Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Синельников, Об оптимальной остановке броуновского движения с отрицательным сносом, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, том 56, выпуск 2, 391–398

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4383>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:15:12

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сенатов В.В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом «Либроком», 2009, 352 с.

Поступила в редакцию
12.IX.2008

© 2011 г.

СИНЕЛЬНИКОВ С.С.*

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СНОСОМ

Для броуновского движения с отрицательным сносом на интервале $[0, \infty)$ рассматриваются задачи об оптимальной остановке, связанные с «наилучшим» оцениванием двух непредсказуемых моментов: момента, при котором достигается максимальное значение, и момента достижения последнего нуля процесса.

Ключевые слова и фразы: непредсказуемый момент, скорейшее обнаружение, броуновское движение со сносом.

1. Постановка задачи. Пусть B_t^μ , где $\mu < 0$, — стандартное броуновское движение с отрицательным сносом на бесконечном интервале, $t \in [0, \infty)$. Рассматриваются следующие непредсказуемые моменты:

$$\theta = \inf \left\{ t: B_t^\mu = \sup_{s \geq 0} B_s^\mu \right\}, \quad g = \sup \{ t: B_t^\mu = 0 \}.$$

Таким образом, θ — это момент достижения абсолютного максимума процессом B_t^μ , а g — последний момент достижения процессом значения 0. Поскольку снос μ отрицателен, то моменты θ и g являются конечными почти наверное. Нас интересует оптимальное приближение этих моментов на основе информации, доступной на текущий момент. В качестве критериев оптимальности приближения в данной работе рассматриваются два критерия: условно-экстремальный и абсолютный.

Зафиксируем $\alpha \in (0, 1)$ и определим следующие классы моментов остановки:

$$\mathcal{M}_\alpha^{B^\mu}(\theta) = \{ \tau \in \mathcal{M}^{B^\mu} : \mathbf{P}(\tau < \theta) \leq \alpha \}, \quad \mathcal{M}_\alpha^{B^\mu}(g) = \{ \tau \in \mathcal{M}^{B^\mu} : \mathbf{P}(\tau < g) \leq \alpha \},$$

где $\mathcal{M}^{B^\mu}$ — класс марковских моментов, порожденных рассматриваемым процессом. Под моментами, являющимися решением задачи при условно-экстремальном критерии, мы понимаем такие моменты $\theta^* \in \mathcal{M}_\alpha^{B^\mu}(\theta)$ и $g^* \in \mathcal{M}_\alpha^{B^\mu}(g)$, что

$$\mathbf{E}(\theta^* - \theta)^+ = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_\alpha^{B^\mu}(\theta)} \mathbf{E}(\tau - \theta)^+, \quad (1)$$

$$\mathbf{E}(g^* - g)^+ = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_\alpha^{B^\mu}(g)} \mathbf{E}(\tau - g)^+, \quad (2)$$

где $a^+ = a$, если $a \geq 0$, и $a^+ = 0$, если $a < 0$.

Под моментами, являющимися решением задачи при абсолютном критерии, мы понимаем такие моменты $\theta^* \in \mathcal{M}^{B^\mu}$ и $g^* \in \mathcal{M}^{B^\mu}$, что

$$\mathbf{E}|\theta^* - \theta| = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E}|\tau - \theta|, \quad \mathbf{E}|g^* - g| = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E}|\tau - g|.$$

* Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: sergesinelnikov@gmail.com

2. Обзор известных результатов. Подобные задачи на конечном интервале $[0, 1]$ рассматривались как для обычного броуновского движения $B_t = B_t^0$, так и для броуновского движения со сносом B_t^μ . Оцениванию «без упреждения» момента θ для обычного броуновского движения посвящены работы [1]–[5].

В работе [1] в качестве критерия рассматривалась величина $\mathbf{E}(B_\theta - B_\tau)^2$. Было показано, что в этом случае оптимальный момент имеет вид $\tau^* = \inf\{t \leq 1: S_t - B_t \geq z^* \sqrt{1-t}\}$, где $S_t = \sup_{u \leq t} B_u$, а z^* — постоянная, приблизительно равная 1.12.

