e^{-t^2/2} \right) dt + R, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} |R| & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g^{n-2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \left| f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right|^2 \right| (n-1) - ng^2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-(n-2)t^2/(2n)} \left(\left| g^2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right| + \frac{1}{n} \right) dt. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} g^2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - 1 & = e^{-t^2/n} \exp \left\{ \frac{\alpha_3}{3} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^3 \right\} - 1 = e^{-t^2/n} \left(1 + \gamma \frac{\alpha_3}{3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \right) - 1 \\ & = e^{-t^2/n} - 1 + \gamma \frac{\alpha_3}{3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 e^{-t^2/n}. \end{aligned}$$

Здесь и далее γ обозначает непрерывные комплекснозначные функции такие, что $|\gamma| \leq 1$. Эти функции в разных местах, вообще говоря, различны.

Теперь нетрудно проверить, что модуль последней величины R не превосходит

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-(n-2)t^2/(2n)} \left(\frac{1}{n} + \frac{t^2}{n} + e^{-t^2/n} \frac{|\alpha_3|}{3} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 \right) dt \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{3/2} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n-2} \right) + \frac{|\alpha_3|}{3} \frac{B_5}{n^{3/2}} \\ & \leq \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{3/2} \frac{1}{n-2} + \frac{|\alpha_3|}{3} \frac{B_5}{n^{3/2}}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в (3) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left(g^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) f'' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) + e^{-t^2/2} \right) dt + R, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} |R| & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(n-1)t^2/(2n)} \left| f'' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| \left| 1 - g \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| dt \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(n-1)t^2/(2n)} \left(\frac{t^2}{2n} + e^{-t^2/(2n)} \frac{|\alpha_3|}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 \right) dt \\ & = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}n} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{3/2} + \frac{|\alpha_3|}{3!} \frac{B_3}{n^{3/2}}. \end{aligned}$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме,

$$\begin{aligned} f' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) & = f'(0) + f''(0) \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} f'''(0) \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 + \frac{\gamma}{3!} \beta_4 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \\ & = -\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{i\alpha_3}{2} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^2 + \frac{\gamma}{3!} \beta_4 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \end{aligned}$$

и

$$f'' \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = f''(0) + f'''(0) \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{\gamma}{2} \beta_4 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 = -1 - \alpha_3 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) + \frac{\gamma}{2} \beta_4 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2.$$

Поэтому первое слагаемое в (5) равно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left(n e^{-t^2/2} \exp \left\{ \frac{\alpha_3}{3!} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} \right\} \left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 - \left(\frac{\alpha_3}{2} \right)^2 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^4 \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - \alpha_3 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^3 \right) - t^2 e^{-t^2/2} \right) dt + R, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} |R| & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n e^{-t^2/2} \left(\left(\frac{\beta_4}{3!} \right)^2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^6 + \frac{\beta_4}{3} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 + \frac{|\alpha_3| \beta_4}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^5 \right) dt \\ & \leq \left(\frac{\beta_4}{3!} \right)^2 \frac{B_6}{n^2} + \frac{\beta_4}{3} \frac{B_4}{n} + \frac{|\alpha_3| \beta_4}{3!} \frac{B_5}{n^{3/2}}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в (7) равно сумме трех величин

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} \left(n \exp \left\{ \frac{\alpha_3}{3!} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} \right\} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - t^2 \right)^2 dt, \quad (8)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} n \exp \left\{ \frac{\alpha_3}{3!} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} \right\} \left(\frac{\alpha_3}{2} \right)^2 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^4 dt, \quad (9)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} n \exp \left\{ \frac{\alpha_3}{3!} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} \right\} \alpha_3 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^3 dt. \quad (10)$$

Эти величины суть

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} t^2 \left(\frac{\alpha_3}{3!} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 \frac{(it)^6}{n} + \frac{\gamma}{3!} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^3 \frac{t^9}{n^{3/2}} \right) dt, \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} \left(1 + \gamma \frac{\alpha_3}{3!} \frac{t^3}{\sqrt{n}} \right) \left(\frac{\alpha_3}{2} \right)^2 \frac{(it)^4}{n} dt, \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} \left(1 + \frac{\alpha_3}{3!} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 \frac{t^6}{n} \right) \alpha_3 \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} dt. \end{aligned}$$