Эти результаты были обобщены в работе [2] на случай критерия $\mathbf{E}(B_\theta - B_\tau)^q$, $q > 1$. Для этого критерия оптимальным является момент $\tau^* = \inf\{t \leq 1: S_t - B_t \geq z^*(q) \sqrt{1-t}\}$, где $z^*(q)$ — некоторая постоянная, зависящая от параметра q и выражаемая через функции Куммера. Как видно, общий вид оптимального момента остановки не изменяется по сравнению со случаем $q = 2$.

В работе [3] было предложено измерять качество моментов τ не близостью B_τ к B_θ , а непосредственно близостью τ к θ , т.е. величиной вида $\mathbf{E}[G_1((\theta - \tau)^+) + G_2((\tau - \theta)^+)]$ с некоторыми функциями риска $G_1(t)$ и $G_2(t)$, $t \geq 0$. Одним из естественных критериев такого вида является абсолютный критерий $\mathbf{E}|\tau - \theta|$.

В работе [4] было доказано следующее соотношение. Для любого $\tau \in \mathcal{M}^B$ выполняется $\mathbf{E}|\tau - \theta| + 1/2 = \mathbf{E}(B_\tau - B_\theta)^2$. Таким образом, для абсолютного критерия $\mathbf{E}|\tau - \theta|$ оптимальный момент остановки совпадает с оптимальным моментом остановки для критерия $\mathbf{E}(B_\theta - B_\tau)^2$, т.е. $\tau^* = \inf\{t \leq 1: S_t - B_t \geq z^* \sqrt{1-t}\}$, где $z^* \approx 1.12$.

В работе [5] рассматривались условно-экстремальные критерии для моментов θ и g , т.е. критерии вида (1), (2). Следует отметить, что пространственные критерии, т.е. критерии вида $\mathbf{E}(B_g - B_\tau)^q$, не представляют интереса для момента g , поскольку в качестве ответа можно рассматривать вырожденный момент $\tau^* = 0$. Однако временные критерии, т.е. критерии вида $\mathbf{E}[G_1((g - \tau)^+) + G_2((\tau - g)^+)]$, представляют такой же интерес, как и в случае момента θ . Условно-экстремальные критерии тесно связаны с так называемым байесовским критерием, т.е. критерием вида $K(c, \theta) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} [\mathbf{P}(\tau < \theta) + c \mathbf{E}(\tau - \theta)^+]$, где c — некоторая положительная постоянная. Здесь $\mathbf{P}(\tau < \theta)$ можно трактовать как вероятность «ложной тревоги» о достижении процессом максимума, $\mathbf{E}(\tau - \theta)^+$ — как среднее время запаздывания момента τ относительно момента максимума θ . Несложно видеть, что байесовский критерий является частным случаем временного критерия, где $G_1(t) = \mathcal{I}\{t \geq 0\}$, $G_2 = ct$, а $\mathcal{I}$ — индикаторная функция. В работе [6] в общем виде было показано (см. [6, гл. IV, § 3, теорема 8]), как байесовский критерий может быть использован для получения результатов в случае условно-экстремальной постановки задачи. В работе [5] байесовский критерий был использован для решения задач (1), (2) для обычного броуновского движения на интервале $[0, 1]$. Для момента θ оптимальный момент имеет вид $\tau_\alpha^* = \inf\{t \leq 1: S_t - B_t > z_\alpha \sqrt{1-t}\}$, где z_α — некоторая постоянная, зависящая от фиксированного α . Как можно видеть, общий вид момента и в этом случае остается прежним. Для момента g оптимальный момент имеет вид $\tau_\alpha^* = \inf\{t \leq 1: |B_t| > z_\alpha \sqrt{1-t}\}$, где z_α — та же постоянная (для фиксированного α), что и в случае момента θ . Как мы видим, структура ответа в случае условно-экстремального критерия для момента g остается той же, что и для момента θ , за исключением того, что процесс $S_t - X_t$, играющий в некотором смысле роль «достаточной статистики» в задаче оптимального приближения момента θ , заменяется на процесс $|X_t|$ в задаче оптимального приближения момента g .

В работе [5] также показывается, что оптимальный момент в случае абсолютного критерия для момента g должен иметь вид, аналогичный случаю абсолютного критерия для момента θ , лишь с соответствующей заменой «достаточной статистики». Результат при использовании абсолютного критерия для момента θ был уже упомянут выше в связи с работой [4], поэтому оптимальный момент для абсолютного критерия момента g имеет вид $\tau^* = \inf\{t \leq 1: |B_t| > z^* \sqrt{1-t}\}$, причем постоянная z^* та же, что и в случае абсолютного критерия для момента θ , т.е. приблизительно равна 1.12.

Для броуновского движения со сносом на интервале $[0, 1]$ в работе [7] рассматривался критерий $\mathbf{E}(B_\theta^\mu - B_\tau^\mu)^2$. В этом случае «достаточной статистикой» также является процесс $S_t^\mu - B_t^\mu$, где $S_t^\mu = \sup_{s \leq t} B_s^\mu$. Однако, в отличие от случая $\mu = 0$, вид границ уже не определяется явно. Граница является единственным решением системы из двух уравнений Вольтерра второго рода. В случае $\mu < 0$ система из двух уравнений вырождается в одно и оптимальный момент имеет вид $\tau^* = \inf\{t \leq 1: S_t^\mu - B_t^\mu \geq b_1(t)\}$. В случае $\mu > 0$ он имеет вид $\tau^* = \inf\{t \leq 1: b_2(t) \geq S_t^\mu - B_t^\mu \geq b_1(t)\}$, т.е. имеет структуру, принципиально отличную от всех случаев, рассмотренных ранее.

Для броуновского движения со сносом на интервале $[0, 1]$ и абсолютного критерия эта задача была рассмотрена в работе [8]. В этом случае оптимальный момент остановки имеет вид $\tau^* = \inf\{t \leq 1: S_t^\mu - B_t^\mu \geq b(t)\}$, где $b(t)$ — решение некоторого уравнения Вольтерра второго рода.

Настоящая работа ставит своей целью исследовать оптимальные моменты остановки для приближения моментов θ и g для броуновского движения с отрицательным сносом на бесконечном интервале при использовании условно-экстремального и абсолютного критериев.

3. Условно-экстремальный критерий для момента θ . Пусть $S_t^\mu = \sup_{s \leq t} B_s^\mu$. Для условно-экстремального критерия и момента θ результат выглядит следующим образом.

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < 1$. Для критерия (1) оптимальным моментом остановки является момент

$$\tau_\alpha^* = \inf\{t: S_t^\mu - B_t^\mu \geq z_\alpha^*\}, \quad (3)$$

где $z_\alpha^* = \ln \alpha / (2\mu)$.

Доказательство. Рассмотрим процесс апостериорной вероятности $\pi_t = \mathbf{P}(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^{B^\mu})$:

$$\begin{aligned} \pi_t &= \mathbf{P}(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^{B^\mu}) = \mathbf{P}\left(\sup_{u \leq t} B_u^\mu \geq \sup_{u > t} B_u^\mu | \mathcal{F}_t^{B^\mu}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{u \leq t} B_u^\mu - B_t^\mu \geq \sup_{u > t} (B_u^\mu - B_t^\mu) | \mathcal{F}_t^{B^\mu}\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{u > 0} B_u^\mu \leq S_t^\mu - B_t^\mu\right). \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что $\mathbf{P}(\sup_{u > 0} B_u^\mu \leq x) = 1 - e^{2\mu x}$ для $\mu < 0$, $x > 0$ (см., например, [9, т. 2, гл. 8, § 2а, следствие 1 к лемме 1, с. 937]), мы получаем $\pi_t = 1 - e^{2\mu(S_t^\mu - B_t^\mu)}$.