Так как для любого натурального k справедлива формула обращения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} (it)^k dt = H_k(x) \varphi(x),$$

то первое слагаемое в (7) равно

$$\begin{aligned} & - \frac{\alpha_3}{3! \sqrt{n}} H_5(x) \varphi(x) - \frac{1}{2n} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 H_8(x) \varphi(x) \\ & - \left(\frac{\alpha_3}{2} \right)^2 \frac{1}{n} H_4(x) \varphi(x) - \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) - \alpha_3 \frac{\alpha_3}{3! n} H_6(x) \varphi(x) + R, \end{aligned}$$

где

$$|R| \leq \frac{1}{3!} \left| \frac{\alpha_3}{3!} \right|^3 \frac{B_{11}}{n^{3/2}} + \frac{1}{3} \left| \frac{\alpha_3}{2} \right|^3 \frac{B_7}{n^{3/2}} + \frac{|\alpha_3|}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 \frac{B_9}{n^{3/2}}.$$

Первое слагаемое в (6) равно

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} \left(\exp \left\{ \frac{\alpha_3}{3!} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} \right\} \left(-1 - \alpha_3 \frac{it}{\sqrt{n}} \right) + 1 \right) dt + R, \quad (11)$$

где

$$|R| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \frac{\beta_4}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 dt = \frac{\beta_4}{2\sqrt{2\pi} n}.$$

Первое слагаемое в (11) равно

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \frac{(it)^3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 \frac{(it)^6}{n} + \frac{\gamma}{3!} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^3 \frac{t^9}{n^{3/2}} \right. \\ & \quad \left. + \alpha_3 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) + \alpha_3 \frac{\alpha_3}{3!} \frac{(it)^4}{n} + \frac{\gamma}{2} \alpha_3 \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 \frac{t^7}{n^{3/2}} \right) dt \\ & = - \frac{\alpha_3}{3! \sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) - \frac{1}{2n} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 H_6(x) \varphi(x) - \frac{\alpha_3}{\sqrt{n}} H_1(x) \varphi(x) - \frac{\alpha_3^2}{3! n} H_4(x) \varphi(x) + R, \end{aligned}$$

где

$$|R| \leq \frac{1}{3!} \left| \frac{\alpha_3}{3!} \right|^3 \frac{B_9}{n^{3/2}} + \frac{|\alpha_3|}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 \frac{B_7}{n^{3/2}}.$$

Собирая вместе величины, содержащие многочлены Чебышёва–Эрмита, мы видим, что их сумма равна

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha_3}{3! \sqrt{n}} (H_5(x) + 6H_3(x) + H_3(x) + 6H_1(x))\varphi(x) \\ & -\frac{1}{2n} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 (H_8(x) + 18H_4(x) + 12H_6(x) + H_6(x) + 12H_4(x))\varphi(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Используя равенства

$$\begin{aligned} H_1(x) &= x, & H_3(x) &= x^3 - 3x, & H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3, & H_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x, \\ H_6(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15, & H_8(x) &= x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105, \end{aligned}$$

нетрудно проверить, что сумма (12) с точностью до знака совпадает с главной частью

$$\frac{\alpha_3}{3! \sqrt{n}} x^2 H_3(x) \varphi(x) + \frac{1}{2n} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 x^2 H_6(x) \varphi(x)$$

разложения величины $x^2(p_n(x) - \varphi(x))$, указанной в формулировке теоремы. Собирая вместе неравенства, полученные по ходу построения асимптотического разложения, и используя равенства $B_{k+2} = (k+1)B_k$, $k = 0, 1, \dots$, $B_3 = 2/\pi$ и $B_2 = 1/\sqrt{2\pi}$, нетрудно убедиться в справедливости оценки теоремы для остаточной части разложения.

В работе [1] при тех же условия, что использовались в доказанной теореме, было получено следующее асимптотическое разложение с равномерной оценкой остаточной части (теорема 1 §9 из главы 4):

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\alpha_3}{3! \sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + \frac{1}{2n} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 H_6(x) \varphi(x) + R, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} |R| & \leq \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{B_{4,n-1}}{n} + \frac{|\alpha_3|}{12} \frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{1}{3!} \left| \frac{\alpha_3}{3!} \right|^3 \frac{B_9}{n^{3/2}} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^\infty |f(t)|^\nu dt + \frac{1}{\pi T \sqrt{n}} e^{-T^2 n/2}. \end{aligned}$$

Это разложение относится к так называемым уточненным разложениям Эджворта–Крамера. Равенство (13) в какой-то мере позволяет судить о естественности разложения функции $x^2(p_n(x) - \varphi(x))$, полученного выше. Ясно, что утверждение доказанной нами теоремы дает для $x \neq 0$ неравномерную оценку разности

$$p_n(x) - \left\{ \varphi(x) + \frac{\alpha_3}{3! \sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + \frac{1}{2n} \left(\frac{\alpha_3}{3!} \right)^2 H_6(x) \varphi(x) \right\}$$

— ее абсолютная величина не превосходит оценки модуля величины R , приведенной в формулировке теоремы, деленной на x^2 . Степень 2 при x не является оптимальной, при конечности величины β_4 справедлив аналог полученного разложения, в котором множитель x^2 при $p_n(x) - \varphi(x)$ заменяется на x^4 , но оценка остаточной части разложения становится значительно более громоздкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сенатов В.В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом «Либроком», 2009, 352 с.

Поступила в редакцию
12.IX.2008

© 2011 г.

СИНЕЛЬНИКОВ С.С.*

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СНОСОМ

Для броуновского движения с отрицательным сносом на интервале $[0, \infty)$ рассматриваются задачи об оптимальной остановке, связанные с «наилучшим» оцениванием двух непредсказуемых моментов: момента, при котором достигается максимальное значение, и момента достижения последнего нуля процесса.

Ключевые слова и фразы: непредсказуемый момент, скорейшее обнаружение, броуновское движение со сносом.

1. Постановка задачи. Пусть B_t^μ , где $\mu < 0$, — стандартное броуновское движение с отрицательным сносом на бесконечном интервале, $t \in [0, \infty)$. Рассматриваются следующие непредсказуемые моменты:

$$\theta = \inf \left\{ t: B_t^\mu = \sup_{s \geq 0} B_s^\mu \right\}, \quad g = \sup \{ t: B_t^\mu = 0 \}.$$

Таким образом, θ — это момент достижения абсолютного максимума процессом B_t^μ , а g — последний момент достижения процессом значения 0. Поскольку снос μ отрицателен, то моменты θ и g являются конечными почти наверное. Нас интересует оптимальное приближение этих моментов на основе информации, доступной на текущий момент. В качестве критериев оптимальности приближения в данной работе рассматриваются два критерия: условно-экстремальный и абсолютный.

Зафиксируем $\alpha \in (0, 1)$ и определим следующие классы моментов остановки:

$$\mathcal{M}_\alpha^{B^\mu}(\theta) = \{ \tau \in \mathcal{M}^{B^\mu} : \mathbf{P}(\tau < \theta) \leq \alpha \}, \quad \mathcal{M}_\alpha^{B^\mu}(g) = \{ \tau \in \mathcal{M}^{B^\mu} : \mathbf{P}(\tau < g) \leq \alpha \},$$

где $\mathcal{M}^{B^\mu}$ — класс марковских моментов, порожденных рассматриваемым процессом. Под моментами, являющимися решением задачи при условно-экстремальном критерии, мы понимаем такие моменты $\theta^* \in \mathcal{M}_\alpha^{B^\mu}(\theta)$ и $g^* \in \mathcal{M}_\alpha^{B^\mu}(g)$, что

$$\mathbf{E}(\theta^* - \theta)^+ = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_\alpha^{B^\mu}(\theta)} \mathbf{E}(\tau - \theta)^+, \quad (1)$$

$$\mathbf{E}(g^* - g)^+ = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_\alpha^{B^\mu}(g)} \mathbf{E}(\tau - g)^+, \quad (2)$$

где $a^+ = a$, если $a \geq 0$, и $a^+ = 0$, если $a < 0$.

Под моментами, являющимися решением задачи при абсолютном критерии, мы понимаем такие моменты $\theta^* \in \mathcal{M}^{B^\mu}$ и $g^* \in \mathcal{M}^{B^\mu}$, что

$$\mathbf{E}|\theta^* - \theta| = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E}|\tau - \theta|, \quad \mathbf{E}|g^* - g| = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E}|\tau - g|.$$

* Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: sergesinelnikov@gmail.com