Рассмотрим байесовский критерий, т.е. следующую задачу:

$$K(c, \theta) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} (\mathbf{P}(\tau < \theta) + c \mathbf{E}(\tau - \theta)^+), \quad (4)$$

где $c > 0$. Следует отметить (см., например, [5]), что условия рассматриваемого критерия выражаются в терминах процесса π_t . Точнее говоря,

$$\mathbf{P}(\tau < \theta) + c \mathbf{E}(\tau - \theta)^+ = \mathbf{E} \left[1 - \pi_\tau + c \int_0^\tau \pi_s ds \right].$$

Зафиксировав c , мы приходим к следующей задаче об оптимальной остановке:

$$V(z) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E}_z \left[e^{2\mu(S_\tau^\mu - B_\tau^\mu)} + c \int_0^\tau (1 - e^{2\mu(S_t^\mu - B_t^\mu)}) dt \right]. \quad (5)$$

Вообще говоря, в сформулированной задаче об оптимальной остановке процесс $S_t^\mu - B_t^\mu$ имеет начальную точку $z \geq 0$. Как было показано в работе [10], этого можно добиться формально, рассмотрев марковский процесс $(S_t^\mu \vee z) - B_t^\mu$, где $a \vee b = \max(a, b)$.

Согласно результатам работы [11], верно следующее равенство:

$$S^\mu - B^\mu \stackrel{d}{=} |X^\mu|,$$

где $\stackrel{d}{=}$ означает совпадение процессов по распределению, а X^μ есть так называемый «bang-bang process», являющийся решением следующего стохастического дифференциального уравнения:

$$dX_t^\mu = -\mu \operatorname{sign} X_t^\mu dt + dB_t, \quad X_0^\mu = 0.$$

Более того, в той же работе [11] было показано, что $|X^\mu|$ совпадает по распределению с отраженным броуновским движением со сносом $-\mu$. Таким образом, его инфинитезимальный оператор имеет вид

$$\mathcal{A} = -\mu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

и действует на функции $f \in \mathcal{C}_b^2[0, \infty)$ с условием нормального отражения $f'_+(0) = 0$. Здесь под $\mathcal{C}_b^2[0, \infty)$ мы понимаем ограниченные функции, непрерывные вместе со своими производными до второго порядка включительно, определенные на положительной полуоси.

Поскольку процесс $S_t^\mu - B_t^\mu$ является марковским, то оптимальный момент в задаче (5) — это момент первого попадания процесса $S_t^\mu - B_t^\mu$ в некоторое подмножество фазового пространства, называемое множеством остановки. Таким образом, заменив процесс $S_t^\mu - B_t^\mu$ на другой марковский процесс, совпадающий с ним по распределению, мы получим задачу об оптимальной остановке, имеющую то же решение:

$$V^*(z) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E}_z \left[e^{2\mu|X_\tau^\mu|} + c \int_0^\tau (1 - e^{2\mu|X_s^\mu|}) ds \right].$$

Пусть $V^*(z) = cW(z)$. Тогда мы приходим к следующей задаче об оптимальной остановке:

$$W(z) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E}_z \left[\frac{1}{c} e^{2\mu|X_\tau^\mu|} + \int_0^\tau (1 - e^{2\mu|X_s^\mu|}) ds \right]. \quad (6)$$

Как уже было отмечено, оптимальным моментом в задаче (6) будет момент выхода процесса $|X_s|$ на некоторый положительный уровень. Следуя общей теории решения подобных задач (см., например, [12]), мы рассмотрим задачу Стефана. Будем искать функцию W_* из класса $\mathcal{C}_b^2[0, \infty)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}W_*(z) &= e^{2\mu z} - 1, \quad z \in [0, z^*), \\ W_*(z^*) &= \frac{e^{2\mu z^*}}{c}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial z}(z^*) = \frac{2\mu e^{2\mu z^*}}{c}, \quad (8)$$

где z^* — неизвестная положительная граница. Условие (7) носит название условия мгновенной остановки, а условие (8) — условия гладкого склеивания. На интервале $[z^*, \infty)$ мы продолжим функцию как $W_*(z) = e^{2\mu z}/c$. Таким образом, полученная функция принадлежит классу $\mathcal{C}_b^2[0, \infty)$ всюду, кроме $z = z^*$, где она принадлежит классу $\mathcal{C}^1$.

Таким образом, мы приходим к обычному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2} W_*''(z) - \mu W_*'(z) = e^{2\mu z} - 1, \quad z \in [0, z^*),$$

с неизвестной границей z^* и условиями

$$W_*(z^*) = \frac{e^{2\mu z^*}}{c}, \quad W_*'(z^*) = \frac{2\mu e^{2\mu z^*}}{c}, \quad W_*'(0) = 0.$$

Его решением будет

$$W_*(z) = e^{2\mu z} \left(\frac{z}{\mu} - \frac{1}{\mu^2} \right) + \frac{z}{\mu} + c_2,$$

где z^* — единственный корень уравнения

$$e^{2\mu z} = \frac{1}{2\mu^2/c + 1 - 2\mu z}, \quad \text{а} \quad c_2 = e^{2\mu z^*} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\mu^2} - \frac{z^*}{\mu} \right) - \frac{z^*}{\mu}.$$

Необходимо проверить, что найденная функция $W_*(z)$ действительно является решением задачи (6). Применим для этого классический прием (см. [6, гл. IV, теорема 5 в § 3 и теорема 9 в § 4] или [12, гл. IV, разд. 8]; см. также доказательство основного результата в [1]), основанный на рассмотрении формулы Ито для процесса $W_*(Z_t)$, где $Z_t = |X_t^\mu|$, $Z_0 = z$, $z \geq 0$:

$$W_*(Z_t) = W_*(z) + \int_0^t \mathcal{A}W_*(Z_s) ds + \int_0^t W'_*(Z_s) dB_s. \quad (9)$$

Перепишем выражение (6) в виде

$$W(z) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E}_z \left[F_1(Z_\tau) + \int_0^\tau F_2(Z_s) ds \right],$$

используя для краткости обозначения $F_1(z) = e^{2\mu z}/c$ и $F_2(z) = 1 - e^{2\mu z}$. Заметим, что $F_1(z)$ и $F_2(z)$ неотрицательны при любых $z \geq 0$.

Несложно видеть, что

$$\mathcal{A}W_*(z) = \begin{cases} -F_2(z), & z \in [0, z^*), \\ 0, & z \in [z^*, \infty). \end{cases}$$

Поэтому $\mathcal{A}W_*(z) \geq -F_2(z)$ для любых $z \geq 0$. Учитывая также, что $M_t = \int_0^t W'_*(Z_s) dB_s$ — локальный мартингал, из уравнения (9) находим, что (см. следствие к теореме 5.1 в [13])

$$\mathbf{E} \int_0^\tau F_2(Z_s) ds \geq \mathbf{E} W_*(Z_0) - \mathbf{E} W_*(Z_\tau)$$

для любого конечного момента остановки τ . Воспользовавшись тем, что $W_*(Z_\tau) \leq F_1(Z_\tau)$ (поскольку $\mathcal{A}W(z) \leq 0$ для всех z), получим

$$W(z) = \inf_{\tau} \mathbf{E}_z \left[F_1(Z_\tau) + \int_0^\tau F_2(Z_s) ds \right] \geq \mathbf{E}_z W_*(Z_0) = W_*(z).$$

Теперь рассмотрим момент $\tau^* = \tau^*(c, \theta)$ выхода статистики $S_t^\mu - B_t^\mu$ за уровень $z^* = z^*(c)$. В этом случае уравнение (9) принимает вид

$$W_*(Z_{\tau^*}) = W_*(Z_0) + \int_0^{\tau^*} \mathcal{A}W_*(Z_s) ds + M_{\tau^*}.$$

Взяв математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_z$, получаем

$$\mathbf{E}_z F_1(z) + \mathbf{E}_z \int_0^{\tau^*} F_2(z) dz = \mathbf{E}_z W_*(Z_0),$$

откуда следует, что $W_*(z) = W(z)$. Таким образом, $W_*(z)$ совпадает с $W(z)$.

Итак, оптимальным моментом является момент $\tau^*(c, \theta)$ выхода статистики $S_t^\mu - B_t^\mu$ за уровень $z^*(c)$. Покажем теперь, как решение задачи (1) выражается через решение задачи (4) (подробнее об этом см. работы [6], [5]). Потребуем, чтобы вероятность «ложной тревоги» для момента $\tau^*(c, \theta)$ равнялась α :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau(c, \theta) < \theta) &= \mathbf{E}(1 - \pi_{\tau(c, \theta)}) = \mathbf{E}(1 - G(S_{\tau(c, \theta)} - X_{\tau(c, \theta)})) \\ &= \mathbf{E}(1 - G(z^*(c))) = 1 - G(z^*(c)) = \alpha. \end{aligned}$$

Подберем для заданного α такое $c > 0$, что $1 - G(z^*(c)) = \alpha$. Поскольку априори ясно, что $z^*(c)$ зависит от c непрерывно, $\lim_{c \rightarrow 0^+} z^*(c) = +\infty$ и $\lim_{c \rightarrow \infty} z^*(c) = 0^+$, то такое c

найдется. Пусть z_α^* обозначает соответствующую границу, а τ_α^* — соответствующий момент. Тогда, с одной стороны, момент τ_α^* принадлежит классу $\mathcal{M}_\alpha^{B^\mu}(\theta) = \{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu} : \mathbf{P}(\tau < \theta) \leq \alpha\}$, а с другой стороны, $\mathbf{P}(\tau < \theta) + \mathbf{E}(\tau - \theta)^+ \geq \mathbf{P}(\tau_\alpha^* < \theta) + \mathbf{E}(\tau_\alpha^* - \theta)^+$ для любого момента $\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}$. Поскольку $\mathbf{P}(\tau < \theta) \leq \alpha$, а $\mathbf{P}(\tau_\alpha^* < \theta) = \alpha$, то $\mathbf{E}(\tau - \theta)^+ \geq \mathbf{E}(\tau_\alpha^* - \theta)^+$, т.е. τ_α^* является решением критерия (1). Таким образом, оптимальный момент остановки имеет вид (3). Теорема доказана.

4. Условно-экстремальный критерий для момента g . Для условно-экстремального критерия и момента g результат выглядит следующим образом.

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha < 1$. Для критерия (2) оптимальным моментом остановки является момент $\tau_\alpha^* = \inf\{t : B_t^\mu \leq z_\alpha^*\}$, где $z_\alpha^* = -\ln \alpha / (2\mu)$.

Доказательство. Как и в предыдущем случае, рассмотрим процесс апостериорной вероятности $\pi_t = \mathbf{P}(g < t | \mathcal{F}_t^{B^\mu})$:

$$\pi_t = \mathbf{P}(g < t | \mathcal{F}_t^{B^\mu}) = \mathbf{P}\left(\sup_{s \geq t} B_s^\mu < 0 | \mathcal{F}_t^{B^\mu}\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{s \geq 0} B_s^\mu < -B_t^\mu\right).$$

Очевидно, что если $B_t^\mu > 0$, то $\pi_t = 0$. Если $B_t^\mu \leq 0$, то $\mathbf{P}(\sup_{s \geq 0} B_s^\mu < -B_t^\mu) = 1 - e^{-2\mu B_t^\mu}$. Таким образом, мы можем записать процесс π_t в виде $\pi_t = (1 - e^{-2\mu B_t^\mu}) \mathcal{I}\{B_t^\mu \leq 0\}$.

Рассмотрим байесовский критерий:

$$K(c, g) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} [\mathbf{P}(\tau < g) + c \mathbf{E}(\tau - g)^+] = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E} \left[1 - \pi_\tau + c \int_0^\tau \pi_s ds \right].$$

Подставляя выражение для π_t , получаем

$$K(c, g) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E} \left[(1 - (1 - e^{-2\mu B_\tau^\mu}) \mathcal{I}\{B_\tau^\mu \leq 0\}) + c \int_0^\tau (1 - e^{-2\mu B_s^\mu}) \mathcal{I}\{B_s^\mu \leq 0\} ds \right].$$

Зафиксируем c . Пусть

$$V(z) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E}_z \left[(1 - (1 - e^{-2\mu B_\tau^\mu}) \mathcal{I}\{B_\tau^\mu \leq 0\}) + c \int_0^\tau (1 - e^{-2\mu B_s^\mu}) \mathcal{I}\{B_s^\mu \leq 0\} ds \right].$$

Представим $V(z)$ как $V(z) = cW(z)$, где

$$W(z) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E}_z \left[\frac{1}{c} (1 - (1 - e^{-2\mu B_\tau^\mu}) \mathcal{I}\{B_\tau^\mu \leq 0\}) + \int_0^\tau (1 - e^{-2\mu B_s^\mu}) \mathcal{I}\{B_s^\mu \leq 0\} ds \right].$$

Мы получили задачу об оптимальной остановке процесса $-B_t$. Его инфинитезимальный оператор имеет вид

$$\mathcal{A} = -\mu \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Аналогично случаю момента θ , оптимальным моментом остановки в этой задаче является момент $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : -B_t = z^*\}$. Из априорных соображений ясно, что $z^* > 0$. Выпишем задачу Стефана, учитывая, что $W(z)$ в этом случае определена на интервале $(-\infty, +\infty)$, но в силу очевидных свойств функции $W(z)$, для всех $z < 0$ выполняется равенство $W(z) = W(0)$. Тогда задача Стефана будет заключаться в том, чтобы найти функцию W_* из класса $\mathcal{C}_b^2(-\infty, \infty)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}W_*(z) &= e^{2\mu z} - 1, & z \in [0, z^*), \\ W_*(z^*) &= \frac{e^{2\mu z^*}}{c}, & \frac{\partial W_*}{\partial z}(z^*) = \frac{2\mu e^{2\mu z^*}}{c}, & \frac{\partial W_*}{\partial z}(0) = 0. \end{aligned}$$

Как уже было отмечено, на интервале $z \in (-\infty, 0)$ выполняется равенство $W_*(z) = W_*(0)$, а на интервале $z \in (z^*, \infty)$ мы доопределим функцию как $W_*(z) = e^{2\mu z}/c$. Здесь мы используем два условия гладкого склеивания: в точке $z = z^*$ и в точке $z = 0$.

Итак, мы пришли к той же задаче, что и при доказательстве теоремы 1. Далее будем действовать так же, как в предыдущем случае: найдем решение задачи Стефана, проверим методами стохастического анализа, что найденная функция является решением исходной задачи, и перейдем от байесовского критерия к условно-экстремальному. В результате мы придем к искомому ответу: оптимальным моментом остановки является $\tau_\alpha^* = \inf\{t: B_t^\mu \leq z_\alpha^*\}$, где $z_\alpha^* = -(\ln \alpha)/(2\mu)$. Теорема доказана.

5. Абсолютный критерий. Для абсолютного критерия и момента θ результат выглядит следующим образом.

Теорема 3. *Оптимальным моментом в смысле абсолютного критерия является момент*

$$\tau^* = \inf\{t: S_t^\mu - B_t^\mu \geq z^*\}, \quad (10)$$

где z^* — единственное положительное решение уравнения $e^{2\mu z} = (1 - 4\mu z)^{-1}$.

Доказательство. Рассматриваемый нами критерий $\mathbf{E}|\tau - \theta|$ выражается через соответствующий процесс апостериорной вероятности $\pi_t = \mathbf{P}(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^{B^\mu})$ следующим образом (см., например, [5]):

$$\mathbf{E}|\tau - \theta| = \mathbf{E}\theta + \mathbf{E} \int_0^\tau (2\pi_s - 1) ds.$$

Тогда решением задачи

$$\inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} |\tau - \theta| = \mathbf{E}\theta + \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E} \int_0^\tau (2\pi_s - 1) ds$$

будет, очевидно, тот же момент оптимальной остановки, что и в задаче

$$W(z) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^{B^\mu}} \mathbf{E} \int_0^\tau (2\pi_s - 1) ds.$$

Для решения этой задачи об оптимальной остановке сформулируем следующую задачу Стефана:

$$\frac{1}{2} W_*''(z) - \mu W_*'(z) = 2e^{2\mu z} - 1, \quad z \in [0, z^*), \quad W_*(z^*) = 0, \quad W_*'(z^*) = 0, \quad W_*'(0) = 0.$$

На интервале $[z^*, \infty)$ мы определим функцию как $W_*(z) = 0$. Решением дифференциального уравнения является функция

$$W_*(z) = e^{2\mu z} \left(\frac{2z}{\mu} - \frac{3}{2\mu^2} \right) + \frac{z}{\mu} + c,$$

где z^* — единственный положительный корень уравнения $e^{2\mu z} = (1 - 4\mu z)^{-1}$, а $c = (2\mu^2)^{-1} (1 + 2e^{2\mu z^*} - 2\mu z^*)$. Проверка того, что найденная функция $W_*(z)$ действительно является решением исходной задачи, производится при помощи формулы Ито, аналогично доказательству теоремы 1. Таким образом, оптимальным моментом для этой задачи является момент первого выхода процесса $S_t^\mu - B_t^\mu$ за границу z^* , т.е. момент (10). Теорема доказана.

Вполне очевидно, что для абсолютного критерия и момента g можно сформулировать следующий результат.

Теорема 4. *Оптимальным моментом в смысле абсолютного критерия является момент $\tau^* = \inf\{t: B_t^\mu \leq -z^*\}$, где z^* — единственное положительное решение уравнения $e^{2\mu z} = (1 - 4\mu z)^{-1}$.*

Таким образом, в рассматриваемых задачах для моментов θ и g роль «достаточных статистик» играют соответственно процессы $S_t^\mu - B_t^\mu$ и B_t^μ , а оптимальными моментами остановки являются моменты достижения этими процессами некоторого постоянного уровня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Graversen S. E., Peskir G., Shiryaev A. N.* Stopping Brownian motion without anticipation as close as possible to its ultimate maximum. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 1, с. 125–136.
2. *Pedersen J. L.* Optimal prediction of the ultimate maximum of Brownian motion. — Stochastics and Stochastics Rep., 2003, v. 75, № 4, p. 205–219.
3. *Shiryaev A. N.* Quickest detection problems in the technical analysis of the financial data. — Mathematical Finance–Bachelier Congress (Paris, 2000). Berlin: Springer-Verlag, 2002, p. 487–521.
4. *Урусов М. А.* Об одном свойстве момента достижения максимума броуновским движением и некоторых задачах оптимальной остановки. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 1, с. 184–190.
5. *Ширяев А. Н.* Об условно-экстремальных задачах скорейшего обнаружения непредсказуемых моментов у наблюдаемого броуновского движения. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 4, с. 751–768.
6. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976, 272 с.
7. *du Toit J., Peskir G.* The trap of complacency in predicting the maximum. — Ann. Probab., 2007, v. 35, № 1, p. 340–365.
8. *du Toit J., Peskir G.* Predicting the time of the ultimate maximum for Brownian motion with drift. — Mathematical Control Theory and Finance. Berlin: Springer-Verlag, 2008, p. 95–112.
9. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998, 1008 с.
10. *Peskir G.* On reflecting Brownian motion with drift. — Proceedings of the 37th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and its Applications. Kyoto: ISCIE, 2005, p. 1–5.
11. *Graversen S. E., Shiryaev A. N.* An extension of P. Lévy's distributional properties to the case of a Brownian motion with drift. — Bernoulli, 2000, v. 6, № 4, p. 615–620.
12. *Peskir G., Shiryaev A. N.* Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Basel: Birkhäuser, 2006, 500 p.
13. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963, 859 с.

Поступила в редакцию
9.XII.2009

Исправленный вариант
6.X.2010

© 2011 г.

BARNDORFF-NIELSEN O. E.*, PEDERSEN J.*

META-TIMES AND EXTENDED SUBORDINATION

Обсуждается задача определения субординатора однородного базиса Леви с помощью неотрицательного однородного базиса Леви. Приводится явная конструкция, обобщающая обычный одномерный случай. Эта конструкция задействует некоторые случайные замены метавремени.

Ключевые слова и фразы: базисы Леви, листы Леви, замена метавремени.

* Department of Mathematical Sciences, University of Aarhus, Denmark; e-mail: oebn@imf.au.dk, jan@imf.au.dk